



FACULDADE DE  
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA  
Departamento de Matemática

## Matemática Discreta

Segundo Teste - 8 junho 2019 - 11:30

1. Considere o seguinte conjunto:

$$I := \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} \in \mathbb{N} \right\}.$$

- (a)  $I = \mathbb{N}$ ;
- (b)  $|I| = \aleph_0$  e  $|\mathbb{N} \setminus I| = \aleph_0$ .
- (c)  $|I| = \aleph_0$  e  $0 < |\mathbb{N} \setminus I| < \aleph_0$ .
- (d) Esta alínea está certa e mais nenhuma está certa.

2. Considere a seguinte afirmação: *Seja  $m$  o número de alunos que estão a fazer este exame e que têm um número ímpar de irmãos; se os contarmos, vamos constatar que  $m$  é um número par.*

Assinale a opção correta:

- (a) Consideremos o grafo cujos vértices são os alunos e os seus irmãos; existe um arco entre  $u$  e  $v$  no caso de  $u$  e  $v$  serem irmãos. Como em qualquer grafo o número de vértices de grau ímpar tem de ser par, a frase está correta.
- (b)  $m$  tanto pode ser ímpar como par.
- (c) Consideremos o grafo cujos vértices são os alunos que estão a fazer exame; existe um arco entre  $u$  e  $v$  caso tanto  $u$  como  $v$  tenham um número ímpar de irmãos. Este grafo é composto por um grafo completo  $K_m$  e um conjunto de vértices isolados. Como para  $m > 3$  o número de arestas de um grafo completo é par, então se tivermos  $m > 3$  a frase é verdadeira.
- (d) Todas as opções anteriores são falsas.

3. Considere a seguinte sequência:  $s := (4, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ . Escolha a opção certa:

- (a)  $s$  não pode ser a sequência gráfica de uma árvore porque o grau máximo só poderia ser 2.
- (b)  $s$  pode ser a sequência gráfica de uma árvore.
- (c)  $s$  não pode ser a sequência gráfica de uma árvore porque o número de arestas teria de ser  $n - 1$ , o que não ocorre.
- (d)  $s$  é sequência gráfica, mas não pode ser a sequência gráfica de uma árvore.

4. Considere a seguinte afirmação: *Todo o grafo bipartido é uma árvore.* Indique a opção correta.

- (a) A afirmação é falsa; correta é a afirmação recíproca.
- (b) Os grafos bipartidos podem ser coloridos com duas cores, tal como as árvores, logo a afirmação está correta.
- (c) Os grafos bipartidos não têm ciclos de comprimento ímpar logo são árvores.
- (d) Há grafos bipartidos que não são árvores e há árvores que não são grafos bipartidos.

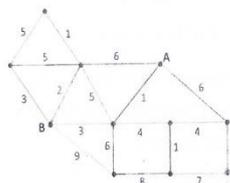
5. Sejam  $n, m \geq 1$  e  $K_{2m+1, 2n}$  o grafo bipartido completo. Indique a opção correta:

- (a)  $K_{2m+1, 2n}$  não é euleriano, mas pode ser transformado num grafo euleriano bipartido.
- (b)  $K_{2m+1, 2n}$  é euleriano.
- (c)  $K_{2m+1, 2n}$  é semi-euleriano.
- (d) Para certos valores de  $m$  e  $n$  é semi-euleriano; nunca é euleriano.

6. Seja  $A$  a matriz de adjacência de um determinado grafo simples sem lacetes e seja  $I$  a matriz identidade. Sabendo que  $A^2 = I$ , indique a opção certa:

- (a) como  $I^2 = I = A^2$  concluímos que  $A = I$ .
- (b) A sequência gráfica deste grafo é  $(1, \dots, 1)$ .
- (c) Se  $A$  é a matriz de adjacência de um grafo sem lacetes, nunca poderemos ter  $A^2 = I$ .
- (d) Nenhuma das anteriores está certa.

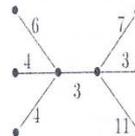
7. Considere o seguinte grafo ponderado.



Use o algoritmo de Prim para mostrar que uma sua árvore maximal de valor mínimo tem valor:

- a) superior a 39
- b) 31
- c) 29
- d) inferior a 27

8. Encontre um grafo ponderado euleriano em que todo o vértice pertence a um ciclo e tal que se aplicarmos o algoritmo de Kruskal podemos obter a árvore seguinte:



9. Prove que toda a árvore com pelo menos dois vértices tem pelo menos duas folhas.