FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Matemática Discreta

Primeiro Teste – 6 de Abril de 2018

[Cotação] Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.

1. Considere os conjuntos $A = \{\{a,b\},\{b,c\}\}$ e $B = \{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\}\}$. Represente, em extensão, os conjuntos seguintes:

[1,0] (a) $\bigcap A$.

[1,0] (b) $\bigcup B$.

[1,0] (c) $\{a\} \times \{\emptyset,\{\emptyset\}\}$.

[1,5] (d) $\mathcal{P}(\{(a,b),(a,\{b\})\})$.

2. Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto S.

[2,0] (a) Mostre, utilizando tabelas de verdade, que

$$(A\backslash B)\cup(B\backslash A) \subseteq A\cup B.$$

[2,5] (b) Mostre, formalmente, que

$$(A\backslash C)\cap(B\backslash C) = (A\cap B)\backslash C.$$

3. Sobre o conjunto $X = \{a,b,c,d,e\}$ considere a relação $S = \{(a,b),(b,c),(c,d),(d,e)\}$ e a relação $R = \{(x,x) : x \in X\} \cup \{(a,c),(c,a),(a,d),(d,a),(c,d),(d,c)\}$.

[1,5] (a) Represente a relação S por meio de um diagrama de setas.

[1,0] (b) Considere A a matriz de adjacências da relação S. Justifique que $A_{i,j} = 0$ se, e só se, $j \neq i+1$, para $i,j \in \{1,2,3,4,5\}$.

[2,0] (c) Justifique, usando os elementos de R, que a relação R é uma relação de equivalência.

[1,0] (d) Determine o conjunto quociente X/R.

4. Considere o conjunto $X = \{a,b,c,d,e,f\}$ e o seu subconjunto $Y = \{b,c,d,e\}$. Considere a relação de ordem parcial sobre X definida por $S = \{(x,x) : x \in X\} \cup \{(b,a),(c,a),(d,a),(e,a),(f,a),(e,c),(f,c)\}$.

[1,0] (a) Indique, justificando, se a afirmação seguinte é verdadeira ou falsa:
O elemento a cobre todos os elementos do conjunto $X\backslash\{a\}$.

[1,0] (b) Construa o diagrama de Hasse de S.

[2,0] (c) Indique justificando, caso existam, os elementos maximais, o supremo e o mínimo do subconjunto Y do c.p.o. (X,S).

[1,5] **5.** Sejam R e S duas relações binárias simétricas sobre um conjunto X. Prove que se $R \circ S = S \circ R$ então $R \circ S$ é simétrica.

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Matemática Discreta

Primeiro Teste – 6 de Abril de 2018

Uma resolução com notas explicativas

1. Sendo $A = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$ e $B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$.

(a) $\bigcap A = \{x \mid \forall_{X\in A},\ \ x \in X\} = \{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$.

(b) $\bigcup B = \{x \mid \exists_{X\in B},\ \ x \in X\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

(c) Por definição,

$$\begin{aligned} \{a\} \times \{\emptyset, \{\emptyset\}\} &= \{(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq \mathcal{P}\left(\{a\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\right) \mid x \in \{a\}\ \wedge\ y \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\ &= \{(a, \emptyset), (a, \{\emptyset\})\}. \end{aligned}$$

(d) $\mathcal{P}(\{(a, b), (a, \{b\})\}) = \{X \mid X \subseteq \{(a, b), (a, \{b\})\}\} = \{\emptyset,\ \{(a, b)\},\ \{(a, \{b\})\},\ \{(a, b), (a, \{b\})\}\}$.

2. (a) Usando tabelas de verdade temos:

$(A$	$\setminus$	$B)$	$\cup$	$(B$	$\setminus$	$A)$	$\subseteq$	A	$\cup$	B
1	0	1	0	1	0	1	–	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	–	0	0	0
(1)	(2)	(1)	(3)	(1)	(2)	(1)	(4)	(1)	(2)	(1)

(b) Queremos mostrar que $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$, ou seja

$$\forall x \in S,\ x \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \setminus C.$$

Seja $x \in S$ arbitrário.

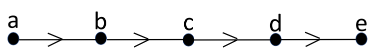
$$\begin{aligned} x \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C) &\quad\Leftrightarrow\quad \text{(definição de } \cap\text{)} \\ x \in A \setminus C\ \wedge\ x \in B \setminus C &\quad\Leftrightarrow\quad \text{(definição de } \setminus\text{)} \\ (x \in A\ \wedge\ x \notin C)\ \wedge\ (x \in B\ \wedge\ x \notin C) &\quad\Leftrightarrow\quad \text{(associatividade e idempotência de } \wedge\text{)} \\ (x \in A\ \wedge\ x \in B)\ \wedge\ x \notin C &\quad\Leftrightarrow\quad \text{(definição de } \cap\text{)} \\ x \in A \cap B\ \wedge\ x \notin C &\quad\Leftrightarrow\quad \text{(definição de } \setminus\text{)} \\ x \in (A \cap B) \setminus C & \end{aligned}$$

Logo, qualquer que seja $x \in S$, $x \in (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ se e só se $x \in (A \cap B) \setminus C$, e portanto

$$(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C.$$

3. Dadas sobre $X = \{a, b, c, d, e\}$, a relação binária $S = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, e)\}$ e a relação binária $R = \{(x, x) : x \in X\} \cup \{(a, c), (c, a), (a, d), (d, a), (c, d), (d, c)\}$ temos:

(a) Uma representação de S por meio de um diagrama de setas, em que se coloca uma seta de x para y se o par $(x, y) \in S$, com $x, y \in X$, é:



(b) Considerando $x_1 = a,\ x_2 = b,\ x_3 = c,\ x_4 = d$ e $x_5 = e$, pela definição de matriz de adjacências de S

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } (x_i, x_j) \in S; \\ 0, & \text{se } (x_i, x_j) \notin S. \end{cases}$$

temos a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, $A_{i,j} = 1$ se, e só se, $j = i+1$, e portanto $A_{i,j} = 0$ se, e só se, $j \neq i+1$ para $i, j \in \{1,2,3,4,5\}$.

(c) $\Delta_X = \{(x,x) \mid x \in X\} = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e)\} \subseteq R$, logo R é **reflexiva**.

$R^{-1} = \Delta_X \cup \{(c,a),(a,c),(d,a),(a,d),(d,c),(c,d)\} = R$, logo R é **simétrica**.

$R \setminus \Delta_X$	(a,c)	(c,a)	(a,d)	(d,a)	(c,d)	(d,c)
$R \setminus \Delta_X$	$(c,a)(c,d)$	$(a,c)(a,d)$	$(d,a)(d,c)$	$(a,c)(a,d)$	$(d,a)(d,c)$	$(c,a)(c,d)$
$(R \setminus \Delta_X) \circ (R \setminus \Delta_X)$	$(a,a)(a,d)$	$(c,c)(c,d)$	$(a,a)(a,c)$	$(d,c)(d,d)$	$(c,a)(c,c)$	$(d,a)(d,d)$

Assim $(R \setminus \Delta_X) \circ (R \setminus \Delta_X) = \{(a,a),(a,d),(c,c),(c,d),(a,c),(d,c),(d,d),(c,a),(d,a)\} \subseteq R$ e, portanto, R é **transitiva**.

Como R é reflexiva, simétrica e transitiva então é uma relação de **equivalência** sobre X.

(d) $X/R = \{[x]_R \mid x \in X\}$ é o **conjunto quociente**, isto é, o conjunto das classes de equivalência.

Ora para qualquer $x \in X$, $[x]_R = \{y \in X \mid (y,x) \in R\}$ donde

$[a]_R = \{y \in X \mid (y,a) \in R\} = \{a,c,d\} = [c]_R = [d]_R$,

$[b]_R = \{y \in X \mid (y,b) \in R\} = \{b\}$,

$[e]_R = \{y \in X \mid (y,e) \in R\} = \{e\}$.

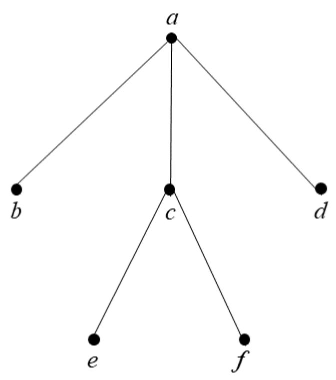
Assim $X/R = \{\{a,c,d\},\{b\},\{e\}\}$.

4. (a) Para qualquer $x \in X \setminus \{a\}$, dizemos que a cobre x relativamente a S se, e só se,não existe $z \in X$ tal que $(x,z) \in S$ e $(z,a) \in S$. Facilmente se observa, através do conjunto S que, por exemplo, $(e,c) \in S$ e $(c,a) \in S$ logo a não cobre e. Deste modo concluímos que a afirmação dada é falsa.

(b) Sabemos que os elementos x e y estão ligados no diagrama de Hasse se, e só se, $(x,y) \in S$ e y cobre x.
Dados $x, y \in X$ e $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$, sabemos que y cobre x se, e só se, $(x,y) \notin (S \setminus \Delta) \circ (S \setminus \Delta)$.
Determinemos, então $(S \setminus \Delta) \circ (S \setminus \Delta)$:

$S \setminus \Delta$	(b,a)	(c,a)	(d,a)	(e,a)	(f,a)	(e,c)	(f,c)
$S \setminus \Delta$						(c,a)	(c,a)
$(S \setminus \Delta) \circ (S \setminus \Delta)$						(e,a)	(f,a)

Dado que a está relacionado com cada um dos elementos de X mas não cobre e nem f, obtemos o seguinte diagrama de Hasse:



(c) Chamamos **elemento maximal** de Y a um elemento $z \in Y$ tal que não existe $y \in Y \setminus \{z\}$ com $(z, y) \in S$

Conjunto dos elementos maximais de Y $= \{b, c, d\}$.

Chamamos **majorante** de Y a um elemento $x \in X$ tal que $(y, x) \in S$ para qualquer $y \in Y$.

Conjunto dos majorantes de Y $= \{a\}$.

Chamamos **supremo** de Y ao menor dos majorantes.

Supremo de Y $= a$.

Chamamos **mínimo** de Y a um elemento $z \in Y$ tal que $(z, y) \in S$ para qualquer $y \in Y$.

Mínimo de Y - não existe.

5. Temos que R e S são relações binárias simétricas pelo que

$$\forall x, y \in X, \quad (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$$

e

$$\forall x, y \in X, \quad (x, y) \in S \Rightarrow (y, x) \in S.$$

Temos, também, que $R \circ S = S \circ R$.

Provemos que

$$R \circ S = \{(x, y) \in X \times X : \exists z \in X \quad (x, z) \in S \wedge (z, y) \in R\}$$

é simétrica.

Seja $(x, y) \in R \circ S$ arbitrário.

$$\begin{aligned}
(x, y) \in R \circ S \quad &\Leftrightarrow \quad (\text{definição de } R \circ S) \\
\exists z \in X \quad (x, z) \in S \wedge (z, y) \in R \quad &\Leftrightarrow \quad (R \text{ e } S \text{ simétricas}) \\
\exists z \in X \quad (z, x) \in S \wedge (y, z) \in R \quad &\Leftrightarrow \quad (\text{comutatividade } \wedge) \\
\exists z \in X \quad (y, z) \in R \wedge (z, x) \in S \quad &\Leftrightarrow \quad (\text{definição de } S \circ R) \\
(y, x) \in S \circ R \quad &\Leftrightarrow \quad (\text{por hipótese } R \circ S = S \circ R) \\
(y, x) \in R \circ S \quad &
\end{aligned}$$

Logo, qualquer que seja $(x, y) \in R \circ S$, temos que $(y, x) \in R \circ S$ e, portanto, $R \circ S$ é simétrica.