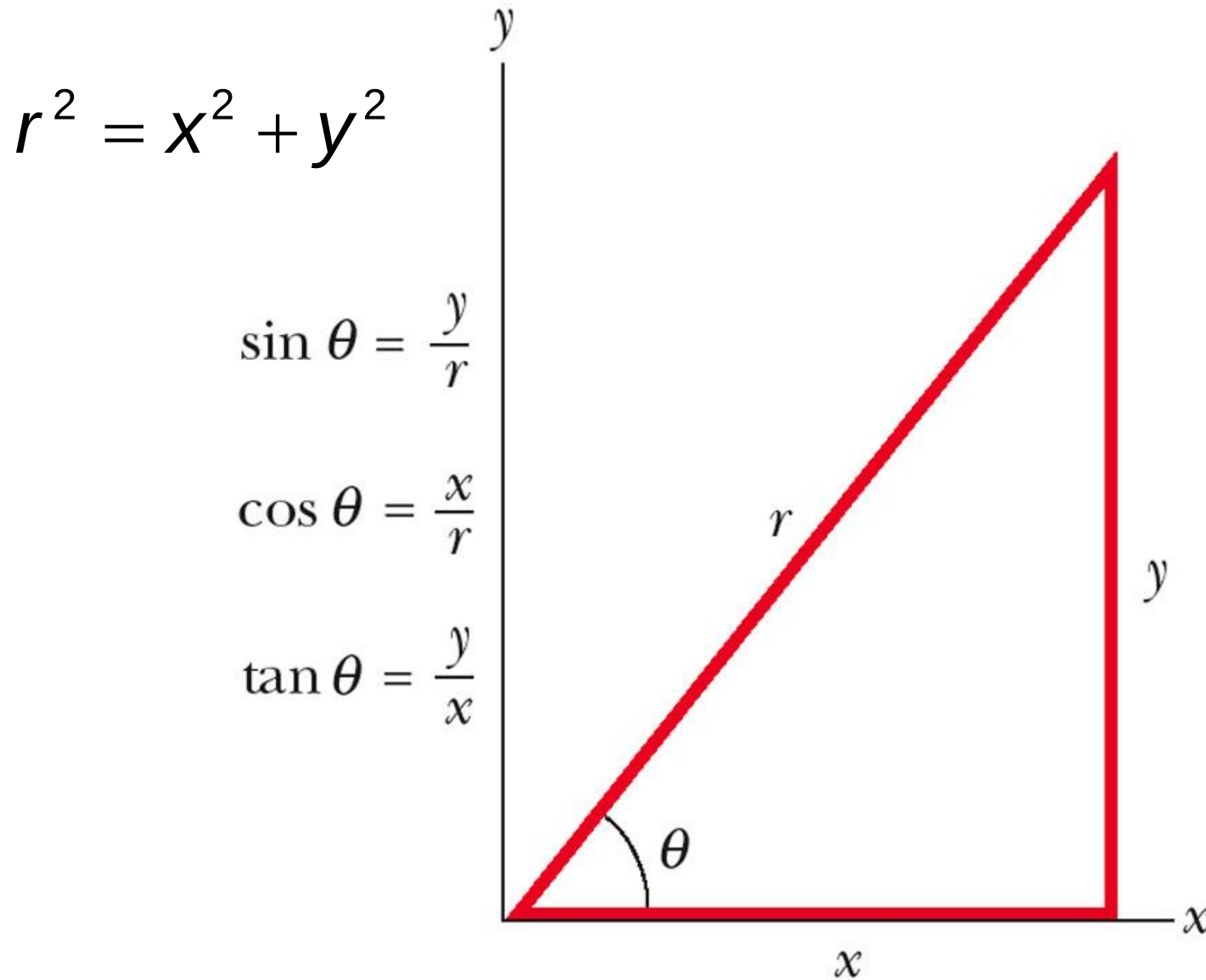




T2

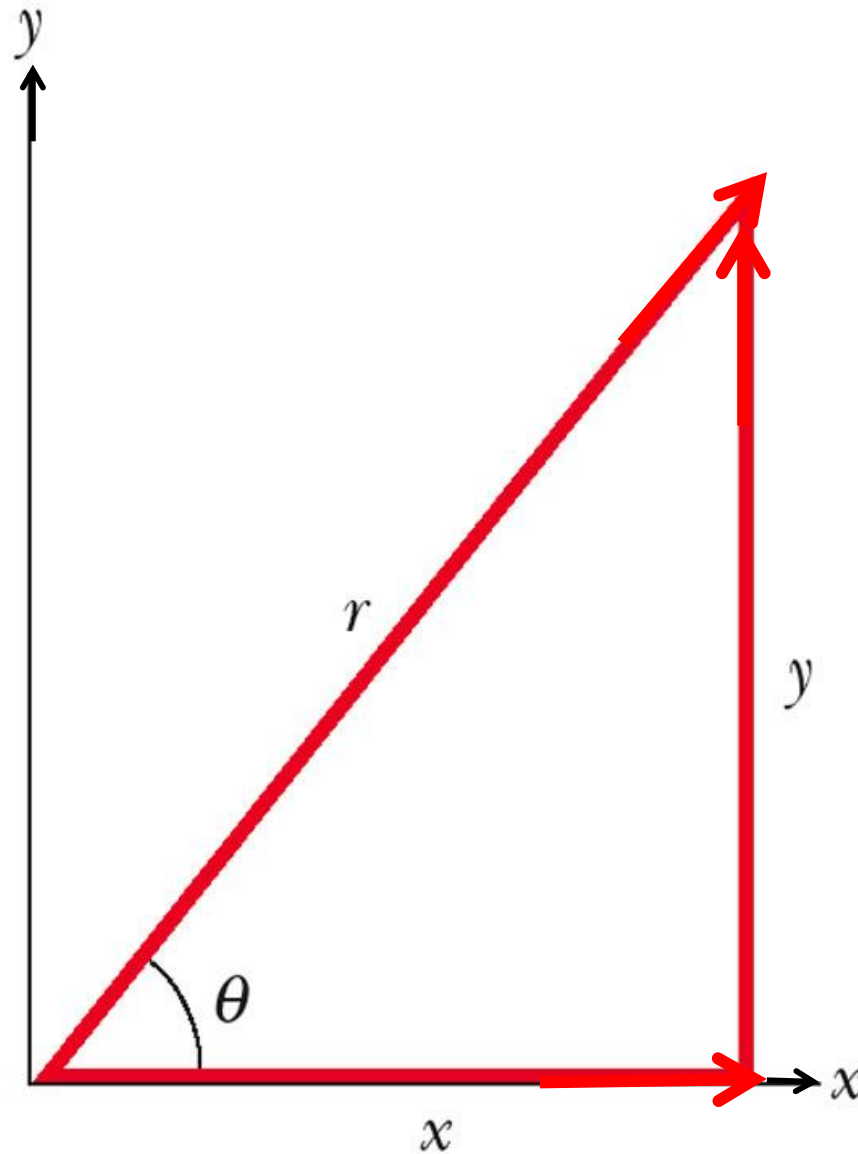
- Conceito de vector
- Componentes de um vector
- Soma e diferença de vectores
- Coordenadas cartesianas
- Exemplos

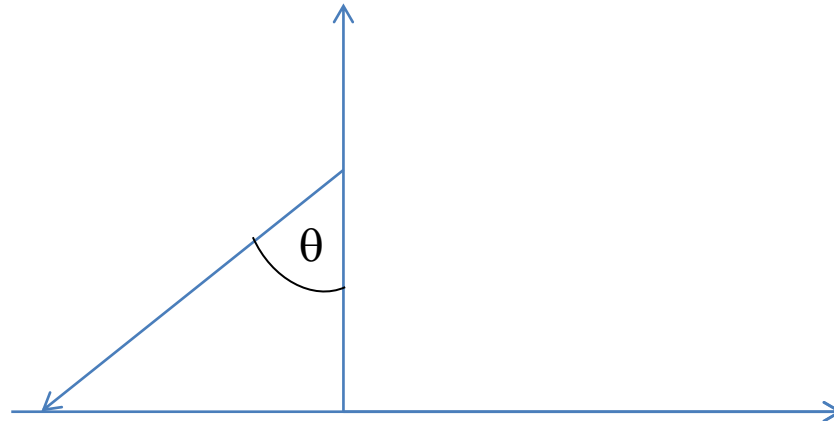
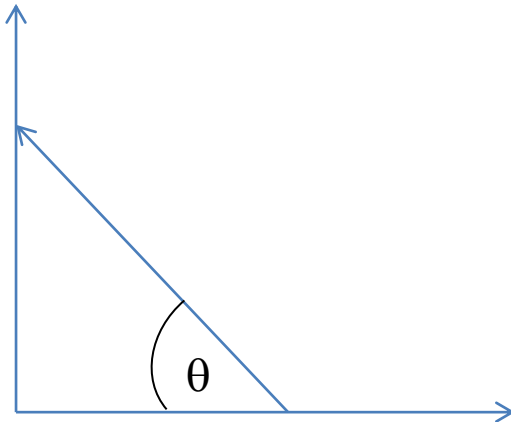
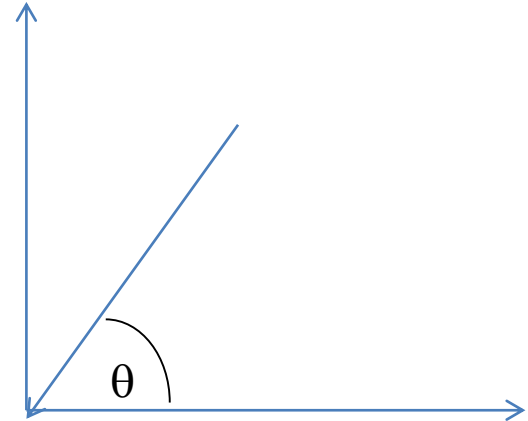
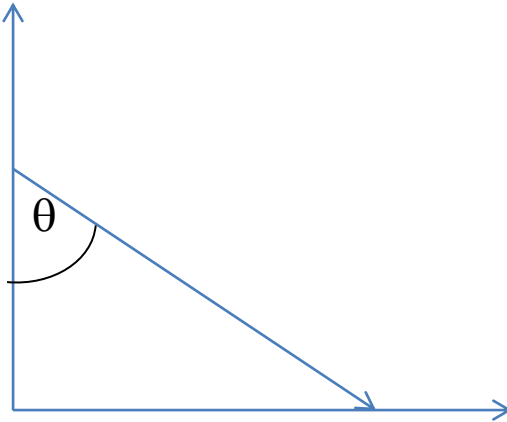


$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$





Escrever as componentes de cada um destes vectores

Soma de vectores: exemplos

Diferença de vectores: exemplos

Produto de vectores

Produto interno

O produto escalar é comutativo $\vec{A} \cdot \vec{B} = A B \cos \theta$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

O produto escalar é distributivo em relação à soma de vectores

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

Produto escalar de vectores unitários

Utilizando $\vec{A}$ e $\vec{B}$ em termos das componentes:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

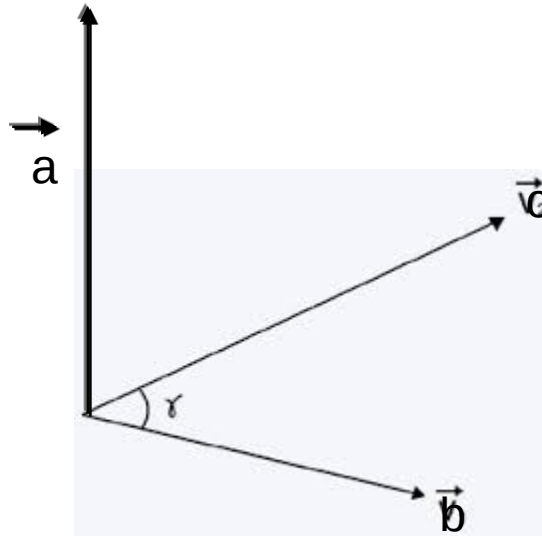
$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Produto externo de dois vectores



Exemplos.

Produto externo de dois vectores

Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ dois vectores, não nulos nem paralelos, e $\vec{n}$ um vector de comprimento 1, perpendicular a $\vec{a}$ e a $\vec{b}$ e, ainda, tal que $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{n}$, por esta ordem constituem um triedro directo.

Chama-se produto externo de $\vec{a}$ por $\vec{b}$, e designa-se por $\vec{a} \times \vec{b}$ o vector

$$|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \vec{n},$$

sendo $\theta (0 \leq \theta \leq \pi)$ o ângulo formado por eles.

O módulo de $\vec{a} \times \vec{b}$, por $|\vec{n}| = 1$, é o escalar $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$, que representa a área do paralelogramo construído sobre as imagens dos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

O módulo de $\vec{a} \times \vec{b}$, por $|\vec{n}| = 1$, é o escalar $|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$, que representa a área do paralelogramo construído sobre as imagens dos vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Propriedades do Produto Externo

$$1. \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \text{ se e só se } \vec{a} = \vec{0} \text{ ou } \vec{b} = \vec{0} \text{ ou } \vec{a} \parallel \vec{b}.$$

$$2. \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

$$3. \alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = (\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\vec{b}), \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$4. (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$$

Numa base ortonormada, sendo $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ e $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$,

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3 =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

convencionando-se que se desenvolve este determinante usando o teorema Laplace aplicado à 1ª linha.

Aplicações do produto externo

1. Colinearidade de dois vectores. Se dois vectores não são nulos e o seu produto externo é nulo, então são colineares. Tem-se

ou ainda

$$a_i = \lambda b_i, i = 1, 2, 3.$$

Assim, dois vectores colineares têm as suas coordenadas homónimas proporcionais.

2. Ângulo de dois vectores. A partir da definição de módulo do produto externo, tem-se

$$\sin \theta = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

3. Área de um triângulo. Se os dois vectores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ forem lados de um triângulo, a área A deste pode ser calculada por

$$A = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Força e movimento

Mecânica Newtoniana

A Primeira Lei de Newton

Força

Referenciais inerciais

Massa

A Segunda Lei de Newton

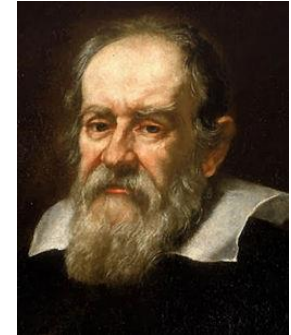
Alguns tipos de forças

A força gravítica

O peso

As Forças

Galileu Galilei

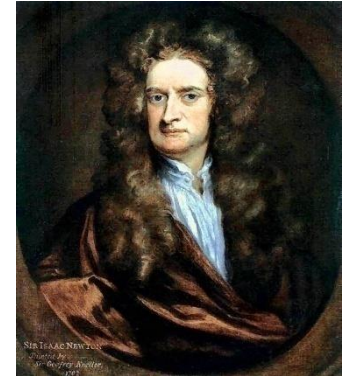


- Qual é a causa do movimento dos corpos?
- Se um corpo estiver imóvel, ficará para sempre imóvel?
- A experiência do dia-a-dia diz-nos que não. O corpo eventualmente poderá mover-se.
- E o que é que significa estar em repouso?
- Um corpo pode estar imóvel em relação a um observador e estar em movimento em relação a outro observador?

As Forças

O que é que provoca a alteração do repouso ou do movimento de um corpo?

Foi Isaac Newton que deu a resposta esta pergunta: o que altera o estado de movimento de um corpo é a força que se exerce sobre ele.



Características de uma força:

- há um agente que exerce a força;
- há um corpo no qual a força é exercida;
- o agente empurra ou puxa o corpo em que se exerce a força;
- a força tem uma direcção, um sentido e uma intensidade sendo, portanto, um **vector**;
- exerce-se através de contacto ou exerce-se à distância.

As Forças

O que é uma força?

Temos todos a noção que exercer uma força num corpo é empurrar ou puxar esse corpo.

Sabemos também que se actuarmos com a mesma força em corpos com massas diferentes, vamos provocar resultados diferentes na alteração do movimento desses corpos.

Se é uma força que modifica o estado de movimento ou de repouso de um corpo, com que característica do movimento está a força directamente relacionada?

Foi ainda Newton que respondeu a esta questão:

As Forças

Se uma força é exercida num corpo, irá provocar a variação da velocidade desse corpo, ou seja, a força é proporcional à aceleração do corpo.

Esta é a Segunda Lei de Newton e apresenta-se, normalmente, na forma:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$\vec{F}$ é a força e m a massa da partícula

As Forças

Primeira Lei de Newton (Lei da inércia)

Na ausência de forças externas, quando observado em relação a um sistema de referência, um corpo em repouso permanece em repouso e um corpo em movimento continua a mover-se com *velocidade constante*.

A Primeira Lei de Newton descreve o que acontece na ausência de uma força;

Afirma ainda que *quando nenhuma força actua num corpo, a aceleração desse corpo é nula*.

As Forças

1.ª Lei de Newton (Lei da inércia) – Versão mais correcta

Se um corpo não interactua com outros corpos, é possível identificar um sistema de referência em que esse corpo tem aceleração nula;

A este sistema de referência chama-se referencial de inércia.

As Forças

Qualquer sistema de referência que se move com velocidade constante em relação a um referencial de inércia é, ele próprio, um referencial de inércia; A Terra será um referencial de inércia?

Um sistema de referência que se move com velocidade constante em relação às estrelas distantes é a melhor aproximação a um referencial de inércia;

Podemos considerar a Terra como um referencial de inércia, ainda que possua uma aceleração centrípeta de pequeno módulo associada ao seu movimento de rotação.

As Forças

As forças são as causas das alterações da velocidade de um corpo

A força é uma grandeza *vectorial*

Uma força dá origem a uma aceleração

A ***força resultante*** é a soma de todas as forças que actuam num corpo;

Força Resultante Nula

Quando a força resultante é nula:

A aceleração é nula

A velocidade é constante

Há ***equilíbrio*** quando a força resultante na partícula é nula

O corpo (considerado como partícula) sujeito a essa força, se está em repouso, permanece em repouso;

Se o corpo está em movimento, continuará a mover-se com velocidade constante.

As Forças

A interacção pode existir quando os dois corpos entram em contacto, como no caso do choque das bolas de bilhar, ou quando estão longe um do outro, como no caso da Lua e da Terra.

É habitual chamar **interacção** (ou força) **de contacto** à que ocorre apenas quando os corpos que interactuam se encontram em contacto e **interacção** (ou força) **à distância** à que tem lugar mesmo quando os corpos estão separados.

As Forças

Exemplos de interacções de contacto:

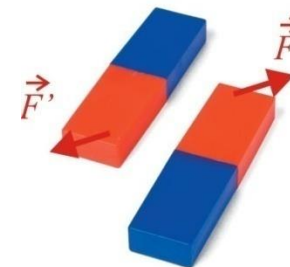
- Força exercida pela mesa num monitor de computador, e que o impede de cair;
- Força exercida pela mão numa porta e que provoca o movimento desta;
- Força exercida pelo pé numa bola e que a faz mover.



As Forças

Exemplos de interacções à distância: Não é necessário contacto físico

- Força exercida pela Terra num corpo e que o faz cair;
- Força entre dois ímanes que se encontram próximos um do outro, mas não encostados, e que os faz aproximarem-se ou afastarem-se um do outro;



Forças Fundamentais

Força gravitacional (ou gravítica)

Entre dois corpos – alcance infinito

Força electromagnética

Entre duas cargas eléctricas – alcance infinito

Força nuclear forte

Entre partículas subatómicas – alcance muito curto

Força nuclear fraca

Ocorre em alguns processos de decaimento radioactivo

Inércia e Massa

À tendência de um corpo para resistir a qualquer tentativa de alteração da sua velocidade dá-se o nome de ***inércia***;

A ***massa*** é a propriedade de um corpo que especifica a intensidade da resistência que o corpo apresenta às modificações da sua velocidade.

A Massa

A massa é uma propriedade inerente ao corpo;

A massa é independente do que rodeia o corpo;

A massa é independente do método utilizado para a medir;

A massa é uma grandeza escalar;

A unidade SI de massa é o kg.

A Força Gravítica

A força gravítica da Terra, $\vec{F}_g$, é a força que a Terra exerce num corpo;

A direcção e o sentido desta força são para o centro da Terra;

À força gravítica dá-se o nome de peso;

$$\text{Peso} = mg$$

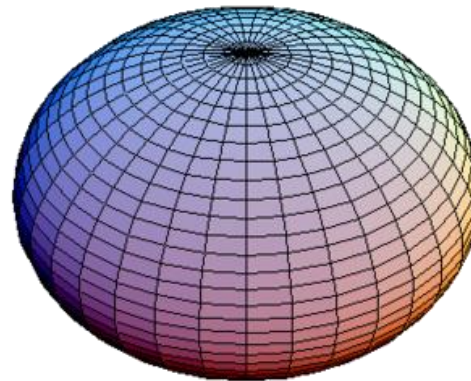


Peso

O peso varia com o local porque depende de g

O valor de g diminui com a altitude

(e diminui com a latitude, porque a Terra é levemente achatada nos polos)



O peso *não é*, portanto, uma propriedade intrínseca de um corpo.

A3

- Cinemática de uma partícula
- Movimento a uma dimensão
- Equações do movimento

Na cinemática estudamos a *descrição* dos
movimentos

Não nos preocupamos com o que *provocou* os
movimentos

O estudo do movimento envolve três grandezas

Deslocamento

Velocidade

Aceleração

Em muitos casos podemos estudar o movimento de um corpo extenso, como se ele fosse um ponto sem dimensões:

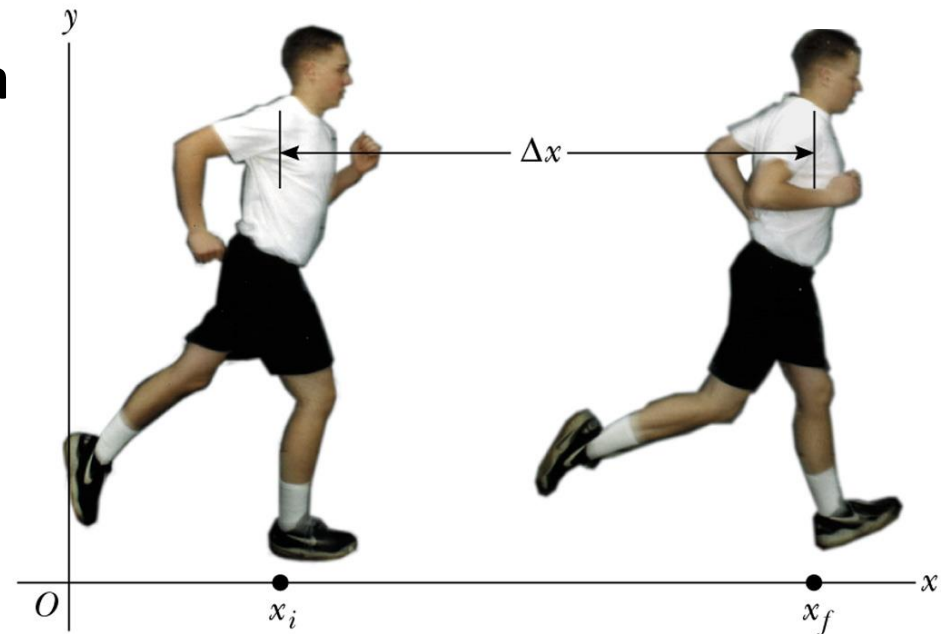
- Quando consideramos o movimento como de *translação pura*, sem considerarmos rotações e vibrações
- Quando o espaço envolvido é muito grande comparado com as dimensões do corpo

Neste curso apenas estudamos o movimento da partícula

Posição

É definida em termos do **sistema de referência** que adoptamos

- No *caso unidimensional*, utilizamos em geral os eixos dos x ou dos y



- Define um ponto de partida para o movimento – a origem do eixo

Deslocamento

Define-se como a variação da posição, $\Delta x = x_f - x_i$

- O subscrito “f” refere-se à posição final e “i” à inicial

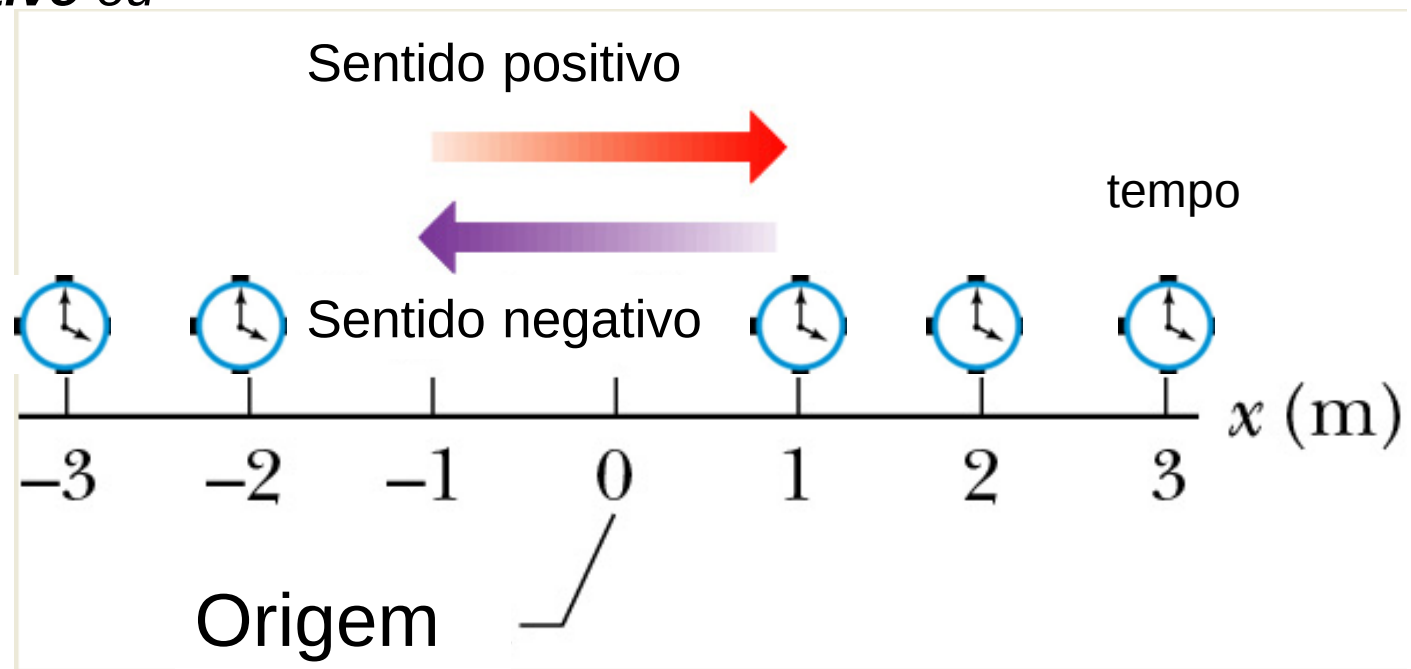
Se o deslocamento é vertical, utiliza-se, em geral Δy

- A unidade é o metro (m) no SI

Movimento Unidimensional

Sistema de Referência

O Deslocamento
pode ser **positivo** ou
negativo



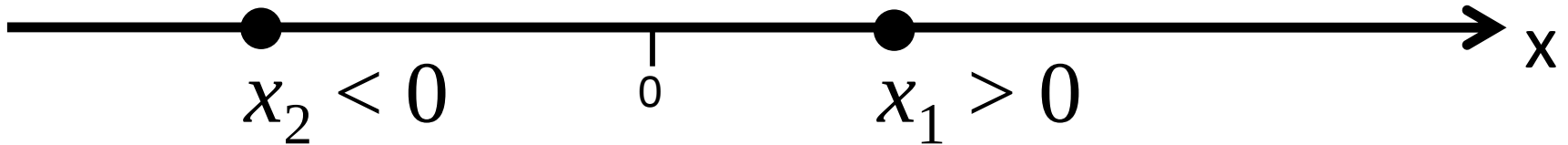
O Intervalo de tempo é
sempre positivo

Movimento a uma dimensão

A utilização do sinal $+$ ou $-$ é suficiente para descrever completamente o movimento. O sinal $+$ sempre que a aceleração tem o sentido do movimento e o sinal $-$ sempre que a aceleração tem o sentido contrário ao do movimento

Movimento a uma dimensão (revisão)

Posição

Deslocamento, Δx

$$t_2 > t_1 \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1$$



Deslocamento, Δx

$$t_2 > t_1 \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1$$

Velocidade média, v_{med}

$$\Delta t = t_2 - t_1, \quad v_{\text{med}} = \Delta x / \Delta t$$



O limite da velocidade média quando o intervalo de tempo se torna infinitesimal ou seja, quando o intervalo de tempo tende para zero

Como o deslocamento também se torna infinitesimal, a razão permanece finita

$$v \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

A *velocidade instantânea* indica o que acontece em cada instante

Velocidade média, v_{med}

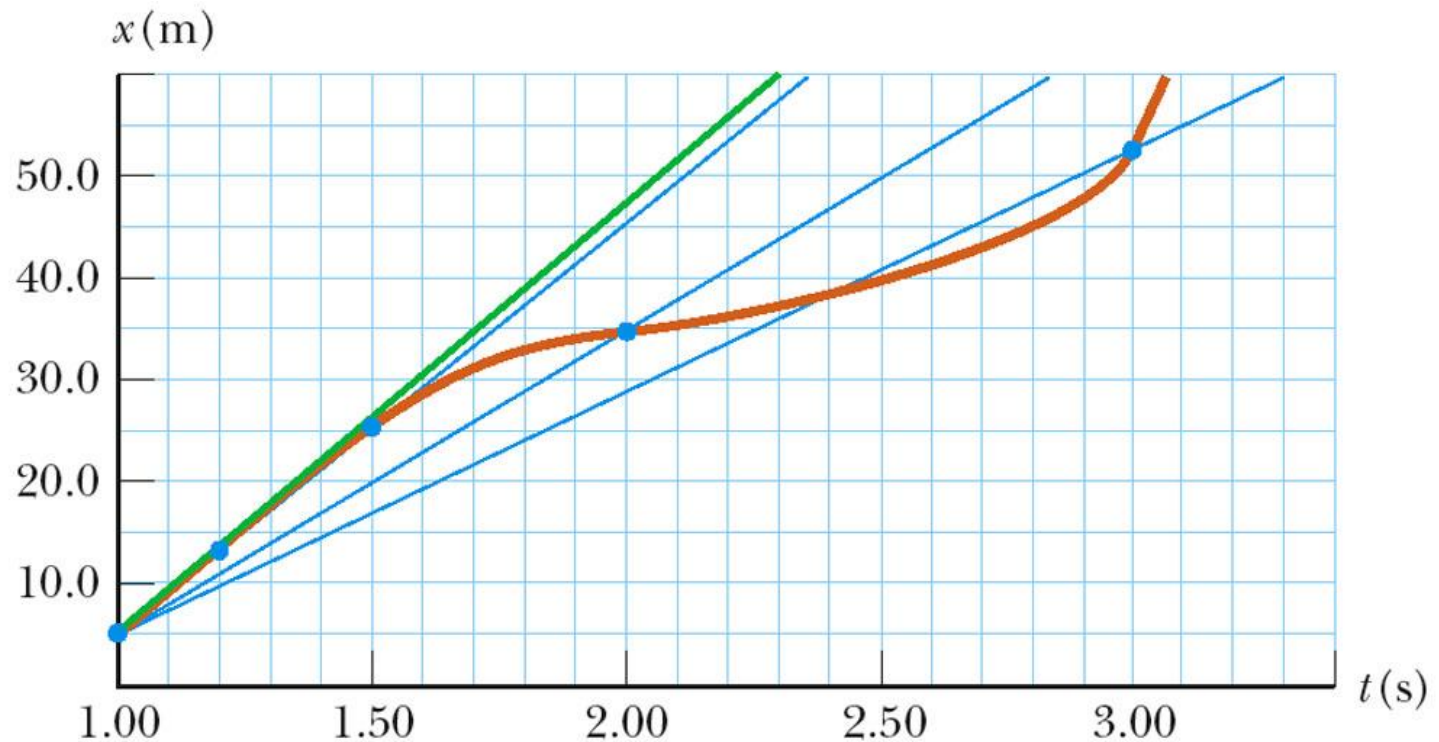
$$\Delta t = t_2 - t_1, \quad v_{\text{med}} = \Delta x / \Delta t$$



Velocidade instantânea, v

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{med}} = dx/dt$$

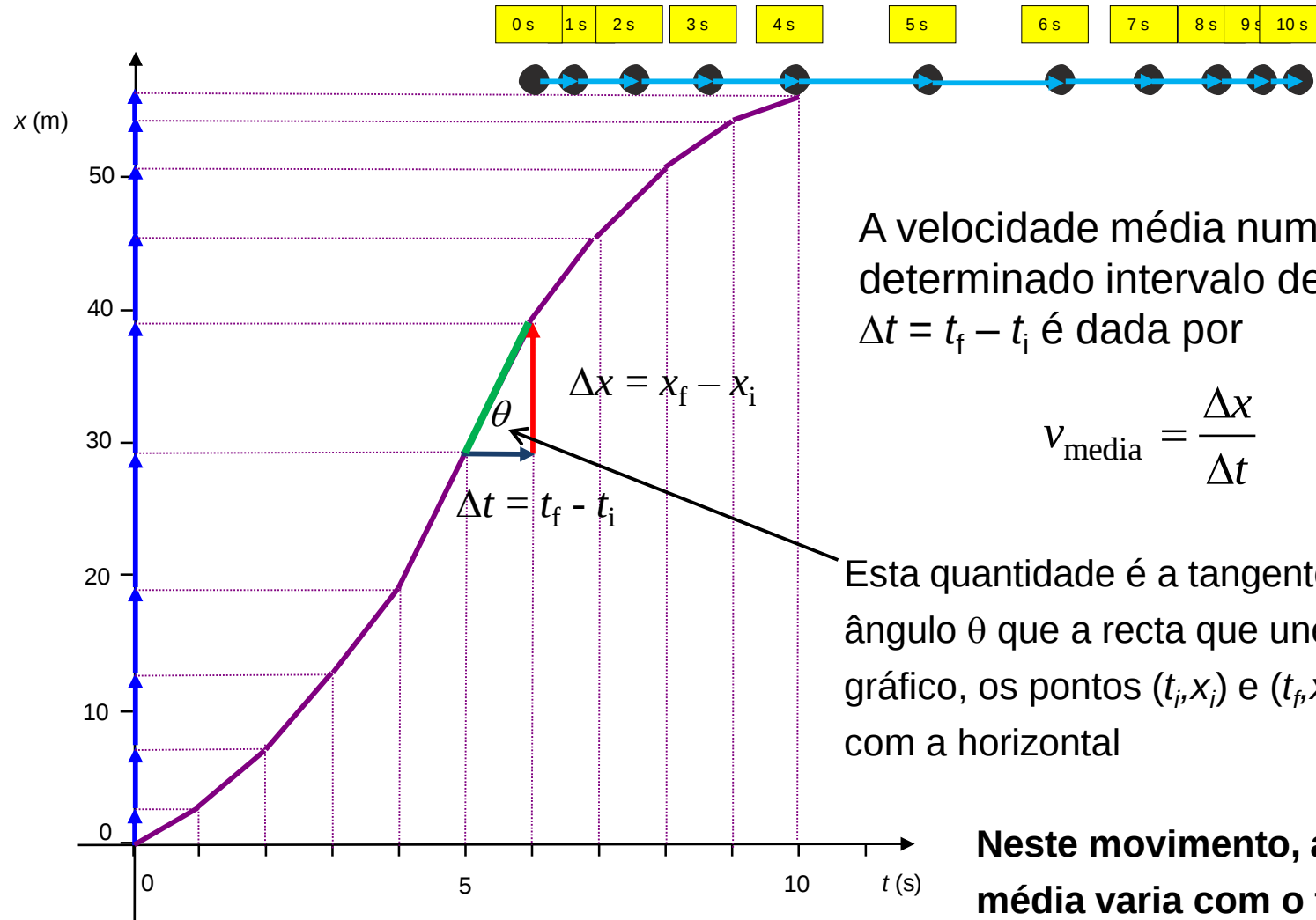
O declive da recta tangente à *curva da posição em função do tempo* é a velocidade instantânea naquele instante



Velocidade uniforme significa *velocidade constante*

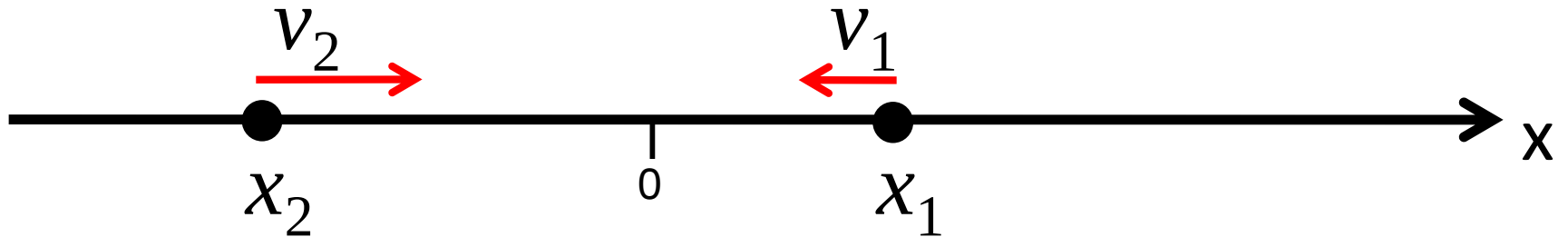
Os valores da *velocidade instantânea* são os mesmos em qualquer instante de tempo

E são sempre *iguais* aos da *velocidade média*



Aceleração média, a_{med}

$$t_2 > t_1, \Delta v = v_2 - v_1, a_{\text{med}} = \Delta v / \Delta t$$



Aceleração instantânea, a

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_{\text{med}} = dv/dt$$

Equações da Cinemática com aceleração constante: movimento a uma dimensão

Velocidade

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Aceleração

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Sendo v_0 e x_0 respectivamente a velocidade e a posição iniciais, como a aceleração é *constante*, podemos obter também uma expressão para a velocidade em função do tempo:

Velocidade

$$v = v_0 + at;$$

x , v e a podem ser positivos ou negativos.

Quando v e a têm o mesmo sinal, o movimento é **uniformemente acelerado**;

quando v e a têm o sinal oposto, o movimento é **uniformemente retardado**.

Posição

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

Equações da Cinemática no movimento unidimensional com aceleração

constante

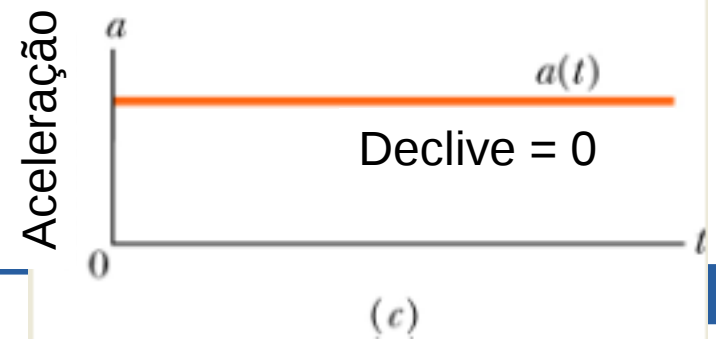
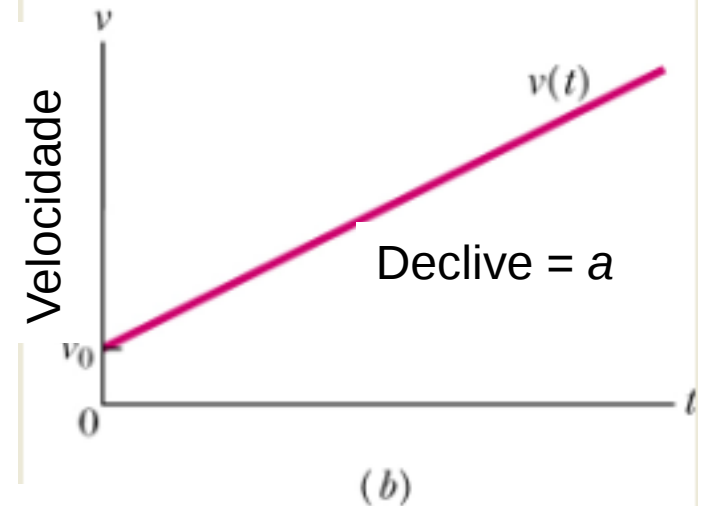
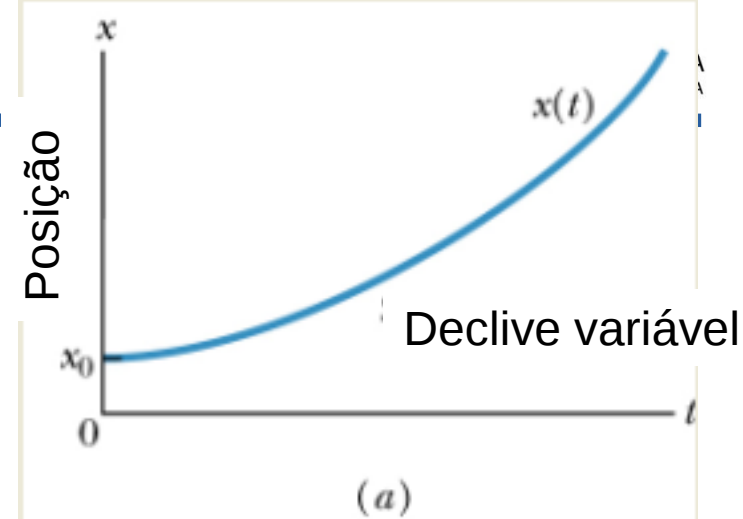
Como cada equação relaciona apenas três variáveis, podemos obter, a partir das duas equações anteriores, outras duas, num total de quatro:

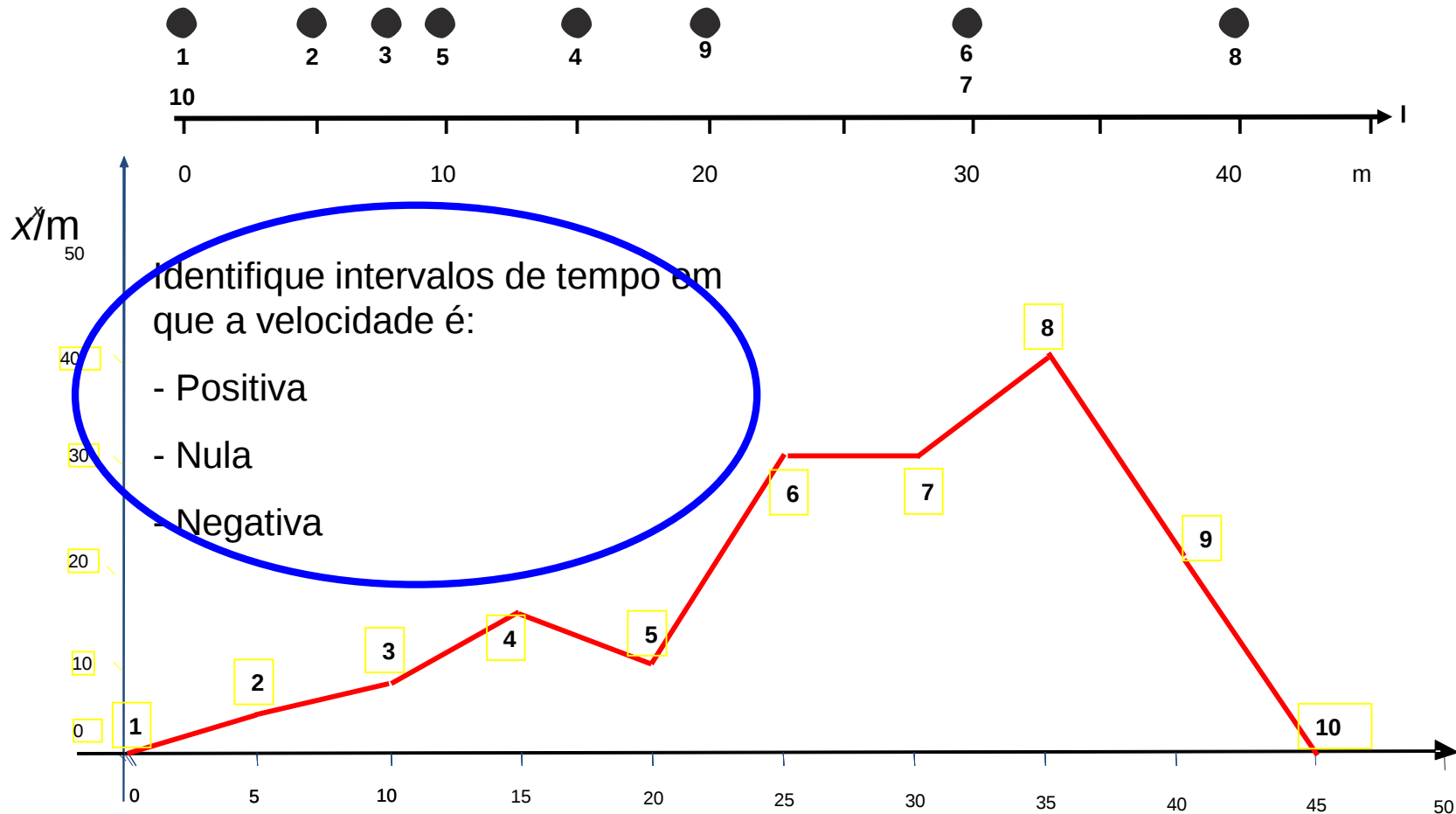
$$v = v_0 + at$$

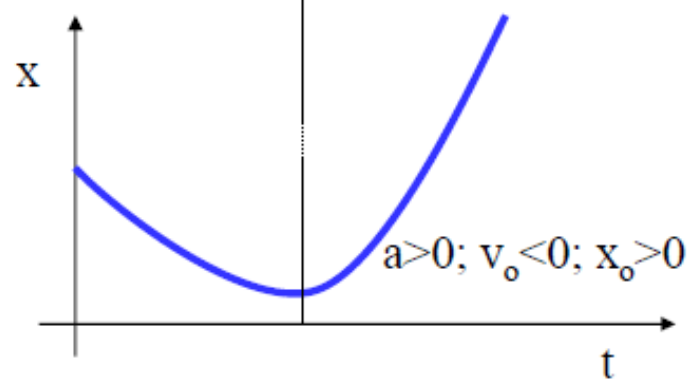
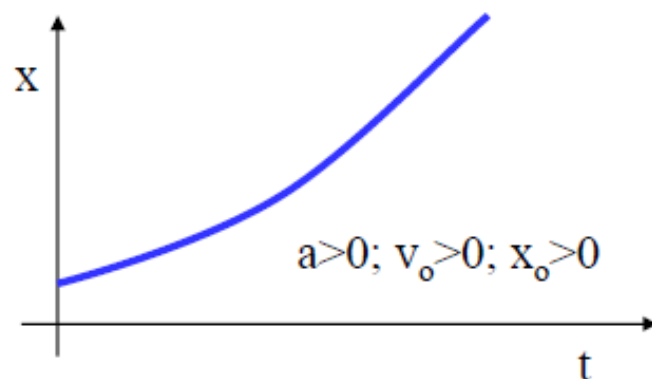
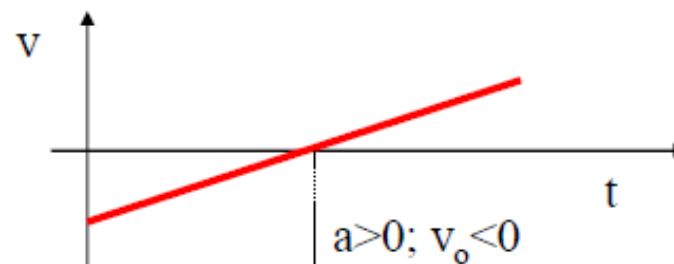
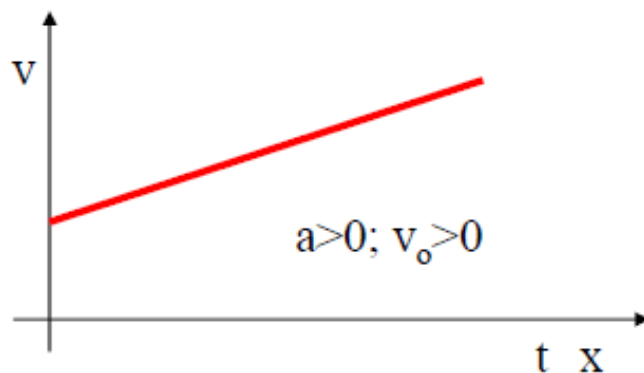
$$x = v_{\text{med}} t = \frac{1}{2} (v_0 + v) t$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

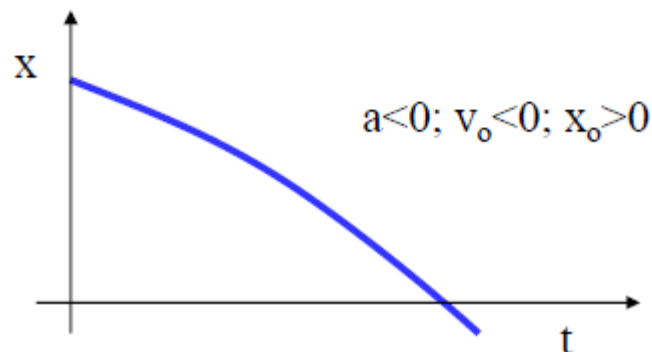
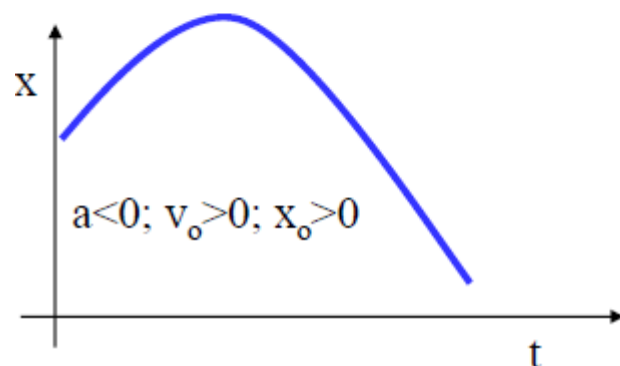
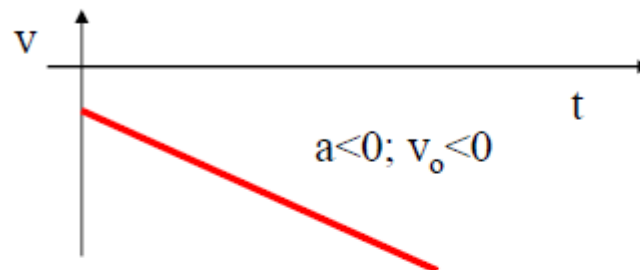
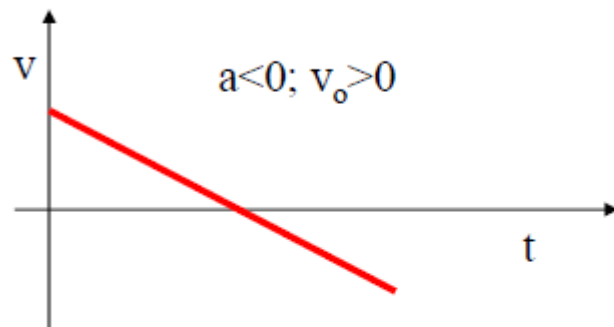
$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$





Movimento uniformemente acelerado a 1D. Exemplos.

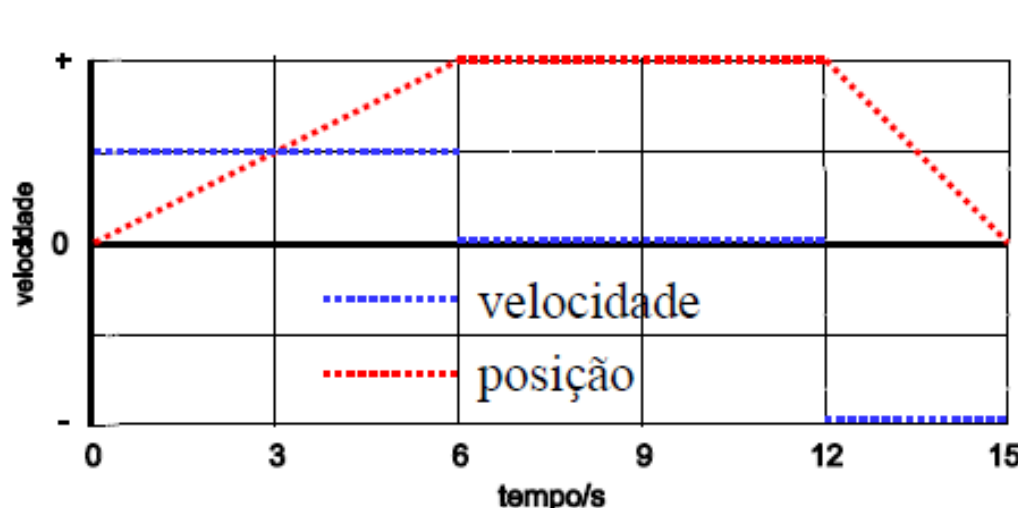
Movimento uniformemente acelerado a 1D. Exemplos.



Exercício

Utilizando uma *linha tracejada*, esboce no sistema de referência abaixo a sua **previsão** do gráfico da *velocidade* e da posição em função do *tempo* quando uma pessoa:

1. se afasta do detector devagar e com velocidade constante, durante 6 segundos;
2. depois fica imóvel durante seis segundos;
3. e depois se aproxima do detector com velocidade constante dupla da anterior.
4. Escreva as equações da velocidade e da posição em função do tempo.



$$v = \begin{cases} 1 & 0 < t < 6 \\ 0 & 6 < t < 12 \\ -2 & 12 < t < 15 \end{cases}$$

$$x = \begin{cases} t & 0 < t < 6 \\ 6 & 6 < t < 12 \\ 6 - 2(t - 12) & 12 < t < 15 \end{cases}$$

Movimento a duas e três dimensões

Movimento a duas e três dimensões

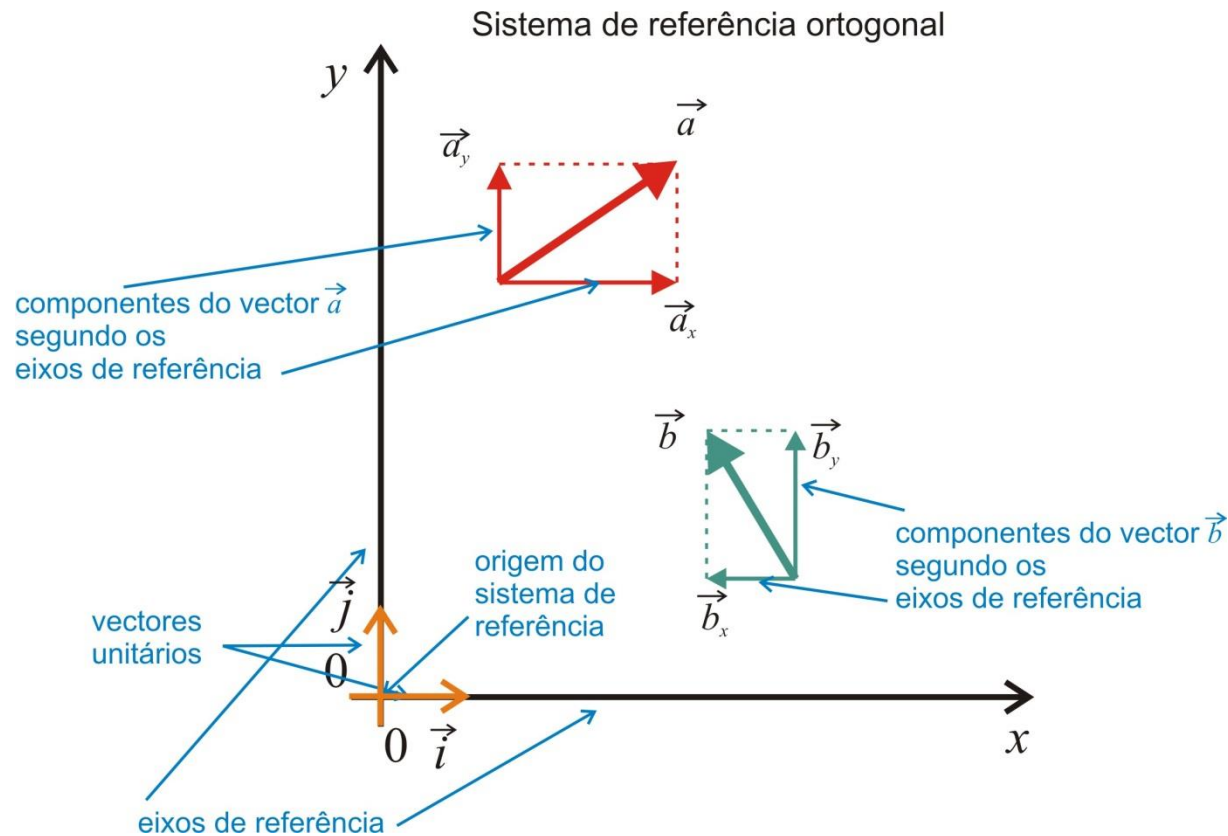
A utilização dos sinais + ou – não é suficiente para descrever completamente o movimento em mais do que uma dimensão;

Podem ser utilizados vectores para descrever o movimento de forma mais completa;

Estamos ainda interessados no *deslocamento*, na *velocidade* e na *aceleração*.

Ideias Gerais sobre o Movimento

Na cinemática do movimento a duas ou três dimensões, tudo é análogo ao movimento unidimensional, excepto no facto de termos de utilizar notação vectorial.



$$\vec{a}_x = a_x \vec{i} \quad \vec{a}_y = a_y \vec{j}$$

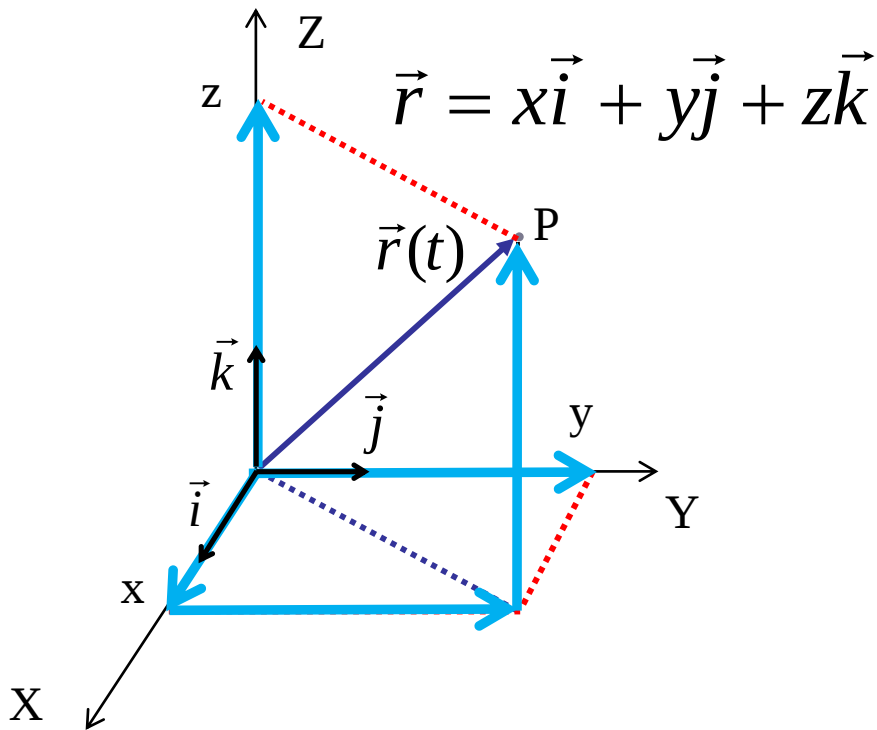
Componentes
escalares
dos vectores

$$\vec{b}_x = b_x \vec{i} \quad \vec{b}_y = b_y \vec{j}$$

Posição e Deslocamento

A posição de um objecto é descrita pelo seu vector de posição, $\vec{r}$

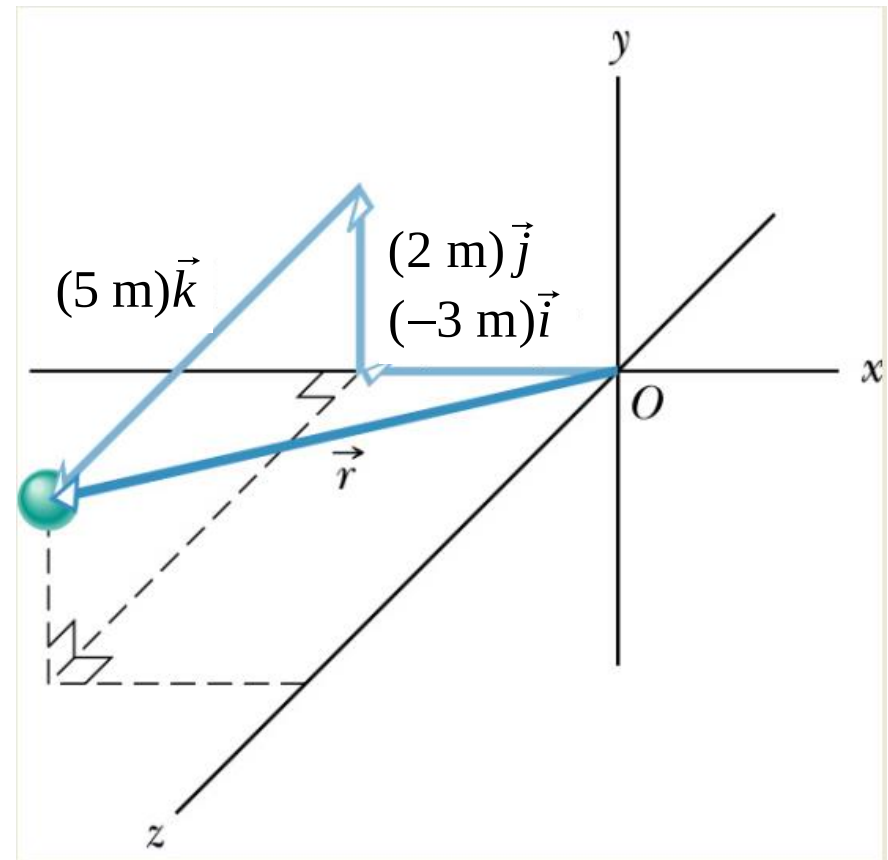
$$\vec{r}(t) \rightarrow \begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases}$$



Coordenadas cartesianas

A posição de um objecto é descrita pelo seu vector de posição, $\vec{r}$

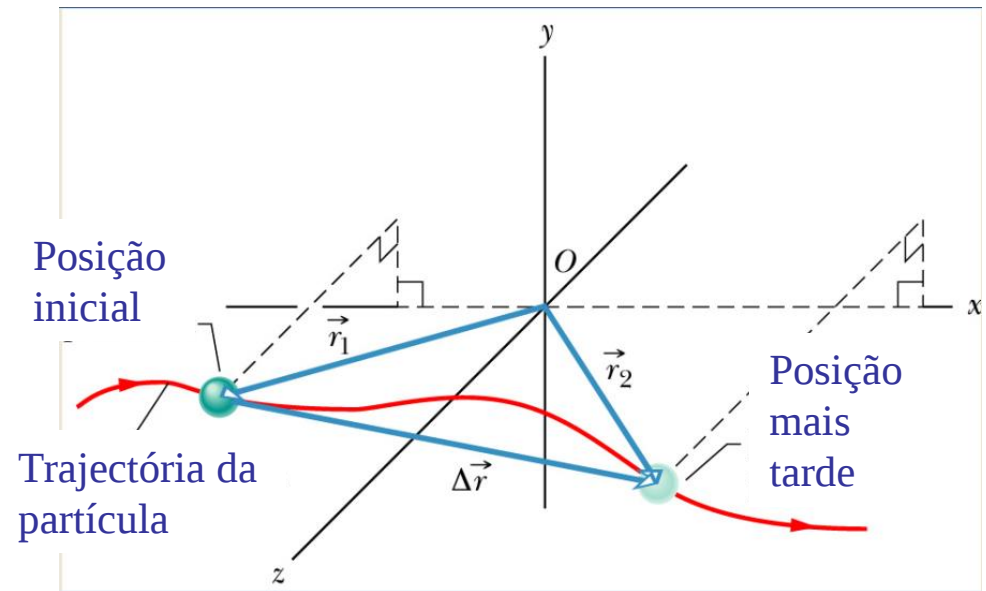
$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$



$$\vec{r} = (-3 \text{ m})\vec{i} + (2 \text{ m})\vec{j} + (5 \text{ m})\vec{k}$$

O **deslocamento** do objecto (partícula) é definido como a **variação da sua posição**

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$



$$\Delta \vec{r} = (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) - (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k})$$

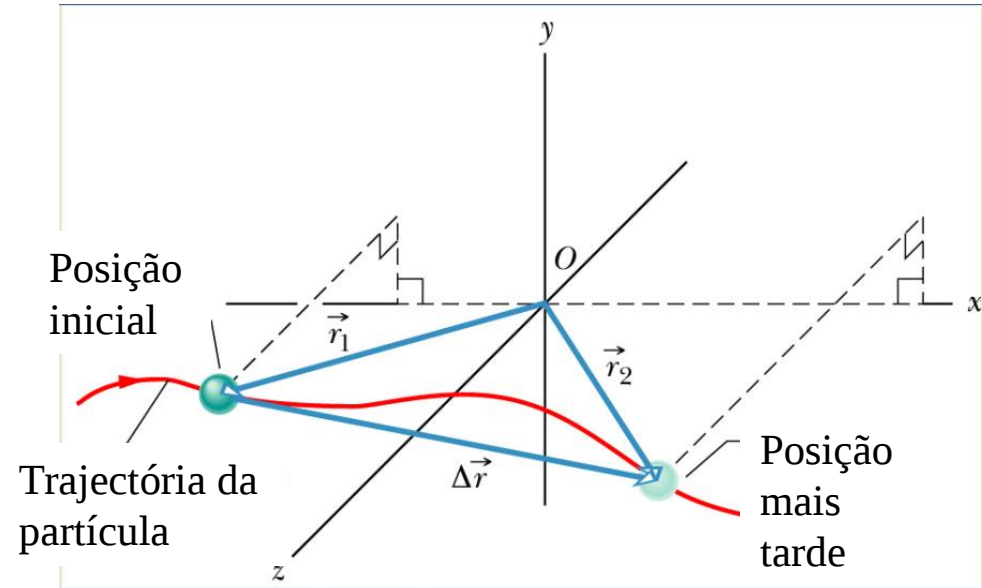
$$\Delta \vec{r} = (x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j} + (z_2 - z_1) \vec{k}$$

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} + \Delta z \vec{k}$$

O vector posição de uma partícula é, inicialmente,

$$\vec{r}_1 = (-3.0 \text{ m})\vec{i} + (2.0 \text{ m})\vec{j} + (5.0 \text{ m})\vec{k}$$

e, 2 s mais tarde



$$\vec{r}_2 = (9.0 \text{ m})\vec{i} + (2.0 \text{ m})\vec{j} + (8.0 \text{ m})\vec{k}$$

Qual é o deslocamento da partícula neste intervalo de tempo?

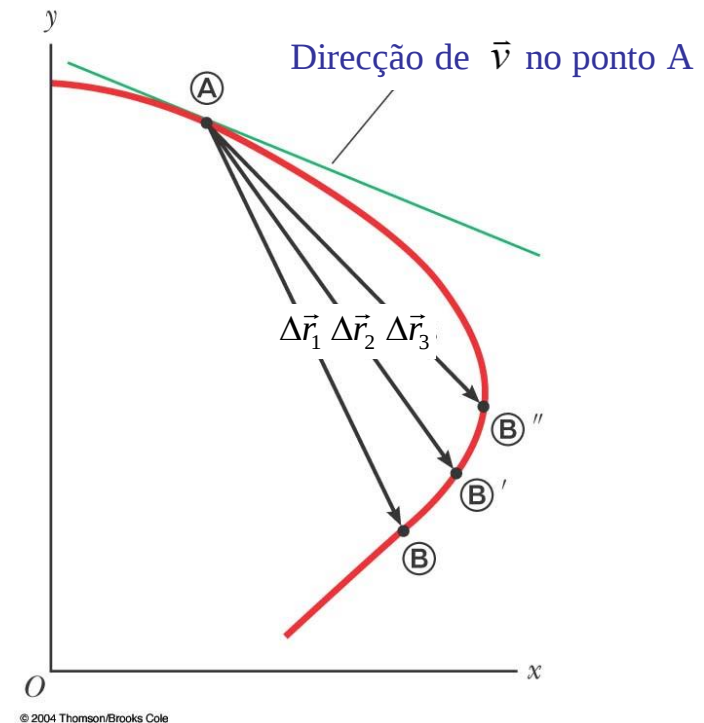
$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = [(9.0 \text{ m}) - (-3.0 \text{ m})]\vec{i} + [(2.0 \text{ m}) - (2.0 \text{ m})]\vec{j} + [(8.0 \text{ m}) - (5.0 \text{ m})]\vec{k} \\ &= (12.0 \text{ m})\vec{i} + (0.0 \text{ m})\vec{j} + (3.0 \text{ m})\vec{k}\end{aligned}$$

Velocidade média

A velocidade média num determinado intervalo de tempo é a razão do deslocamento pelo intervalo de tempo

$$\vec{v}_{\text{med}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

A direcção e o sentido da velocidade média são os do vector deslocamento $\Delta \vec{r}$

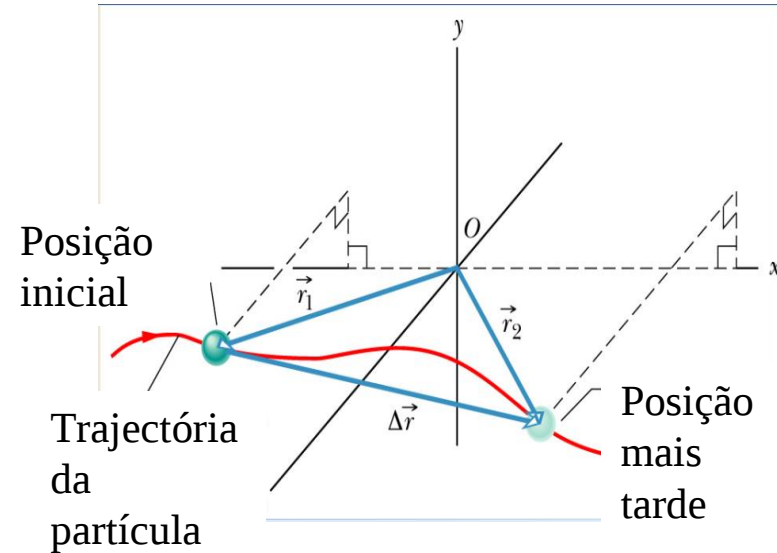


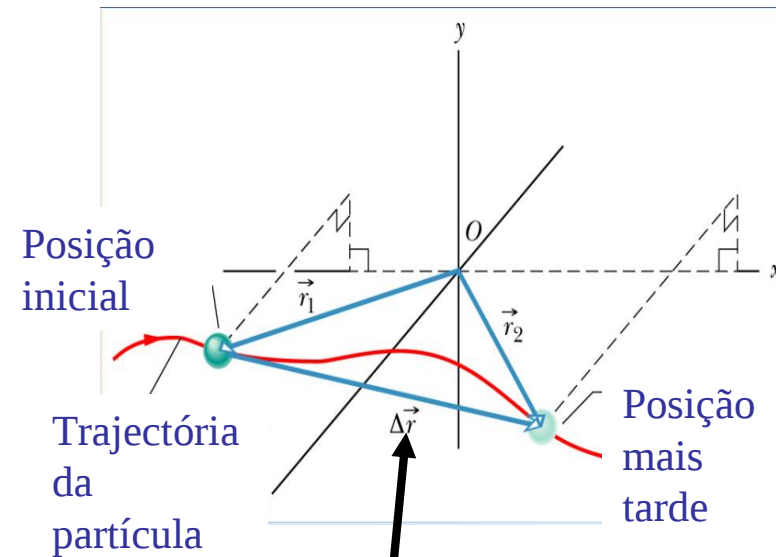
Em termos de vectores unitários,
a velocidade média é

$$\vec{v}_{\text{med}} = \frac{\Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} + \Delta z \vec{k}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \vec{k}$$

No problema anterior, a
velocidade média entre os dois
pontos é

$$\vec{v}_{\text{med}} = \frac{(12 \text{ m})\vec{i} + (3.0 \text{ m})\vec{k}}{2.0 \text{ s}} = (6.0 \text{ m/s})\vec{i} + (1.5 \text{ m/s})\vec{k}$$





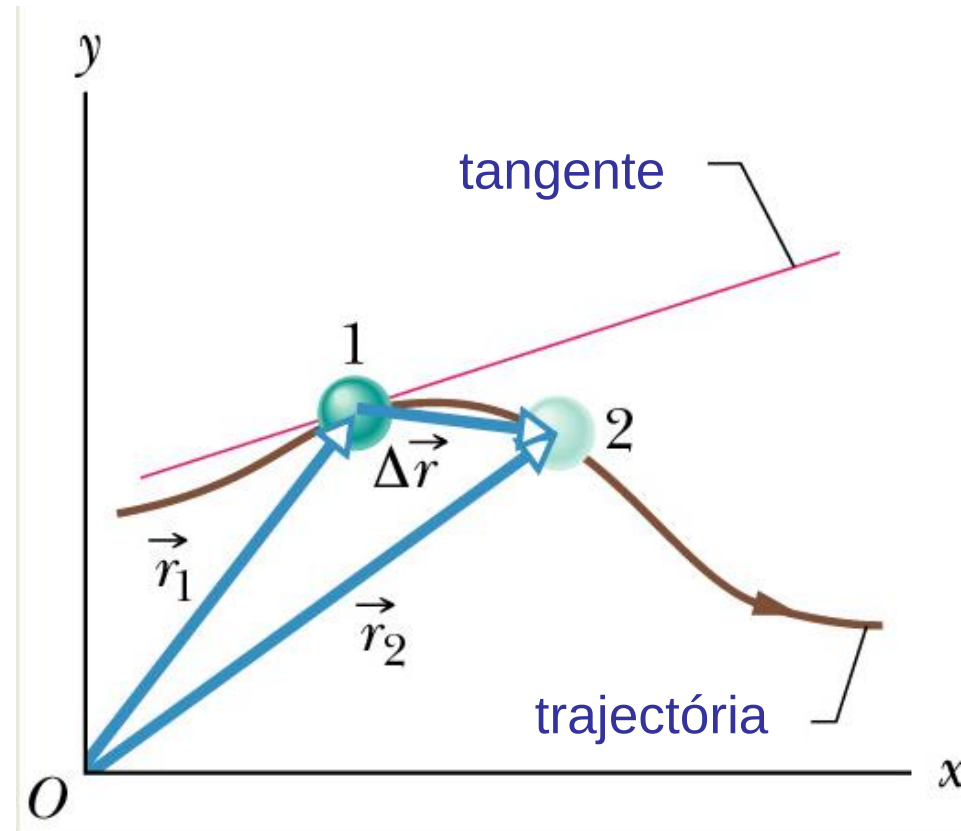
A velocidade média entre dois pontos é *independente da trajectória* (—)

Resulta do facto de depender apenas do deslocamento, que é independente da trajectória

A Velocidade Instantânea

A velocidade instantânea é o limite da velocidade média quando Δt tende para zero

A direcção da velocidade instantânea é a da tangente à trajectória da partícula e o sentido é o do movimento



$$\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

A direcção do vector velocidade instantânea em qualquer ponto da trajectória da partícula é a da tangente à trajectória nesse ponto e o sentido é o do movimento;

A velocidade instantânea
pode ser escrita na forma

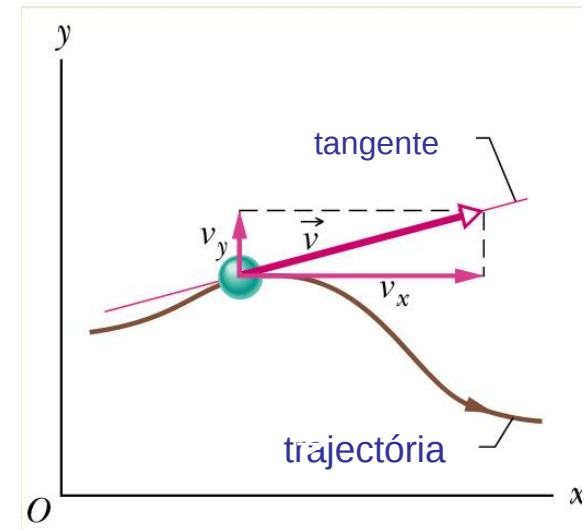
$$\vec{v} = \frac{d}{dt} \left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \right) = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$

ou

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

De onde

$$v_x = \frac{dx}{dt}; v_y = \frac{dy}{dt}; v_z = \frac{dz}{dt}$$



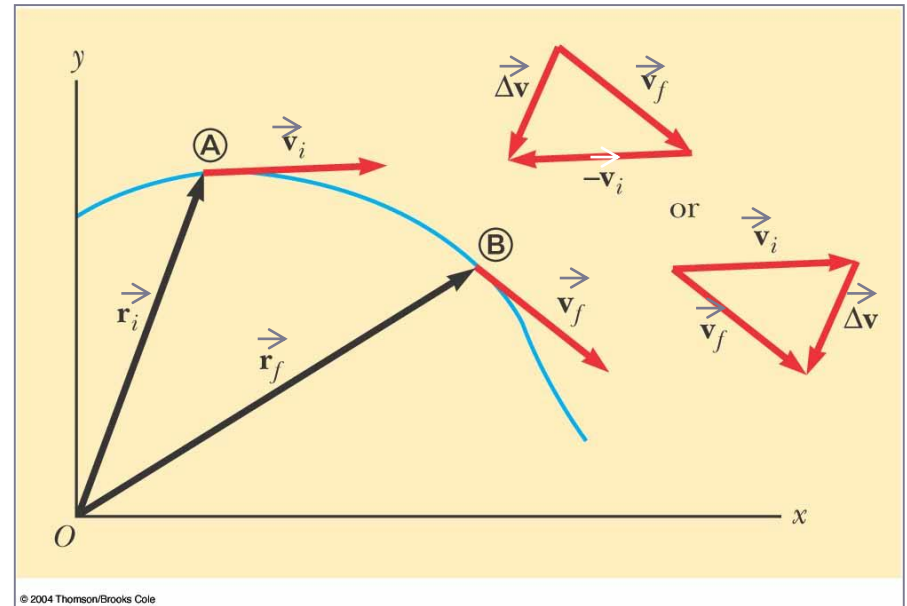
A Aceleração Média

A aceleração média de uma partícula em movimento é definida como a variação da velocidade instantânea dividida pelo intervalo de tempo em que essa variação teve lugar.

$$\vec{a}_{\text{med}} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Ao longo do movimento da partícula, $\Delta\vec{v}$ pode ser obtido por vários processos

A aceleração média é uma grandeza vectorial com a direcção e sentido de $\Delta\vec{v}$



A Aceleração Instantânea

A Aceleração Instantânea é o limite da aceleração média, $\Delta \vec{v} / \Delta t$, quando Δt tende para zero

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Relativamente aos vectores unitários, a aceleração escreve-se

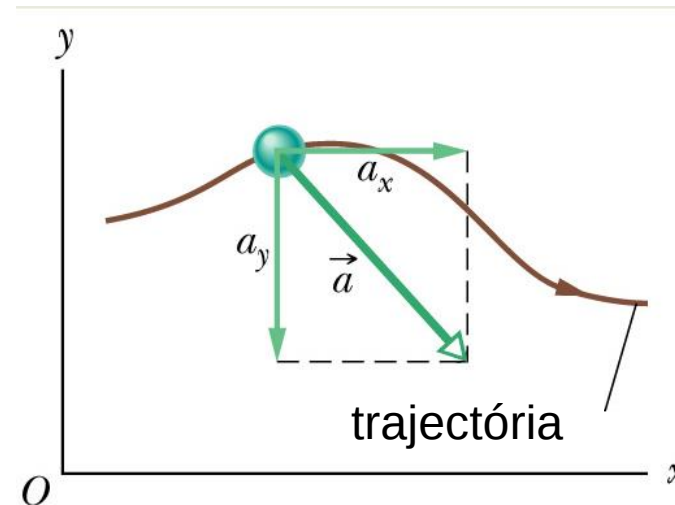
$$\vec{a} = \frac{d}{dt} (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k}$$

ou

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

de onde

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}; a_y = \frac{dv_y}{dt}; a_z = \frac{dv_z}{dt}$$



$$\vec{v}(t)$$

$$\vec{r}(t)=?$$

$$\Delta \vec{r} = \lim_{\Delta t_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \vec{v}_k \Delta t_k = \int_{t_0}^t \vec{v} dt$$

$$t=t_0 \Rightarrow \vec{r}=\vec{r}_0$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v} dt \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = x_0 + \int_{t_0}^t v_x dt \\ y = y_0 + \int_{t_0}^t v_y dt \\ z = z_0 + \int_{t_0}^t v_z dt \end{cases}$$

Equações gerais da Cinemática:

2. Aceleração variável no tempo

Vector velocidade $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Vector aceleração $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

Vector velocidade $\vec{v} = \int \vec{a} dt$

Vector posição $\vec{r} = \int \vec{v} dt$

$$\vec{a} = cte.$$

$$\vec{v}_f = \vec{v}_i + \vec{a}t$$

$$\vec{r}_f = \vec{r}_i + \vec{v}_i t + \frac{1}{2} \vec{a}t^2$$

Exercício

A aceleração dum corpo é dada por $\vec{a} = (2t\vec{i})\text{m/s}^2$. O corpo parte da origem das coordenadas com velocidade inicial, $\vec{v}_0 = (-2\vec{j})\text{m/s}$ determine o vector posição como função do tempo e o deslocamento do corpo em 3,0 s.

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a} dt \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = t^2\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v} dt \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \frac{t^3}{3}\vec{i} - 2t\vec{j}$$

$$\vec{r} = \frac{t^3}{3}\vec{i} - 2t\vec{j} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \vec{r}(t=3) &= 9\vec{i} - 6\vec{j} \\ \vec{r}(t=0) &= 0\vec{i} - 0\vec{j} \end{aligned}$$

$$\Delta\vec{r}(t=3) = 9\vec{i} - 6\vec{j}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a} dt$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v} dt$$

CASOS PARTICULARES

$$\vec{a} = a\vec{i}$$

$$\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$$

$$t_0 = 0 \Rightarrow x = x_0$$



$$\vec{v} = v_0\vec{i} + \vec{i} \int_0^t a dt = (v_0 + at)\vec{i}$$

$$\vec{r} = x_0\vec{i} + \vec{i} \int_0^t v_0 dt + \vec{i} \int_0^t at dt = x_0\vec{i} + \vec{i} (v_0 t + \frac{1}{2} at^2)$$

Movimento unidimensional uniformemente acelerado

$$\vec{a} = a\vec{j}$$

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j}$$

$$t_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = x_0; y = y_0$$



$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = a \end{cases}$$



$$\vec{v} \begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} + at \end{cases}$$



$$\vec{r} \begin{cases} x = x_0 + v_{0x} t \\ y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} at^2 \end{cases}$$

Movimento bidimensional (exemplo movimento do projectil)

T4

Movimento de um Projétil

Um objecto pode mover-se simultaneamente nas direcções dos eixos dos x e dos y ;

Ao movimento bidimensional em que a componente da aceleração segundo o eixo horizontal (em geral, o eixo dos x) é nula e a componente da aceleração segundo o eixo vertical (em geral, o eixo dos y) é constante, dá-se o nome de **movimento de um projétil**.

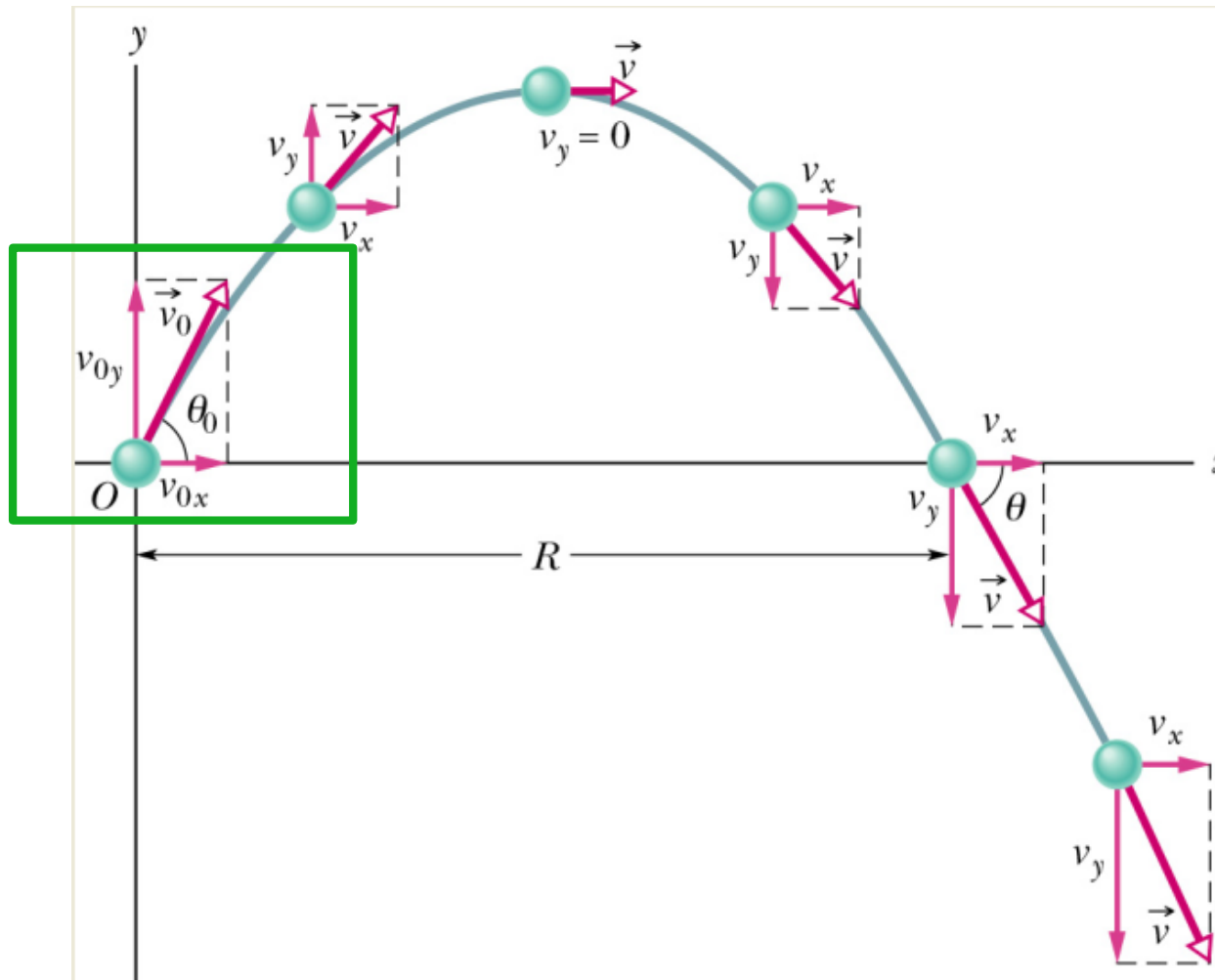
A aceleração de queda livre, $\vec{g}$, é constante durante todo o movimento

Aponta para baixo

Despreza-se a resistência do ar;

Nestas condições, um objecto com movimento de projectil seguirá uma trajectória parabólica.

Diagrama do Movimento de um Projéctil



Obtenção da Equação da Trajectória

Componentes do deslocamento, a partir da origem do referencial, no instante de tempo t

$$\left| \begin{array}{l} v_x = (v_0 \cos \theta) \\ v_y = (v_0 \sin \theta) - gt \end{array} \right.$$

$$\left| \begin{array}{l} x = v_{x0} t = (v_0 \cos \theta) t \\ y = (v_0 \sin \theta) t - \frac{1}{2} gt^2 \end{array} \right.$$

Combinando estas equações :

$$y = (\tan \theta_0) x - \left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} \right) x^2$$

Esta equação é da forma $y = ax - bx^2$ que é a equação de uma parábola

Análise do Movimento de um Projétil

Pode considerar-se este movimento como a sobreposição dos movimentos nas direcções dos eixos dos x e dos y ;

Na direcção do eixo dos x a velocidade é constante porque $a_x = 0$

Na direcção do eixo dos y o movimento é de queda livre $a_y = -g$ (porque o eixo dos y aponta para cima)

A posição num determinado instante de tempo é dada por:

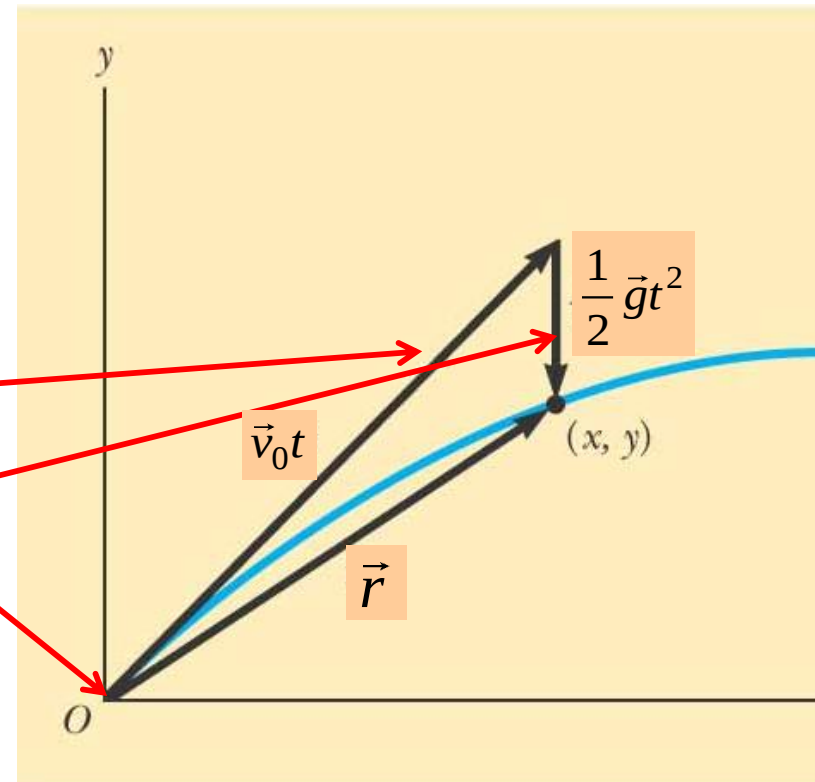
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2$$

Vectores no Movimento de um Projéctil

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2$$

A posição final é o vector soma de:

- posição inicial
- deslocamento resultante da velocidade inicial
- deslocamento resultante da aceleração



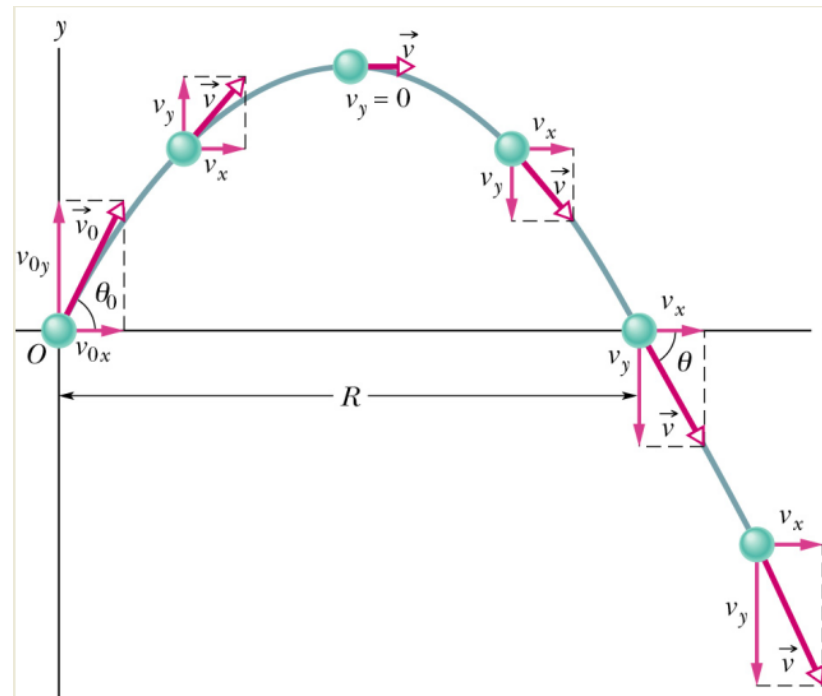
© 2004 Thomson/Brooks Cole

Características do Movimento de um Projétil

A componente da velocidade segundo o eixo dos x é constante em todos os pontos da trajectória;

A componente da velocidade segundo o eixo dos y é nula na altura máxima da trajectória;

A aceleração é a mesma em todos os pontos da trajectória.

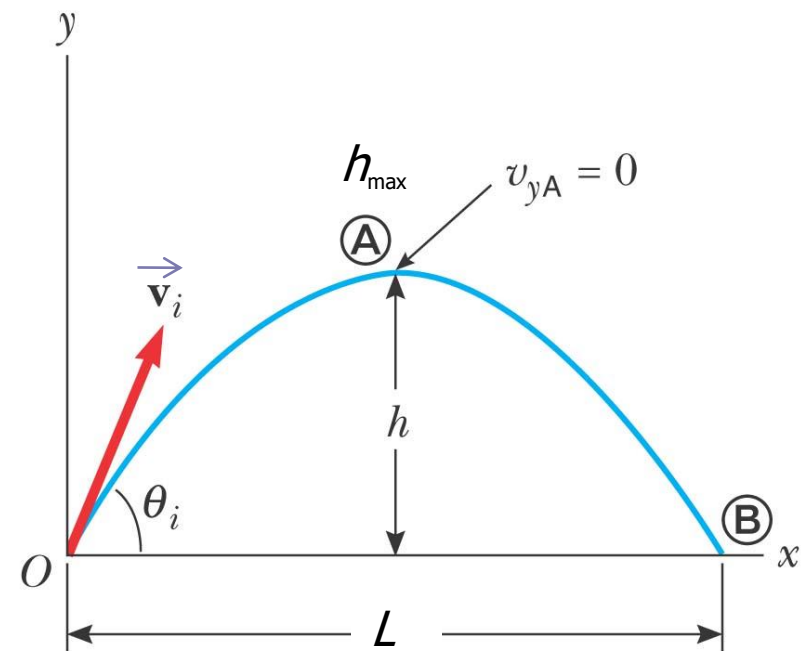


Alcance e Altura Máxima de um Projectil

Na análise do movimento de um projectil há duas grandezas com interesse especial;

O **alcance**, L , é a distância horizontal alcançada pelo projectil;

A **altura máxima** atingida pelo projectil é $h_{\max}$.



© 2004 Thomson/Brooks Cole

Equação da Altura Máxima de um Projectil

A altura máxima do projectil ocorre no instante em que a componente vertical da velocidade é nula. Fazemos $v_y = 0$ na equação

$$v_y = v_{0_y} - gt$$

para obtermos o tempo de subida $t_{\text{sub}} = \frac{v_{0_y}}{g}$

A altura máxima de um projectil é obtida substituindo este instante de tempo na expressão da coordenada vertical

$$y = v_{0_y} t - \frac{1}{2} gt^2$$

conduzindo a
$$h_{\text{max}} = \frac{v_{0_y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}$$

Equação do Alcance de um Projétil

O alcance de um projétil obtém-se fazendo $y_f = 0$ na expressão

$$y_f = v_{0_y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

para obter o tempo de voo, $t_{\text{voo}} = \frac{2v_{0_y}}{g}$

Substituindo $t = t_{\text{voo}}$ na expressão

$$x = v_{0_x} t$$

obtemos o alcance.

$$L = \frac{2v_{0_x} v_{0_y}}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

Lançamentos com Ângulos complementares têm o mesmo alcance e o alcance é máximo para o ângulo de 45°

Alcance de um Projétil

O valor máximo do alcance ocorre para $\theta_i = 45^\circ$;

Ângulos complementares dão origem ao mesmo valor do alcance;

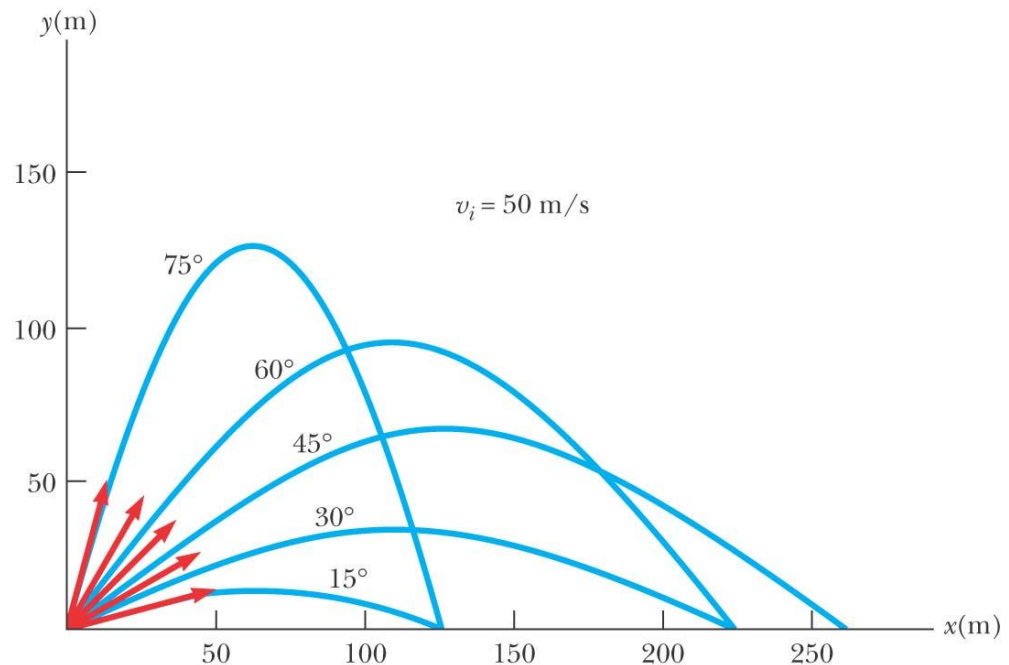
A altura máxima é diferente para os dois valores do ângulo da velocidade inicial;

Os tempos de voo serão diferentes para os dois ângulos;

$$L = \frac{2v_{0x} v_{0y}}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

$$h_{\max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta_0}{2g}$$

$$t_{\text{voo}} = \frac{2v_{0y}}{g}$$



© 2004 Thomson/Brooks Cole

Problema

As personagens principais do filme “Speed”, que em Portugal teve o nome “Terror na Auto-estrada”, viajam num autocarro em que existe uma bomba, que rebentará se a velocidade do autocarro se tornar inferior a 80 km/h.

O autocarro viaja na direcção de um viaduto, cujo tabuleiro está interrompido numa extensão de 15 m.

Os ocupantes decidem fazer o autocarro saltar de um lado para o outro do viaduto, “voando” através do espaço. A rampa que conduz ao viaduto tem uma inclinação de 5° em relação à horizontal e o autocarro viajava a 110 km/h quando entrou no viaduto.

No filme, o autocarro salta com sucesso.



O problema que nos propomos é o seguinte:

A cena apresentada no filme é realista, isto é, naquelas condições um autocarro real conseguiria saltar ou é tudo ficção de cinema?

Dados:

Módulo da velocidade inicial: $|\vec{v}_0| = 110 \text{ km/h}$

Ângulo que a velocidade inicial faz com a horizontal: $\theta_0 = 5^\circ$

Distância horizontal a transpor: $\ell = 15 \text{ m}$

Pretende-se determinar se, nestas condições a trajectória de voo do autocarro irá passar no outro lado do viaduto ou na zona em que o tabuleiro está interrompido.

Modelo utilizado:

- Vamos considerar o autocarro como pontual;
- Vamos desprezar a resistência do ar.

Vamos escolher o sistema de referência

O eixo dos x é horizontal

O eixo dos y é vertical e aponta para cima

Colocamos a origem no ponto em que o autocarro deixa o tabuleiro

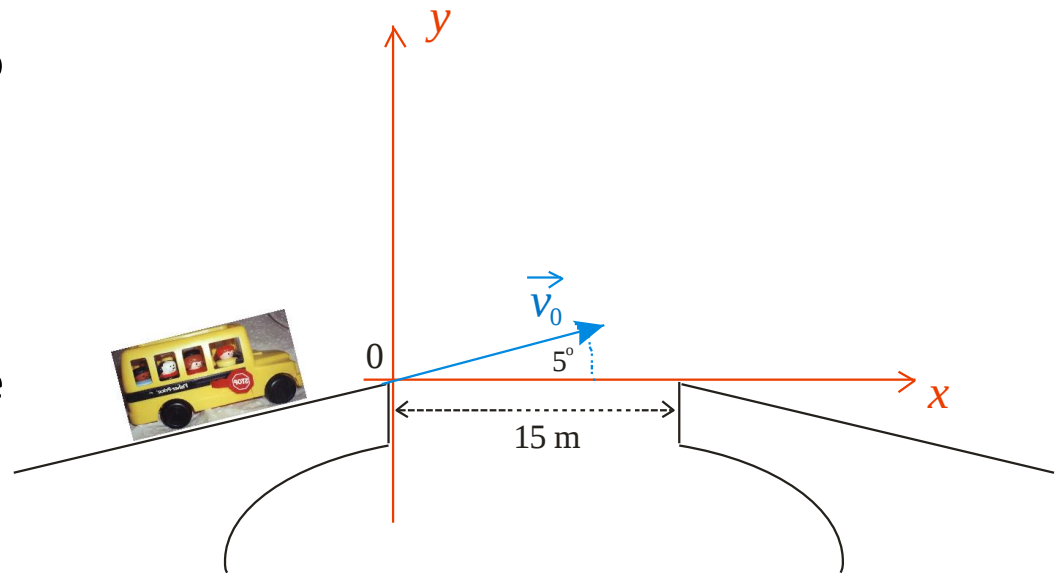
Fazemos $t = 0$ no instante em que o autocarro deixa o tabuleiro

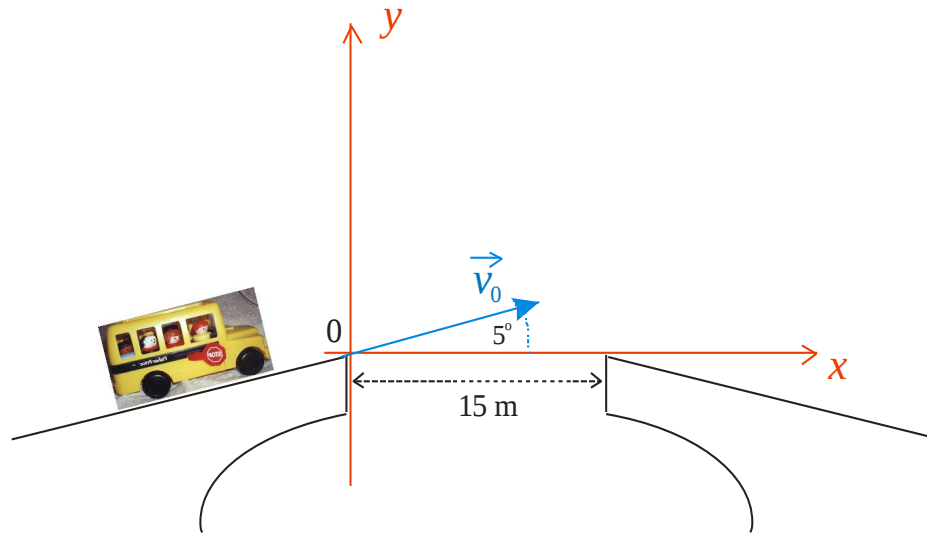
Componentes da aceleração
neste sistema de referência

$$a_y = -g \text{ e } a_x = 0$$

Componentes da velocidade
inicial

$$v_{x0} = v_0 \cos \theta_0 \text{ e } v_{y0} = v_0 \sin \theta_0$$





$$v_0 = 110 \text{ km/h} = 30,6 \text{ m/s}$$

$$a_y = -g$$

$$x_0 = y_0 = 0$$

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = a \end{cases} \longrightarrow \vec{v} \begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} + at \end{cases} \longrightarrow \vec{r} \begin{cases} x = x_0 + v_{0x}t \\ y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

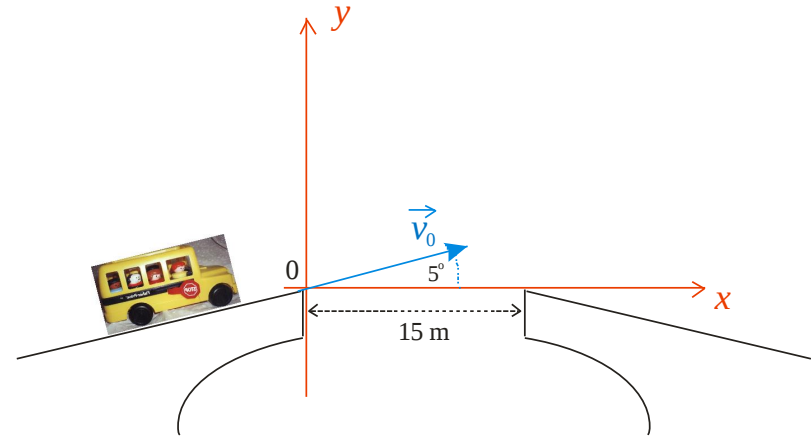
$$\vec{a} \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases} \longrightarrow \vec{v} \begin{cases} v_x = v_0 \cos \theta \\ v_y = v_0 \sin \theta - gt \end{cases} \longrightarrow \vec{r} \begin{cases} x = v_0 \cos \theta t \\ y = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Problema

O que pretendemos saber é se o alcance é superior ou inferior a 15 m.

Substituimos os dados do problema na expressão do alcance

Obtemos:



$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} = \frac{(30.6 \text{ m/s})^2 \sin 10^\circ}{9.8 \text{ m/s}^2} = 16.5 \text{ m}$$

Efectivamente, o autocarro transpõe o obstáculo!!!

- Movimento circular uniforme
- Força Centrípeta
- O Movimento em Referenciais Acelerados
- Força Fictícia

Movimento Circular Uniforme

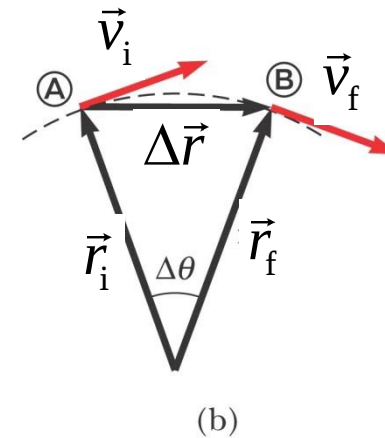
Existe ***movimento circular uniforme*** quando um objecto se move numa trajectória circular com velocidade de módulo constante;

A aceleração *não é* nula porque a *direcção* do movimento está constantemente a variar;

O vetor velocidade é sempre tangente à trajectória do objecto.

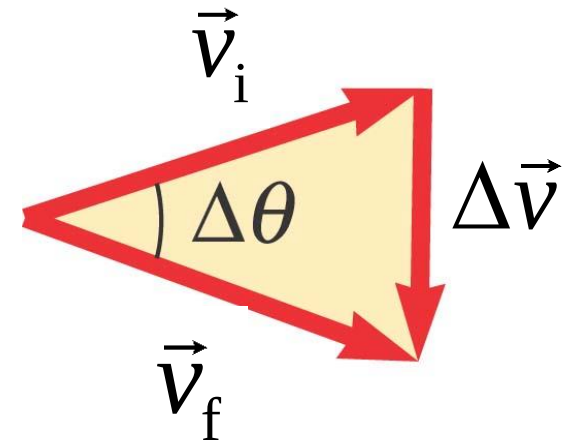
Variação da Velocidade no Movimento Circular Uniforme

1. O vector velocidade varia apenas em direcção



O diagrama vectorial apresenta

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_f - \vec{v}_i$$



A Aceleração Centrípeta

No movimento circular uniforme a aceleração é **perpendicular** à trajectória em cada ponto;

A aceleração aponta sempre para o centro da trajectória circular;

Daí a designação de ***aceleração centrípeta***.

A Aceleração Centrípeta

O módulo do vetor *aceleração centrípeta* é dado por:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

A direcção do vetor aceleração centrípeta varia continuamente, de forma a estar sempre a apontar para o centro da trajectória.

A Aceleração Centrípeta *

No ponto p a velocidade é:

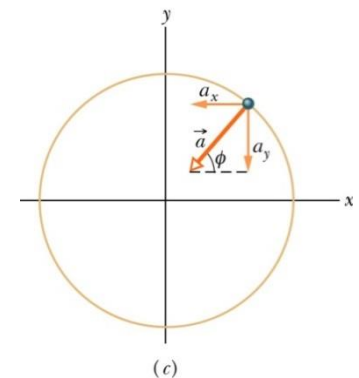
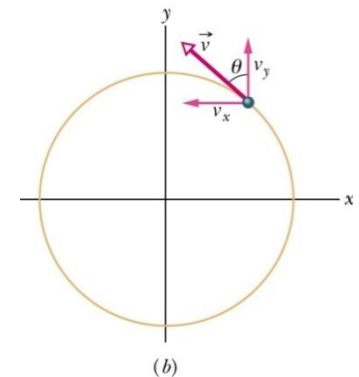
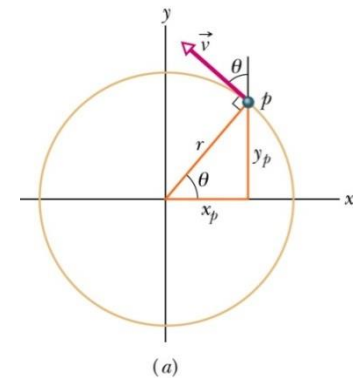
$$\begin{aligned}\vec{v} &= v_x \vec{i} + v_y \vec{j} = (-v \sin \theta) \vec{i} + (v \cos \theta) \vec{j} \\ &= \left(-\frac{vy_p}{r} \right) \vec{i} + \left(\frac{vx_p}{r} \right) \vec{j}\end{aligned}$$

Diferenciando esta equação, em ordem ao tempo, com r e v constantes, obtemos:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(-\frac{v}{r} \frac{dy_p}{dt} \right) \vec{i} + \left(\frac{v}{r} \frac{dx_p}{dt} \right) \vec{j}$$

Mas,

$$\frac{dy_p}{dt} = v_y = v \cos \theta \quad \text{e} \quad \frac{dx_p}{dt} = v_x = -v \sin \theta$$



A Aceleração Centrípeta

*

Então

$$\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r} \cos \theta \right) \vec{i} + \left(-\frac{v^2}{r} \sin \theta \right) \vec{j}$$

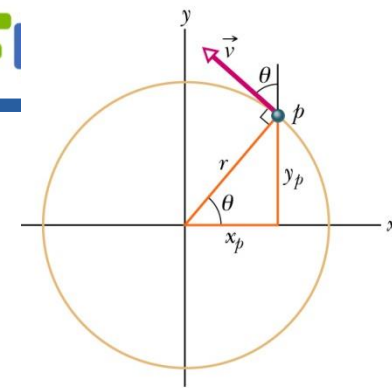
de onde

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r} \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{v^2}{r}$$

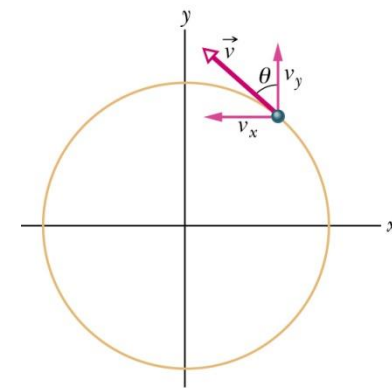
e

$$\tan \phi = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-(v^2/r) \sin \theta}{-(v^2/r) \cos \theta} = \tan \theta$$

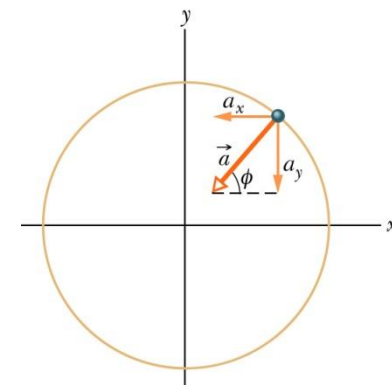
ou $\phi = \theta$ e $\vec{a}$ tem a direcção de $\vec{r}$



(a)



(b)



(c)

A Aceleração Tangencial

No movimento circular, em geral, o módulo da velocidade pode também variar;

Neste caso, existe ***aceleração tangencial*** diferente de zero.

A Aceleração no Movimento Circular (caso geral)

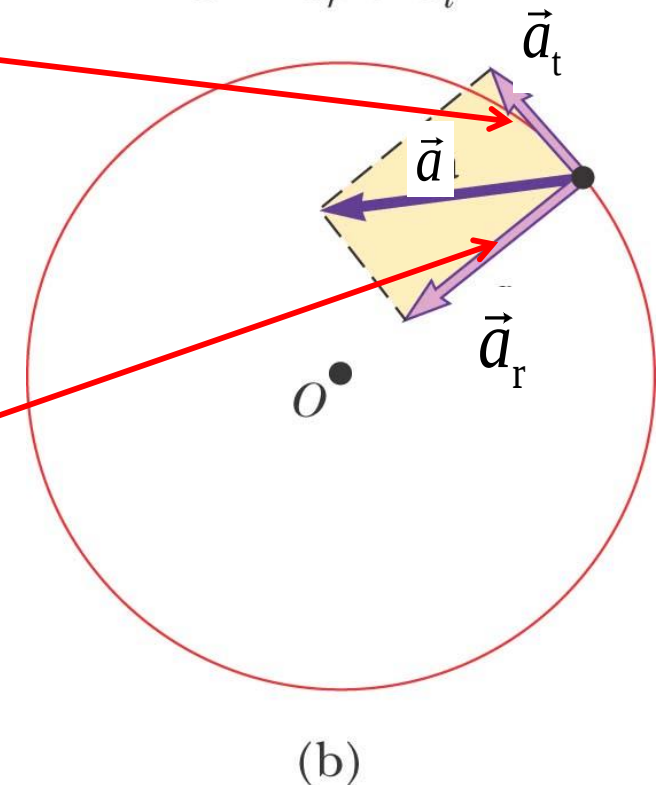
A componente tangencial do vetor aceleração dá origem à variação do módulo do vetor velocidade da partícula

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$$

A componente radial (ou centrípeta) do vetor aceleração dá origem à variação da direção do vetor velocidade

$$a_r = -a_c = -\frac{v^2}{r}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t$$



© 2004 Thomson/Brooks Cole

A Aceleração no Movimento Circular (caso geral)

Componente tangencial :

$$a_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt}$$

Componente radial:

$$a_r = -a_C = -\frac{v^2}{r}$$

Módulo da aceleração :

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2}$$

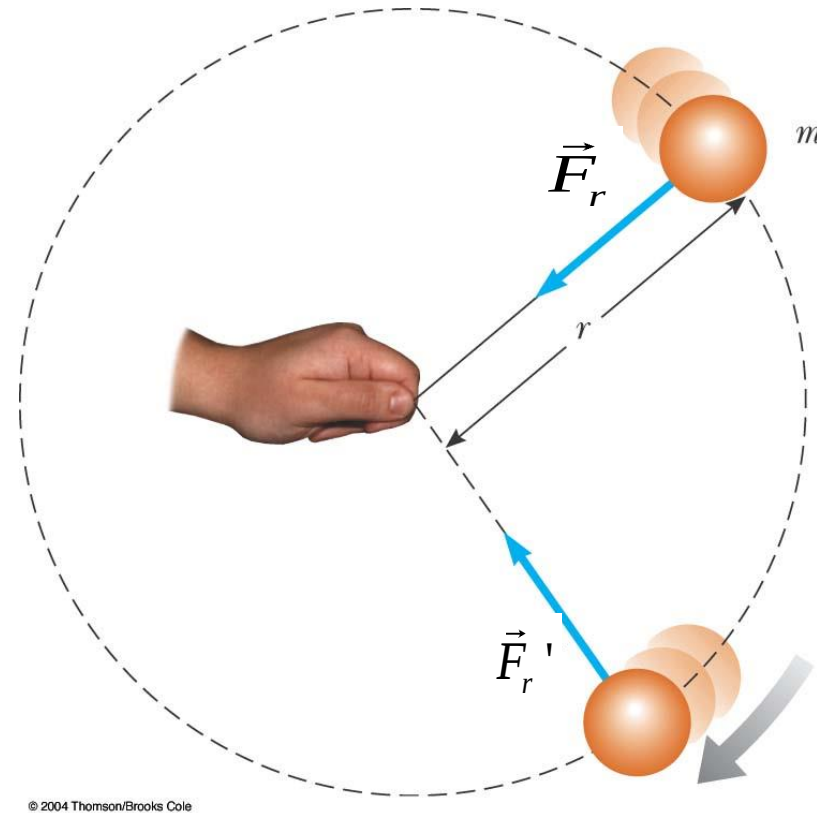
Movimento Circular Uniforme

Uma força, $\vec{F}_r$, aponta para o centro da trajetória circular;

Esta força está associada à aceleração *centrípeta*, $\vec{a}_c$

Aplicando a 2.ª Lei de Newton na direção radial, obtém-se:

$$\sum F = ma_c = m \frac{v^2}{r}$$

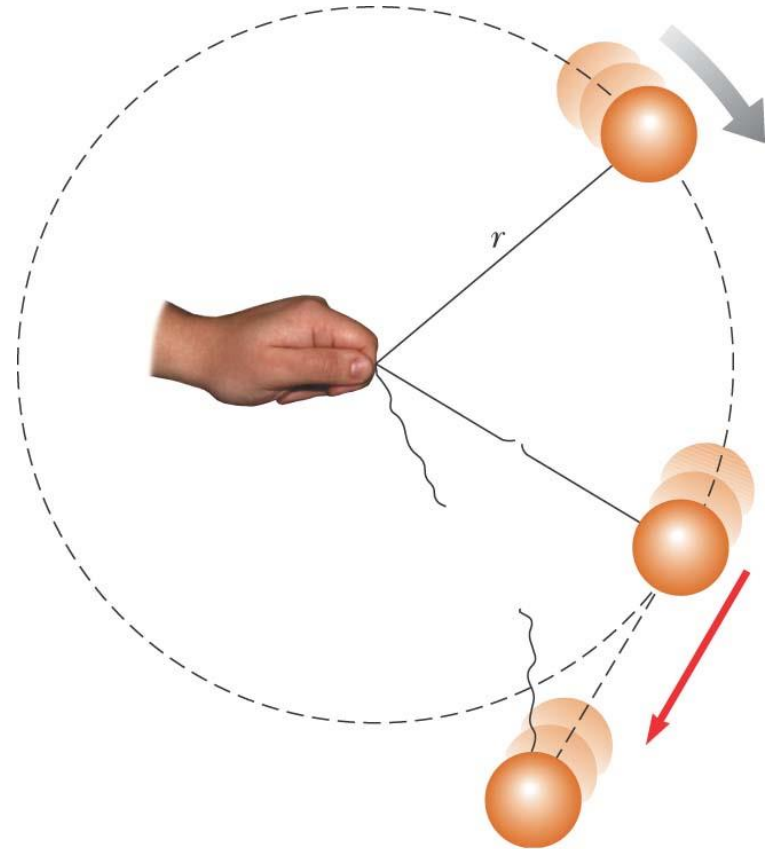


Movimento Circular Uniforme

Uma força que dá origem a uma aceleração centrípeta tem a direção radial e aponta para o centro da circunferência;

Provoca uma variação da direção do vetor velocidade;

Se essa força desaparecer, o corpo passará a mover-se numa trajetória retilínea tangente à circunferência.



© 2004 Thomson/Brooks Cole

Movimento Circular com Trajectória Horizontal

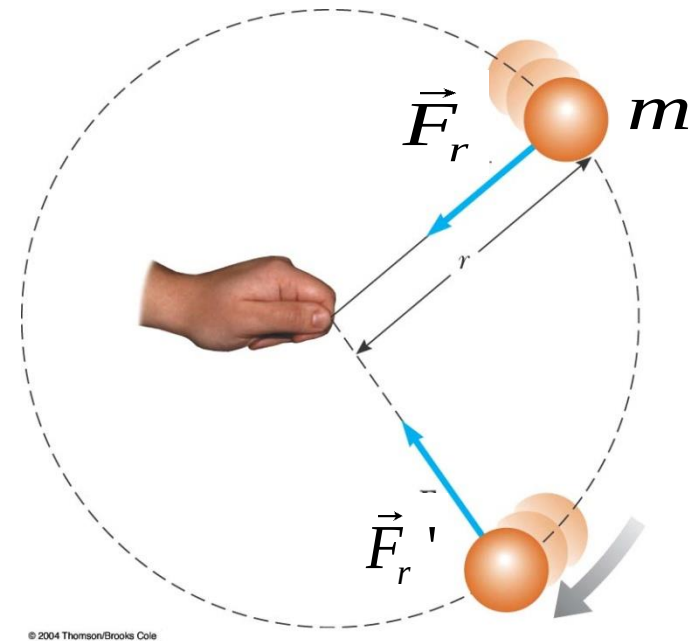
O módulo da velocidade do corpo depende da massa do corpo e da tensão da corda;

A força centrípeta é a tensão da corda:

$$T = m \frac{v^2}{r}$$

e

$$v = \sqrt{\frac{Tr}{m}}$$



O Período do Movimento Circular Uniforme

O **período**, T , é o intervalo de tempo necessário para uma revolução completa;

O módulo da velocidade da partícula é o perímetro da trajetória dividido pelo período;

O período é, portanto,
$$T \equiv \frac{2\pi r}{v}$$

O Pêndulo Cónico

O corpo está em equilíbrio na direção vertical e executa movimento circular uniforme na direção horizontal;

v é independente de m ;

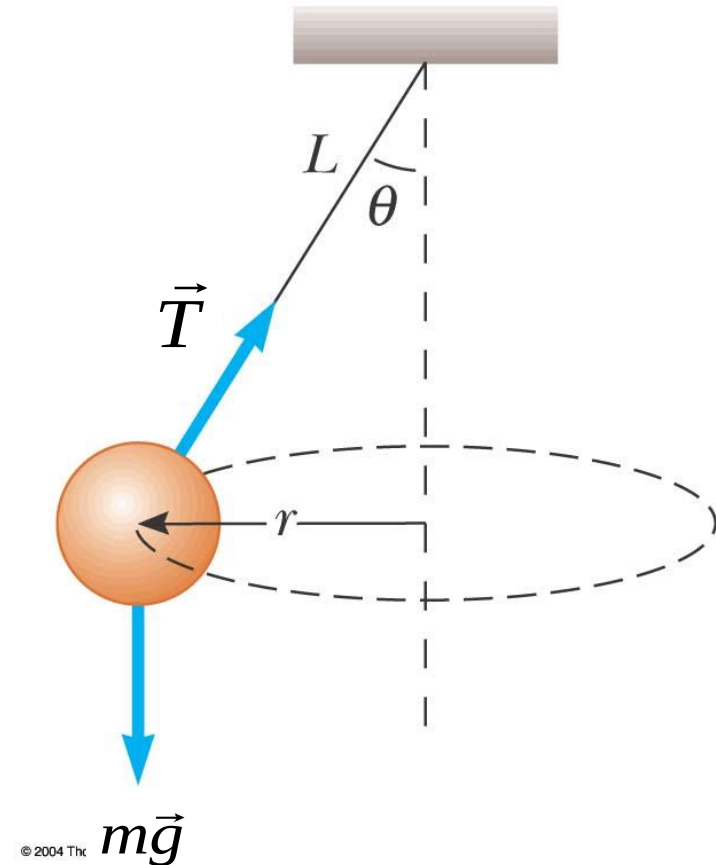
$$T \cos \theta = mg$$

$$T \sin \theta = mv^2/r$$

$$\sin \theta = r/L$$

$$r = L \sin \theta$$

$$v = \sqrt{Lg \sin \theta \tan \theta}$$



Força Centrípeta

A força que dá origem à aceleração centrípeta é denominada ***força centrípeta***;

Não é um novo tipo de força, denomina apenas o *efeito* que uma determinada força tem;

É uma força que actua de forma a fazer variar apenas a direcção da velocidade, dando origem a um movimento circular.

O Movimento em Referenciais Acelerados

Num referencial acelerado (portanto não inercial) surge uma ***força fictícia***;

Uma força fictícia parece actuar num corpo como uma força real, mas não é possível identificar um segundo corpo que origine esta força fictícia.

A Força “Centrífuga”

No referencial da passageira (b), uma força parece empurrá-la para a porta;

Do ponto de vista do referencial ligado à Terra, o carro aplica uma força à passageira apontando para a esquerda;

À força dirigida para fora dá-se o nome de força ***centrífuga***;

É uma força fictícia que resulta da aceleração associada à variação da direcção da velocidade do carro.



(a)



(b)



(c)

© 2004 Thomson/Brooks Cole

O “Loop”

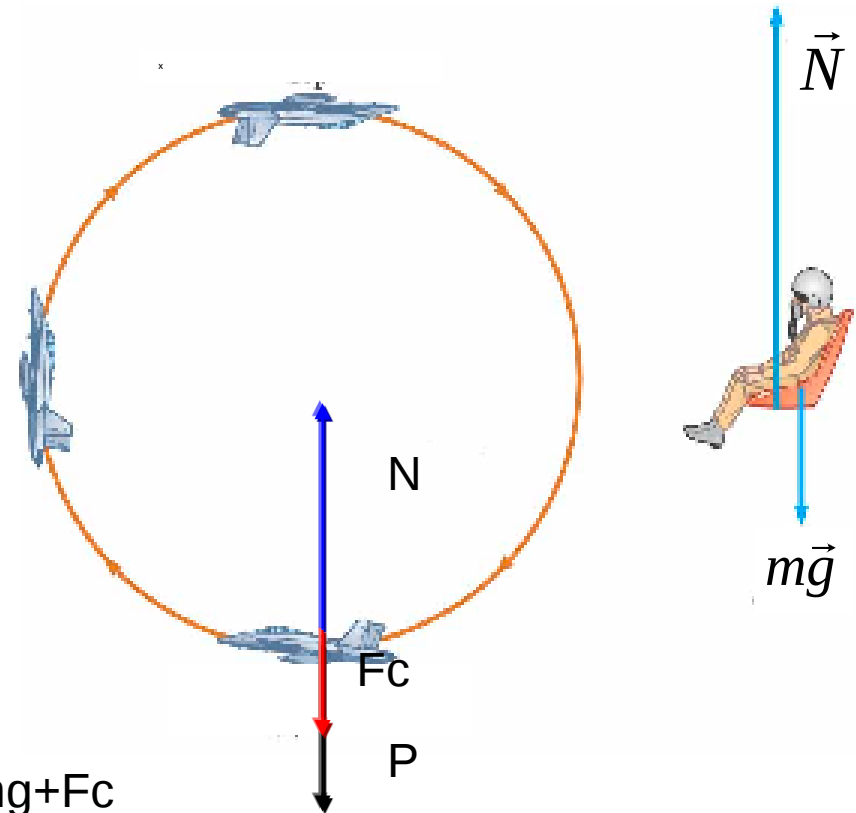
É um exemplo de uma trajectória circular vertical;
(carrinho que percorre uma calha)

No ponto mais baixo da trajectória, o módulo da força dirigida para cima que exercida no corpo tem de ser superior ao módulo do peso deste:

$$N = mg \left(1 + \frac{v^2}{rg} \right)$$

$$N = mg + F_c$$

$$N = mg + mv^2/R$$



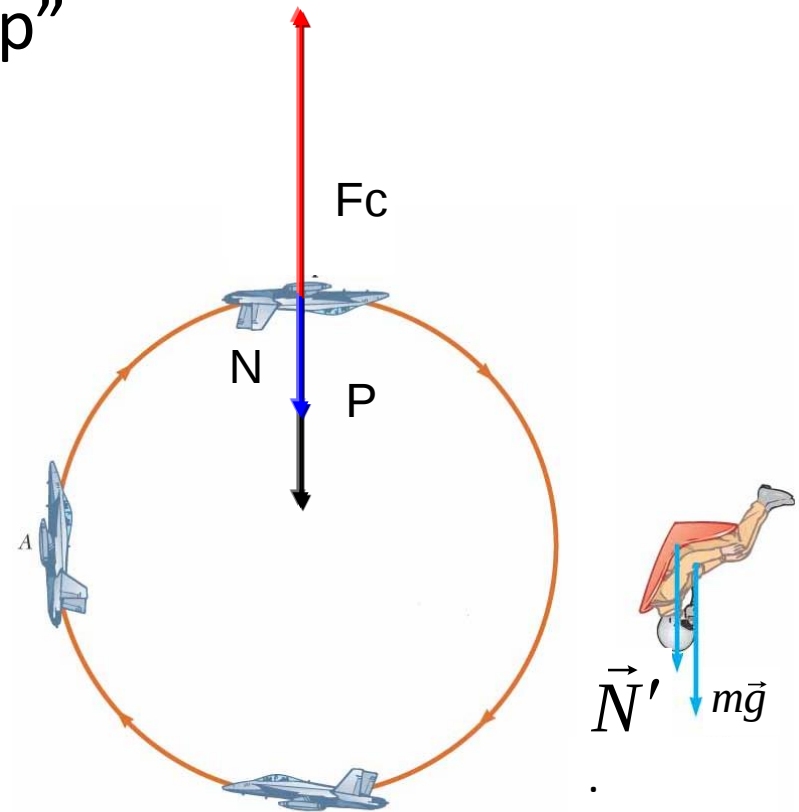
O “Loop”

No ponto mais alto da trajectória circular, o módulo da força exercida no corpo pode ser inferior ao módulo do peso do corpo:

$$F_c = mg + N$$

$$F_c = mv^2/r$$

$$N' = mg \left(\frac{v^2}{rg} - 1 \right)$$



© 2004 Thomson/Brooks Cole

Forças Fictícias, exemplos

Ainda que as forças fictícias não sejam forças reais, podem ter efeitos reais;

Exemplos:

Os objectos dentro do carro escorregam;

Sentimo-nos empurrados para fora de uma plataforma em rotação. A água de um balde não cai quando em movimento de rotação



A5

Forças de Atrito

Quando um corpo está em movimento assente numa superfície ou num meio viscoso, surge uma força de resistência ao movimento;

Esta força resulta das interacções do corpo com o que o rodeia;

A esta força dá-se o nome de *força de atrito*.

Forças de Atrito entre duas superfícies em contacto

O módulo da força de atrito é proporcional ao módulo da força normal:

$$f_e \leq \mu_e n \quad \text{e} \quad f_c = \mu_c n$$

Estas equações não são vectoriais, porque relacionam apenas os módulos das forças.

A força de **atrito estático**, f_e , que ocorre *quando não há movimento relativo* do corpo em relação ao meio que o rodeia é, em geral, maior, em módulo, do que a **força de atrito cinético**, f_c , que ocorre *quando há movimento relativo*;

O coeficiente de atrito, μ , depende das superfícies em contacto.

A força de atrito tem a direcção do movimento e o sentido oposto;

É paralela às superfícies de contacto;

Os coeficientes de atrito são muito aproximadamente independentes das áreas de contacto.

Atrito Estático

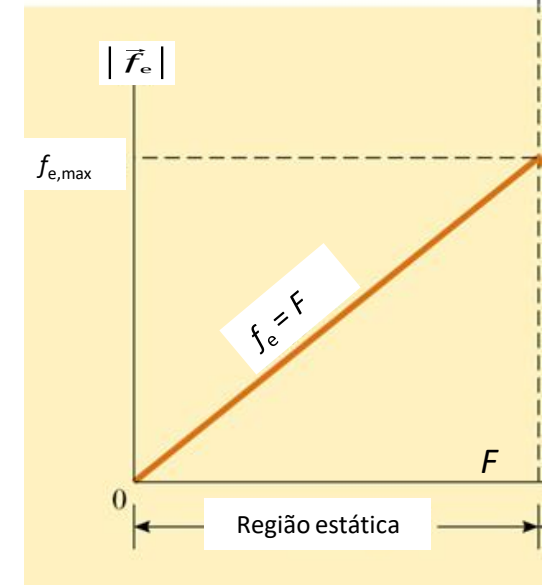
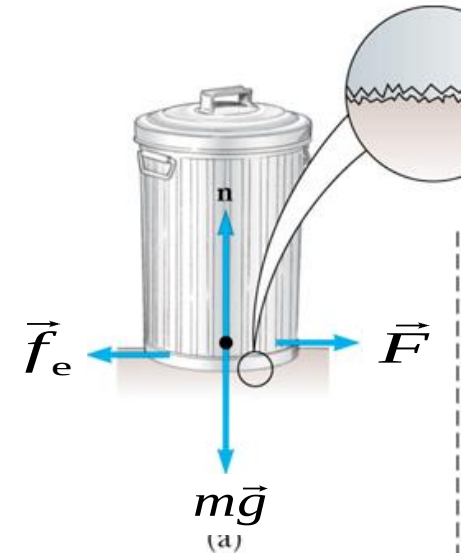
A força de atrito estático actua de forma a impedir que ocorra o movimento;

Se o módulo de $\vec{F}$ diminui, o módulo de $\vec{f}_e$ diminui;

Se o módulo de $\vec{F}$ aumenta, o módulo de $\vec{f}_e$ aumenta, até atingir um valor máximo:

$$f_{e \max} = \mu_e n$$

De uma forma geral $f_e \leq \mu_e n$. A igualdade ocorre quando o movimento relativo está na iminência de iniciar-se.

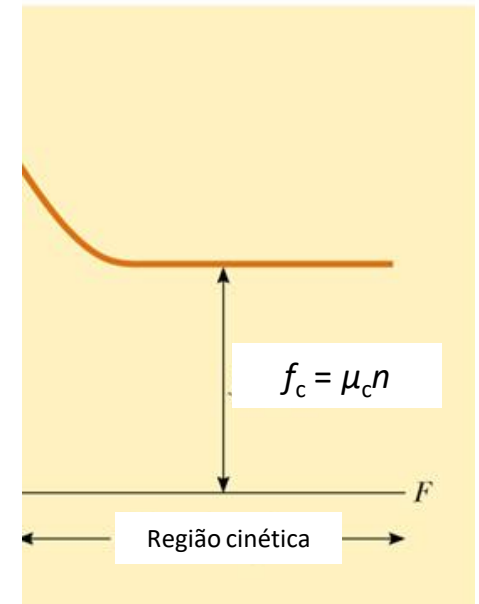
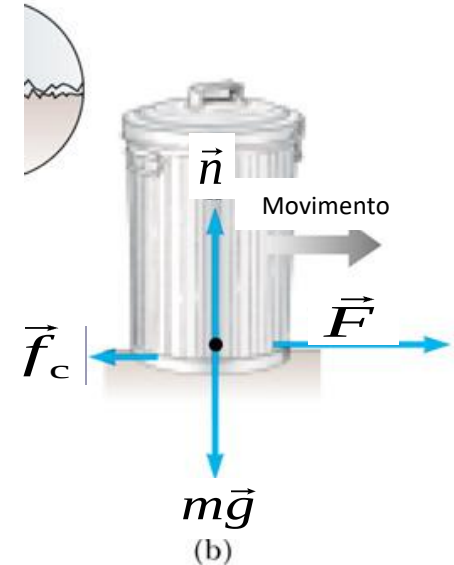


Atrito cinético

A força de atrito cinético actua quando o corpo está em movimento;

Ainda que μ_c possa, em geral, variar com o módulo da velocidade, vamos desprezar essas variações e considerar:

$$f_c = \mu_c n$$



Alguns coeficientes de Atrito

Coeficientes de atrito		
	μ_e	μ_c
Aço com aço	0.74	0.57
Alumínio com aço	0.61	0.47
Cobre com aço	0.53	0.36
Borracha com cimento	1.0	0.8
Madeira com madeira	0.25-0.5	0.2
Vidro com vidro	0.94	0.4
Madeira encerada com neve húmida	0.14	0.1
Madeira encerada com neve seca	–	0.04
Metal com metal (lubrificado)	0.15	0.06
Gelo com gelo	0.1	0.03
Teflon com teflon	0.04	0.04
Juntas sinoviais no corpo humano	0.01	0.003

Todos os valores são aproximados.

Em alguns casos, o coeficiente de atrito pode ser superior a 1.0

O Atrito em Problemas de Dinâmica

O atrito é uma força, conseqüentemente é incluído no somatório das forças, $\sum \vec{F}$, que surge na aplicação das leis de Newton;

As regras do atrito permitem-nos identificar a direcção, sentido e módulo das forças de atrito.

Atrito – Exemplo 1

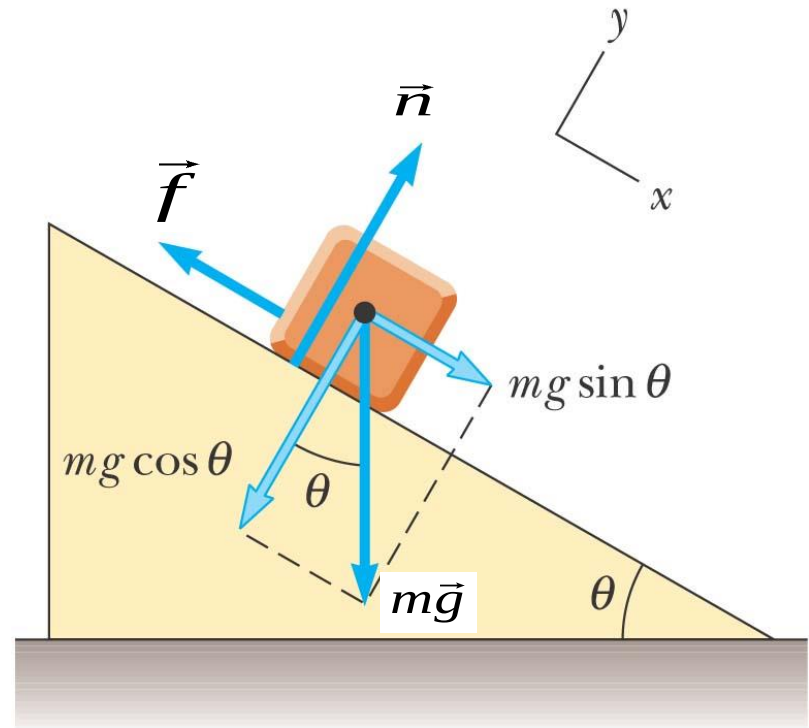
O bloco está a escorregar ao longo do plano inclinado, consequentemente a direcção da força de atrito é paralela ao plano e o sentido é para cima;

Esta montagem pode ser utilizada para determinar experimentalmente o coeficiente de atrito:

$$\mu = \tan \theta$$

Para obter μ_e , utiliza-se o ângulo em que o escorregamento se inicia;

Para obter μ_c , utiliza-se o ângulo segundo o qual o bloco escorrega com velocidade constante.



© 2004 Thomson/Brooks Cole

Atrito – Exemplo 1

1) Desenhamos o diagrama das forças aplicadas ao bloco;

2) Aplicamos a 2.ª lei de Newton ao bloco:

$$\vec{f}_c + \vec{n} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

3) Escolhemos o sistema de eixos (por exemplo, o da figura);

4) Escrevemos as equações escalares correspondentes às componentes, no sistema de eixos escolhido, dos vectores que surgem na equação anterior:

$$x: -f_c + mg \sin \theta = ma$$

$$y: n - mg \cos \theta = 0$$

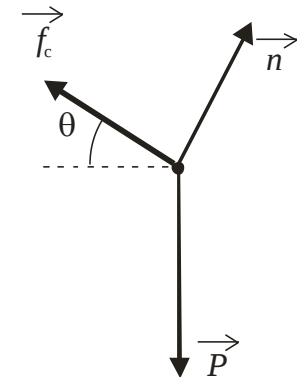
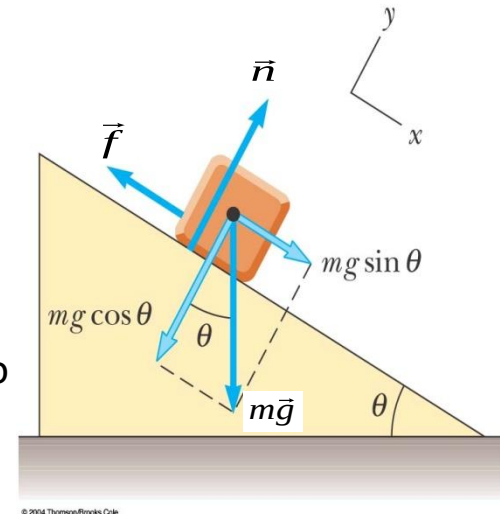
5) Acrescentamos a equação que relaciona o módulo da força de atrito com o módulo da força (normal ao plano inclinado):

$$f_c = \mu_c n$$

6) Resolvemos o sistema de três equações a três incógnitas para obter o módulo da aceleração:

$$\begin{aligned} a &= -\frac{f_c}{m} + g \sin \theta = -\mu_c g \cos \theta + g \sin \theta = \\ &= g(\sin \theta - \mu_c \cos \theta) \end{aligned}$$

7) Como a direcção e sentido da aceleração são os do eixo dos x , a aceleração do bloco é



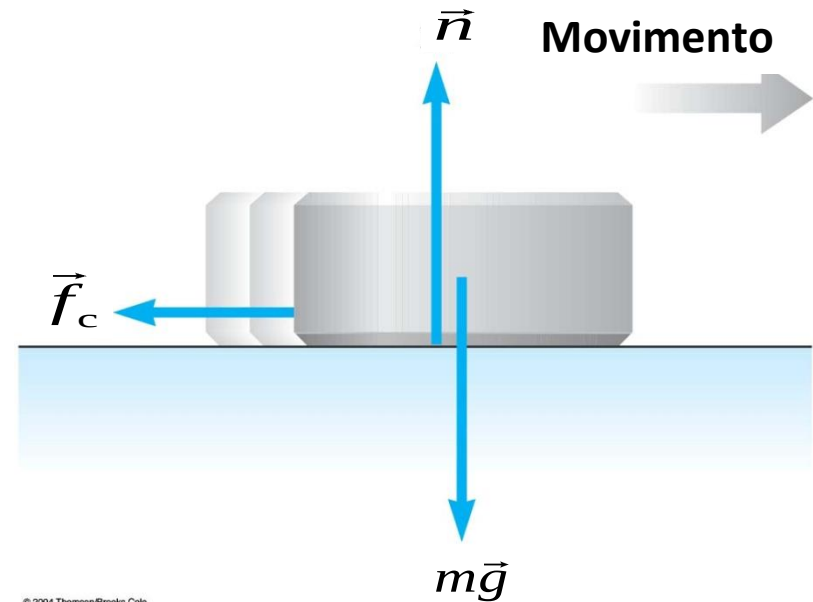
$$\vec{a} = g(\sin \theta - \mu_c \cos \theta) \vec{i}$$

Atrito – Exemplo 2

Desenhamos o diagrama das forças aplicadas ao corpo, incluindo a força de atrito cinético:

O sentido é oposto ao do movimento;
A direcção é paralela às superfícies em contacto.

Resolvemos o problema da forma habitual para a aplicação das leis de Newton.

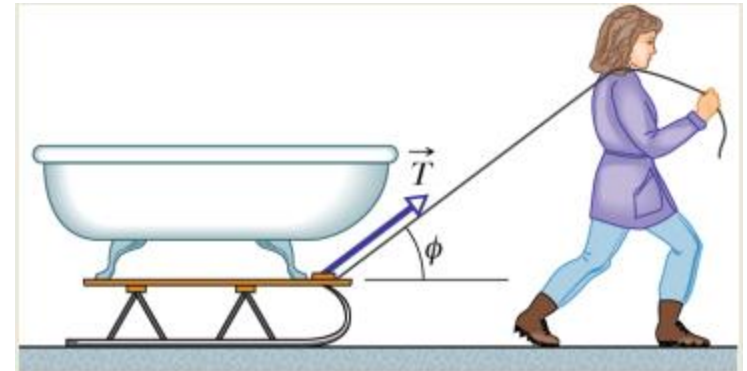


Atrito – Exemplo 3

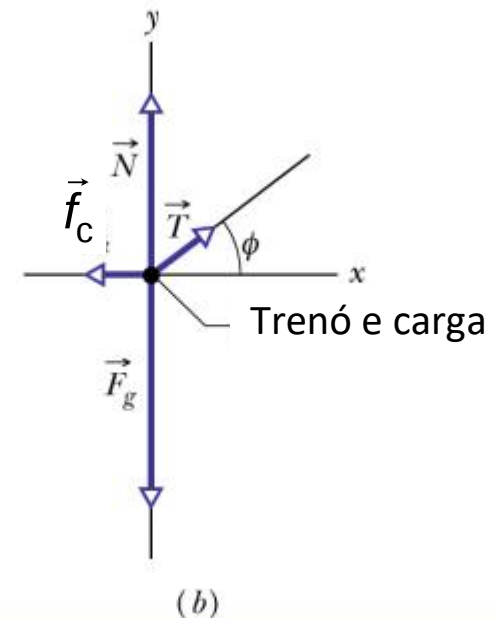
A força de atrito opõe-se ao movimento;

Desenhamos o diagrama de forças;

Aplicamos as leis de Newton como em qualquer outro problema.

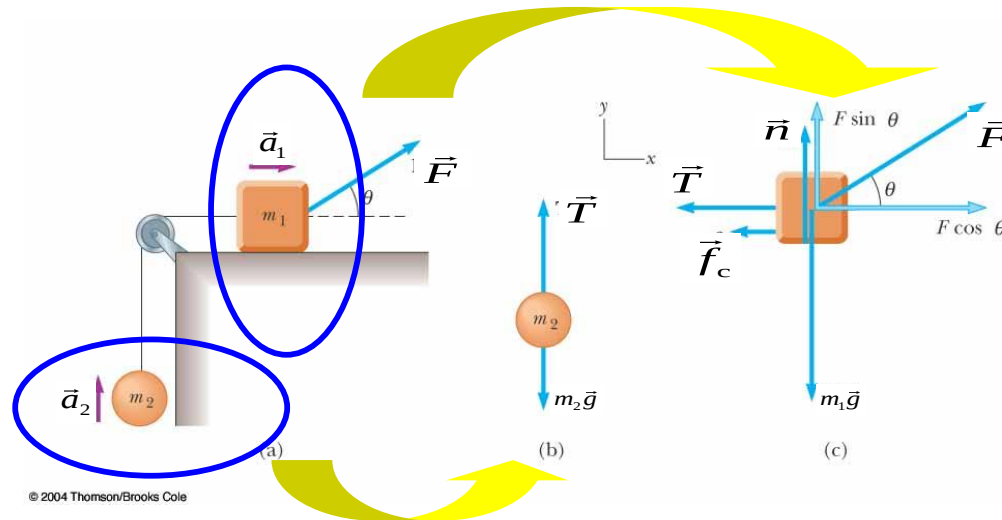


(a)



(b)

Atrito – Exemplo 4



A força de atrito actua apenas no corpo que está em contacto com outra superfície;

Isolamos os corpos;

Desenhamos os diagramas de forças;

Aplicamos as leis de Newton como em qualquer outro problema com muitos corpos.

Movimento com Forças Resistivas



O movimento pode ocorrer num determinado meio, que pode ser um líquido ou um gás;

O meio exerce uma *força resistiva*, $\vec{R}$, num corpo que se mova através dessa meio;

O módulo de $\vec{R}$ depende do meio;

O sentido de $\vec{R}$ é oposto ao do movimento do objecto em relação ao meio;

O módulo da força de resistência $\vec{R}$ em geral aumenta quando o módulo da velocidade aumenta.

Movimento com Forças Resistivas



O módulo de $\vec{R}$ pode depender do módulo da velocidade de várias maneiras.

Duas delas são:

$|\vec{R}|$ é proporcional a v

É uma boa aproximação quando o módulo da velocidade é pequena e os corpos são de pequeno volume.

$|\vec{R}|$ é proporcional a v^2

É uma boa aproximação para corpos de grande volume, e o módulo da velocidade é elevado, de modo que o ar se torna turbulento (forma vórtices) por detrás do corpo.

Movimento com Forças Resistivas



O módulo de $\vec{R}$ pode depender do módulo da velocidade de várias maneiras.

Duas delas são:

$|\vec{R}|$ é proporcional a v

É uma boa aproximação quando o módulo da velocidade é pequena e os corpos são de pequeno volume.

$|\vec{R}|$ é proporcional a v^2

É uma boa aproximação para corpos de grande volume, e o módulo da velocidade é elevado, de modo que o ar se torna turbulento (forma vórtices) por detrás do corpo.

R proporcional a v^2

*

No caso de objectos que se movem com velocidades de módulo elevado através do ar, o módulo da força resistiva é proporcional ao quadrado do módulo da velocidade:

$$R = \frac{1}{2} C \rho A v^2$$

C é uma grandeza empírica sem dimensões, denominada *coeficiente de resistência*;

ρ é a massa volúmica (densidade) do ar;

A é a área da secção eficaz do corpo;

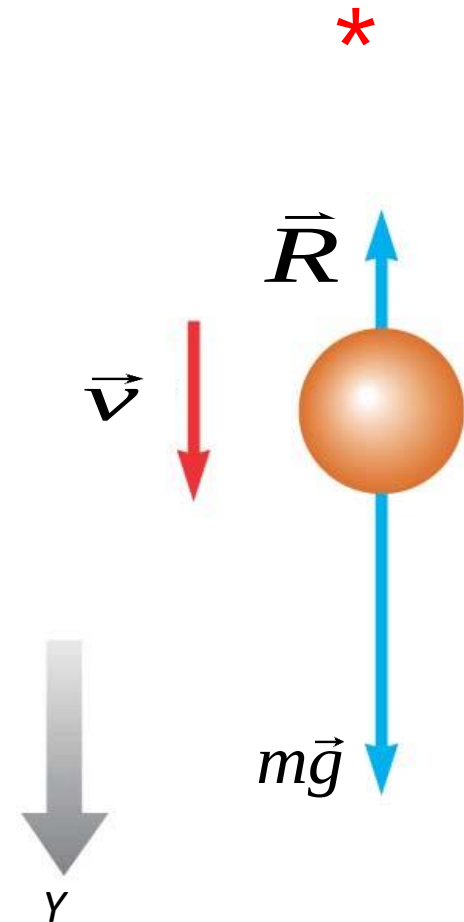
v é o módulo da velocidade do corpo.

R proporcional a v^2 , exemplo

Análise do movimento de um corpo que cai no ar, tendo em conta a resistência do ar:

$$\sum F = mg - \frac{1}{2} C \rho A v^2 = ma$$

$$a = g - \left(\frac{C \rho A}{2m} \right) v^2$$

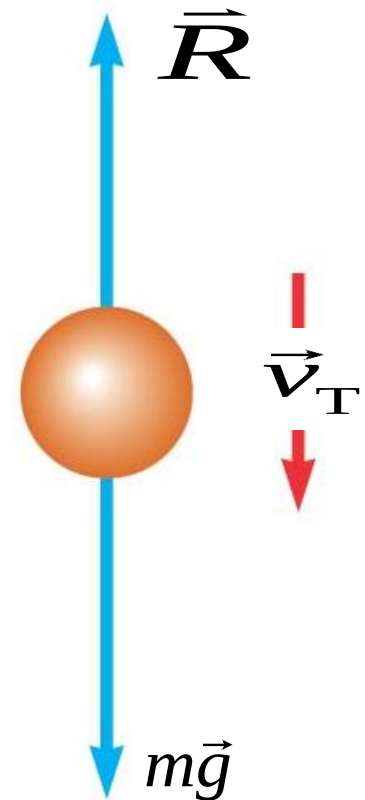


R proporcional a v^2 - Velocidade Terminal

A velocidade terminal é a velocidade do corpo quando a aceleração se anula;

A resolução da equação conduz a:

$$v_T = \sqrt{\frac{2mg}{C\rho A}}$$



Movimento de um pára-quedista

O movimento de um pára-quedista

O movimento de descida de um pára-quedista, desde o instante em que é lançado até atingir o solo, é condicionado pela **resistência do ar**:

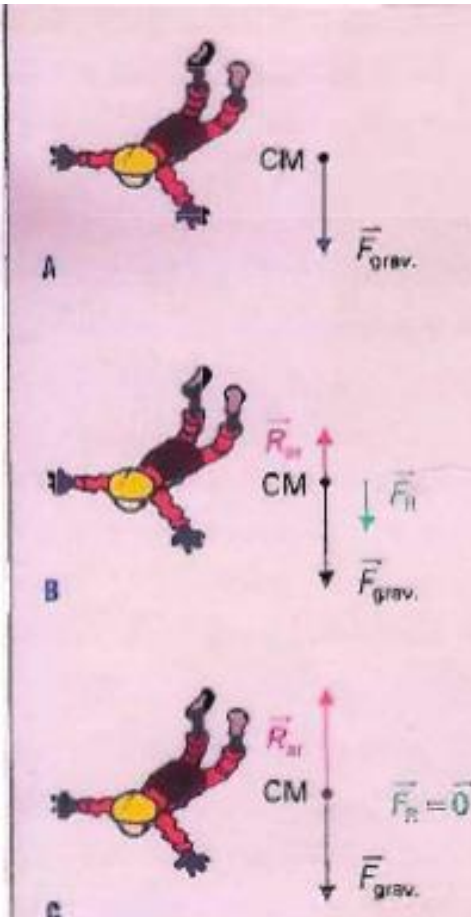
- Inicialmente, o pára-quedista está sujeito, apenas, à acção da **força gravítica** ($\vec{F}_{\text{grav.}}$) que a Terra exerce sobre o sistema (considerado, neste caso, partícula material).

Por isso, desce em **queda livre** e o seu movimento é inicialmente **rectilíneo e uniformemente acelerado** (A).

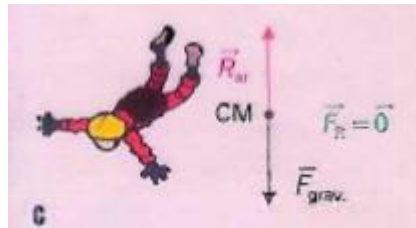
- Após um certo intervalo de tempo, o ar oferece resistência ao movimento do pára-quedista.

O seu movimento depende da **resultante** das **forças** nele exercidas: **força gravítica** ($\vec{F}_{\text{grav.}}$) e **resistência do ar** ($\vec{R}_{\text{ar}}$).

Como a **intensidade da força gravítica** (no sistema pára-quedas fechado/pára-quedista) é **superior à intensidade da resistência do ar**, a qual vai aumentando, o pára-quedista move-se com uma **aceleração variável** (B).



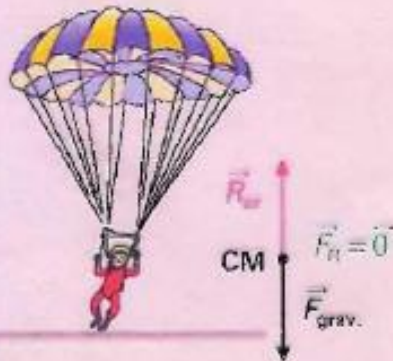
Movimento de um pára-quedista



C



D



E

[FIG. 39]

- No entanto, a partir de um certo instante, a **resultante das forças** ($\vec{F}_R$) que actua no sistema **anula-se**: as duas forças têm a **mesma direcção**, a **mesma intensidade** e **sentidos opostos** (C). O pára-quedista continua a mover-se em direcção ao solo, agora com **movimento uniforme** e, praticamente, **rectilíneo**.

Move-se com **velocidade constante** que se chama **velocidade terminal** (o seu valor é cerca de 56 m s^{-1}). Isto é, **não tem aceleração**.

- No instante em que o pára-quedista abre o pára-quedas, o ar oferece uma grande resistência ao seu movimento. Esta força resistiva exerce-se em toda a superfície interior do pára-quedas.

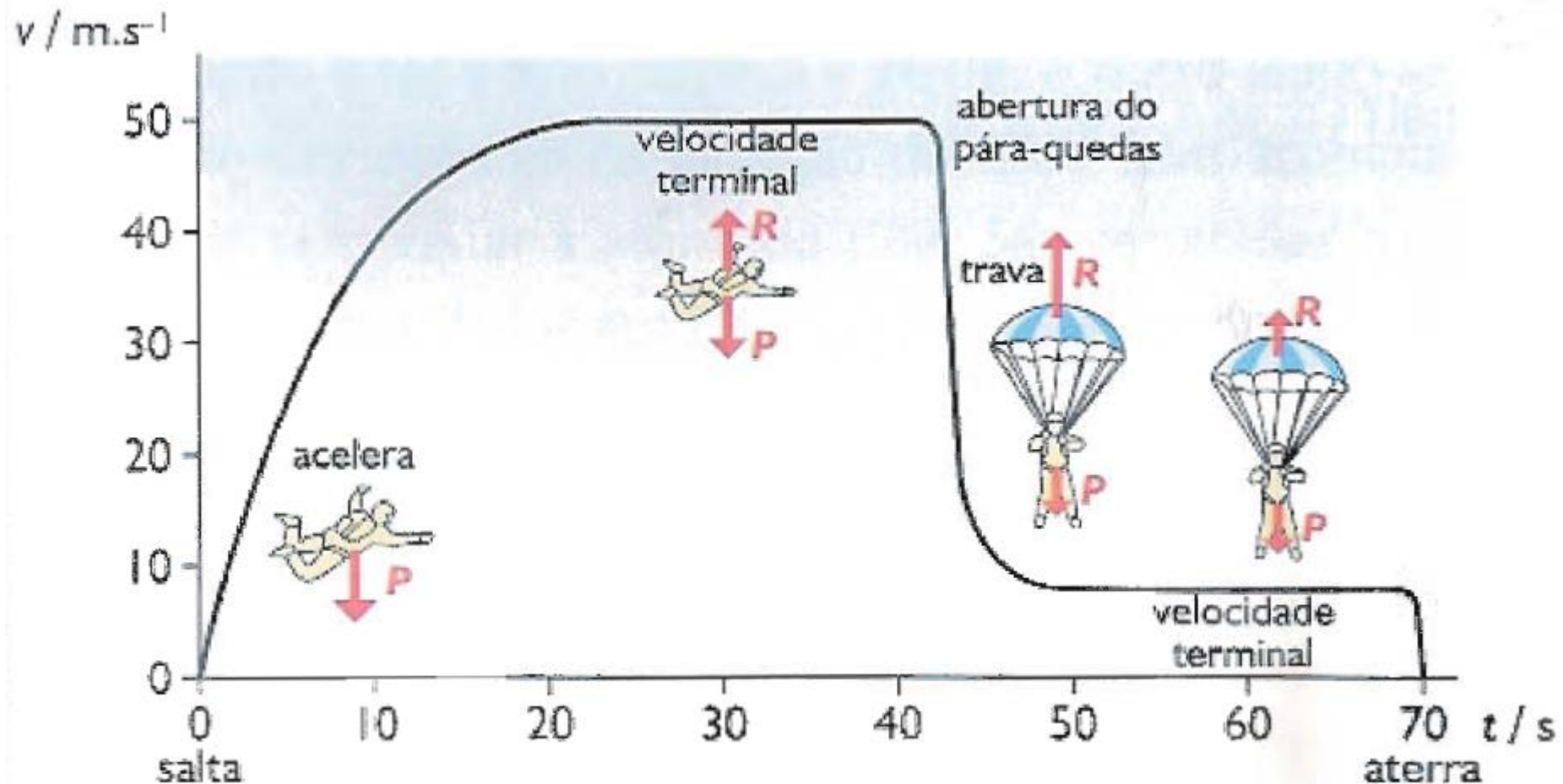
A intensidade desta força é superior à intensidade da força gravítica exercida no sistema pára-quedas/pára-quedista. Logo, a **resultante das forças** que actua no sistema está dirigida para cima e, assim, o movimento passa a ser **retardado**. O valor da velocidade de descida do pára-quedista diminui acentuadamente (D).

- Antes de atingir o solo, o pára-quedista move-se novamente com velocidade de valor constante, designada por **velocidade terminal**.

O valor da nova velocidade terminal é cerca de 10 m s^{-1} (E).

Movimento de um pára-quedista

*



Alguns Valores de módulo da Velocidade Terminal *

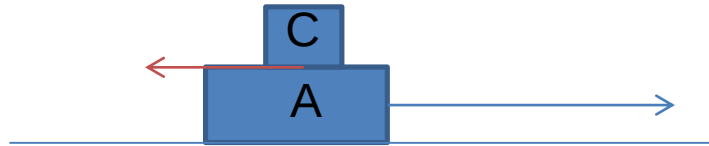
Valores do módulo da velocidade terminal para corpos que caem através do ar			
Corpo	Massa (kg)	Área da secção eficaz (m ²)	V_T (m s ⁻¹)
Homem fazendo parapente	75	0.70	60
Bola de basebol ($r = 3.7$ cm)	0.145	4.2×10^{-3}	43
Bola de golf ($r = 2.1$ cm)	0.046	1.4×10^{-3}	44
Pedra de granizo ($r = 0.50$ cm)	4.8×10^{-6}	7.9×10^{-5}	14
Gota de chuva ($r = 0.20$ cm)	3.4×10^{-6}	1.3×10^{-5}	9
Gota de chuva ($r = 0.15$ cm)	1.4×10^{-6}	7.3×10^{-6}	6
Parquedista (típico)	75		3

Exemplos – Exercícios – Questões

Duas forças estão aplicadas num corpo de 1 kg de massa. Uma das forças tem uma intensidade de 4 N e faz 30° com uma direcção que tomamos como eixo dos x e a outra tem intensidade de 3 N e faz 60° com a primeira.

- a) Qual é a intensidade da resultante das duas forças?
- b) Qual é o ângulo que faz com o eixo dos x?
- c) Se apenas estiverem estas forças aplicadas no corpo, quais são as componentes da aceleração segundo, x, y e z.

Um bloco A, com massa m_A , está inicialmente em repouso numa superfície horizontal.
Um bloco C, de massa m_C , está inicialmente em repouso na superfície superior do bloco A.
O coeficiente de atrito estático entre os dois blocos é μ_s .
O bloco A começa a ser puxado por uma força horizontal .
Determine o valor da força F a partir do qual o bloco C começa a deslizar sobre o bloco A.



A) $P_A = m_A g$

B) $P_C = m_C g$

C) $F_a = \mu_s m_C g$

$$m_A a = F - F_a$$

$$m_A a = F - \mu_s m_C g$$

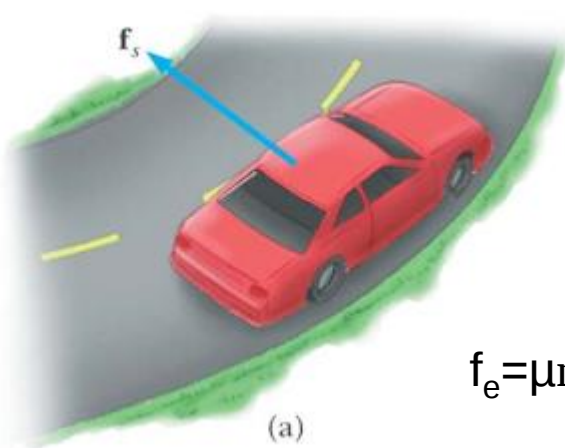
$$m_C a = \mu_s m_C g$$

$$a = \mu_s g$$

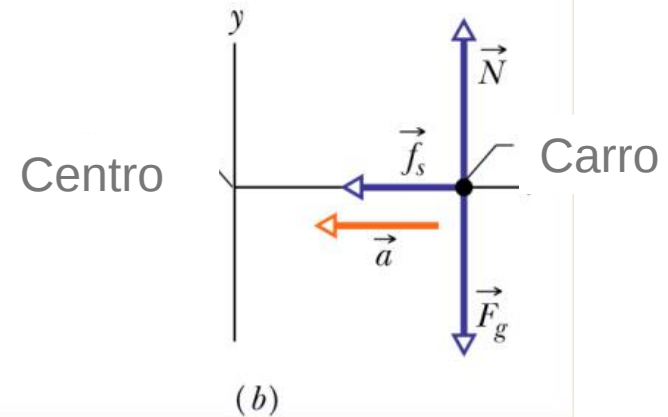
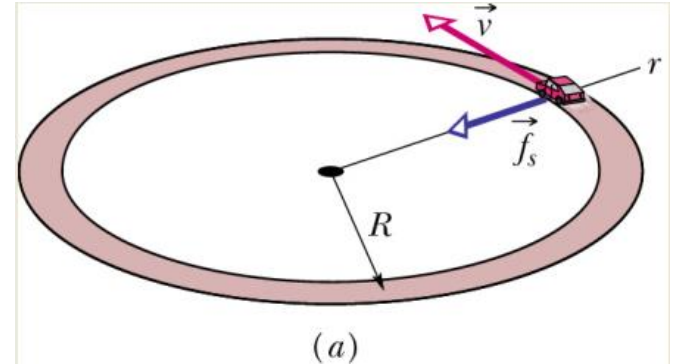
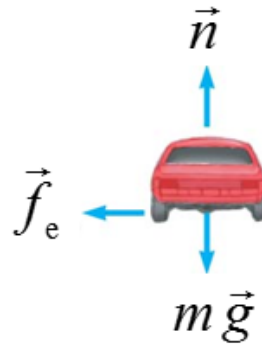
$$F = \mu_s g (m_A + m_C)$$

Curva Horizontal

A força de atrito estático é a força centrípeta;



$$f_e = \mu mg$$



O valor máximo do módulo da velocidade a que o carro pode efectuar a curva é dado por:

$$v = \sqrt{\mu_e g r}$$

Repare-se que este valor *não depende* da massa do carro.

O Rotor

A força de atrito estática equilibra o peso;

A força centrípeta é a força normal que a parede do cilindro exerce no corpo:

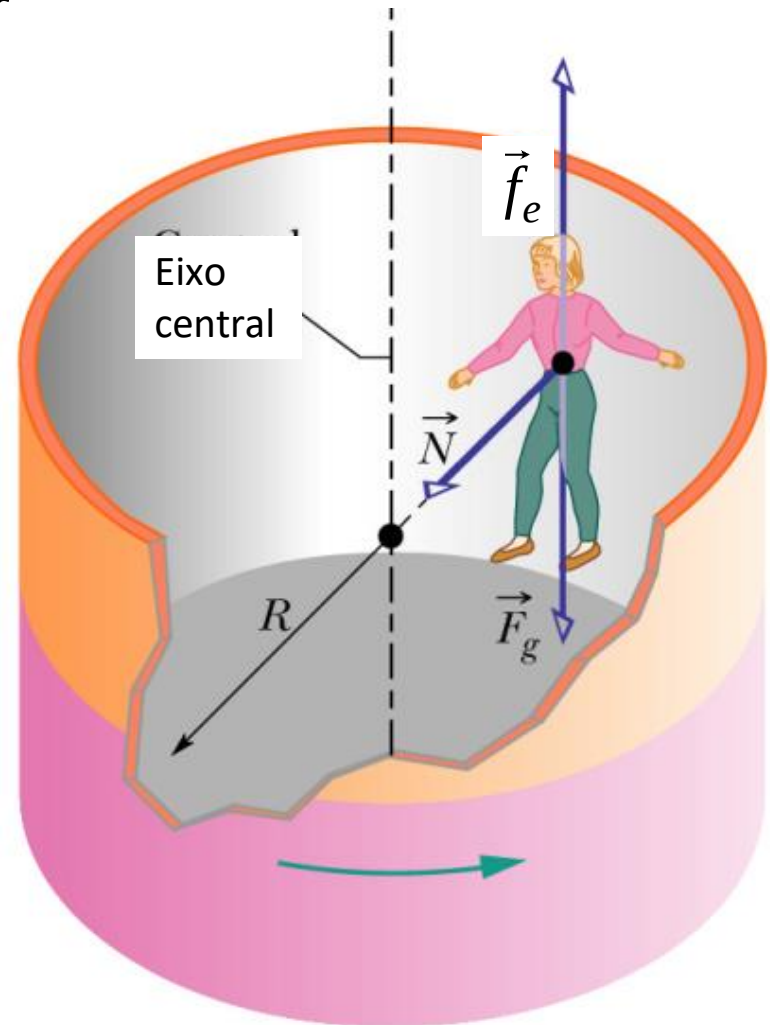
$$f_e = \mu_e N = mg$$

$$N = mg / \mu_e$$

$$N = mv^2 / R$$

$$mg / \mu_e = mv^2 / R$$

$$v = \sqrt{\frac{gR}{\mu_e}}$$



Curva com inclinação

Qual a velocidade para a qual a força de atrito perpendicular ao movimento, é nula?

$$\begin{cases} N \cos(\theta) - F_g = 0 & \text{dir. vertical} \\ N \sin(\theta) = ma_c & \text{dir. radial} \end{cases}$$

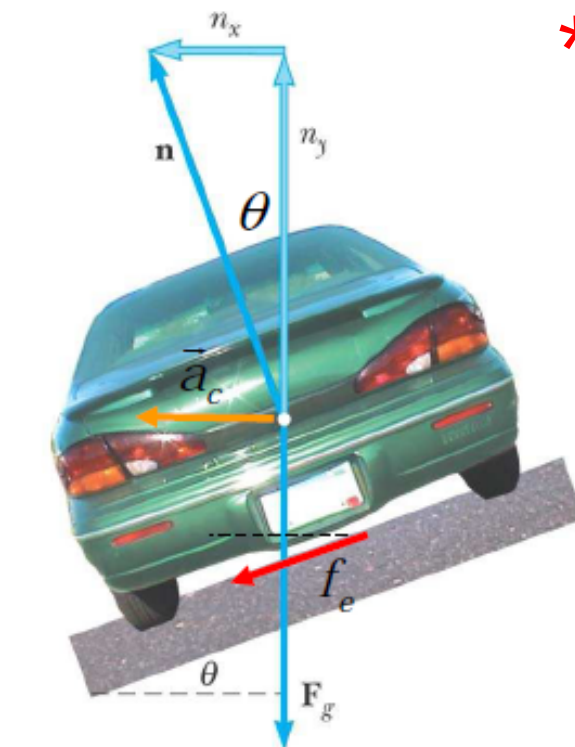
$$f_e = 0$$

$$v^2 = gr \tan(\theta)$$

E qual a velocidade máxima para que não derrape na curva?

$$\begin{cases} N \cos(\theta) - f_e \sin(\theta) - F_g = 0 & \text{dir. vertical} \\ N \sin(\theta) + f_e \cos(\theta) = ma_c & \text{dir. radial} \end{cases}$$

$$f_{e,\max} = \mu_e N$$



© 2004 ThomsonBrooks Cole

$$v^2 = gr \frac{\sin(\theta) + \mu_e \cos(\theta)}{\cos(\theta) - \mu_e \sin(\theta)}$$

Curva inclinada com atrito

*

Neste caso há inclinação e ao mesmo tempo há força de atrito, que pode ser para cima ou para baixo

A força centrípeta é a componente horizontal da força normal que a estrada exerce no carro:

$$\begin{aligned}n_x &= n \sin \theta \\n_y &= n \cos \theta \\f_{a_x} &= f_a \cos \theta \\f_{a_y} &= f_a \sin \theta\end{aligned}$$

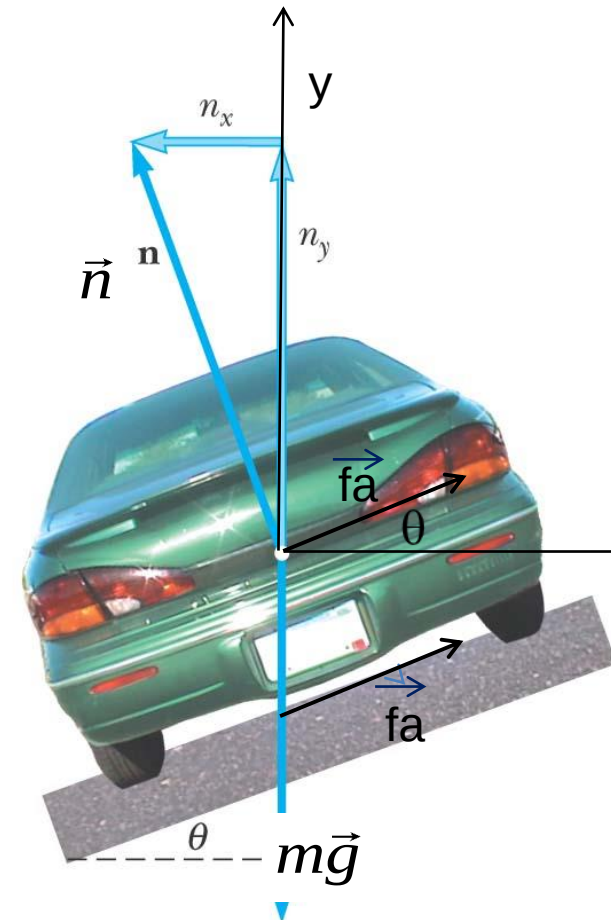
$$\begin{aligned}v_{\max}^2 &= rg (\sin \theta + \mu \cos \theta) / (\cos \theta - \mu \sin \theta) \\v_{\min}^2 &= rg (\sin \theta - \mu \cos \theta) / (\cos \theta + \mu \sin \theta)\end{aligned}$$

$$n_x = f_{a_x} + mv^2/r$$

$$P = n_y + f_{a_y}$$

$f_a \leq \mu n$; consideremos o limite em que há igualdade

Os valores max e min da velocidade correspondem a fazermos f_a para baixo ou para cima, ou seja ou negativa ou positiva respectivamente. Obtem-se:



A6

Trabalho- Energia

Energia cinética

Energia potencial

Trabalho realizado pela Força Gravítica

Trabalho realizado pela Força de uma Mola

Teorema da conservação de energia

Trabalho

O trabalho, W , efectuado numa partícula por uma **força constante** é o produto do módulo da força,, , do módulo $|\vec{F}|$ deslocamento, , do ponto de aplic $|\Delta\vec{r}|$ la força, e de $\cos \theta$, em que θ é o ângulo entre os vectores força e deslocamento

$$W = |\vec{F}| |\Delta\vec{r}| \cos \theta = F \Delta r \cos \theta$$

Trabalho

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r}$$

O trabalho realizado por uma **força constante** sobre um corpo que se move é **nulo quando** a força aplicada é **perpendicular** ao deslocamento do seu ponto de aplicação:

No caso geral em que a força não é constante

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Trabalho

O sinal que afecta o trabalho depende da direcção e sentido de $\vec{F}$ relativamente ao deslocamento $\Delta\vec{r}$

É positivo se tiverem o mesmo sentido.

É negativo se tiverem sentidos contrários.

Trabalho é Transferência de Energia

Se é realizado trabalho *positivo sobre* um sistema, é transferida energia *para* o sistema;

Se o trabalho realizado sobre o sistema é *negativo*, é transferida energia *para fora* do sistema.

Trabalho realizado por Várias Forças, podendo as **forças não ser constantes** – movimento unidimensional

Se mais do que uma força actua num sistema e o sistema pode ser considerado como uma partícula, o trabalho total realizado sobre o sistema é o trabalho realizado pela força resultante:

$$\sum W = W_{\text{resultante}} = \int \left(\sum \vec{F} \right) \cdot d\vec{r}$$

Para deslocamento segundo xx

$$\sum W = W_{\text{resultante}} = \int_{x_i}^{x_f} \left(\sum F_x \right) dx$$

Unidades de Trabalho

Trabalho é uma grandeza escalar

A unidade SI de trabalho é o joule (J)

1 joule = 1 newton $\times$ 1 metro

$$J = N \cdot m$$

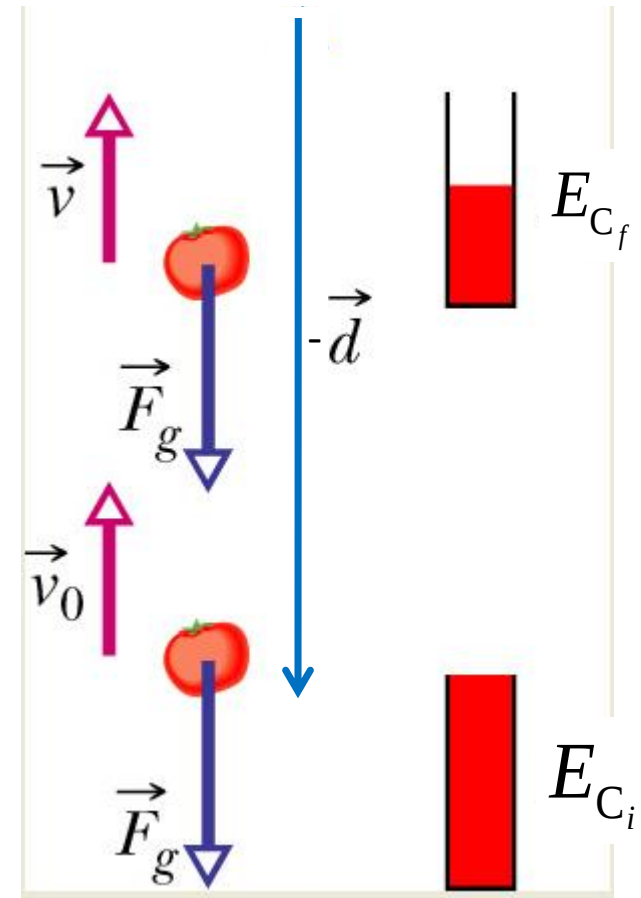
Trabalho realizado pela força gravítica

Um corpo é atirado *para cima* verticalmente com velocidade inicial $\vec{v}_0$. Durante a subida a força gravítica efectua trabalho sobre o corpo

$$W = \vec{F}_g \cdot \vec{d} = -mgd < 0$$

Após atingir a altura máxima, o trabalho efectuado pela força gravítica sobre o corpo no deslocamento até ao ponto de partida é

$$W = \vec{F}_g \cdot (-\vec{d}) = mgd > 0$$



Energia Cinética

Energia cinética é a energia de uma partícula associada ao seu movimento:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

E_c é a energia cinética

m é a massa da partícula

v é o módulo da velocidade da partícula

A variação da energia cinética é um resultado possível do trabalho realizado para transferir energia para um sistema.

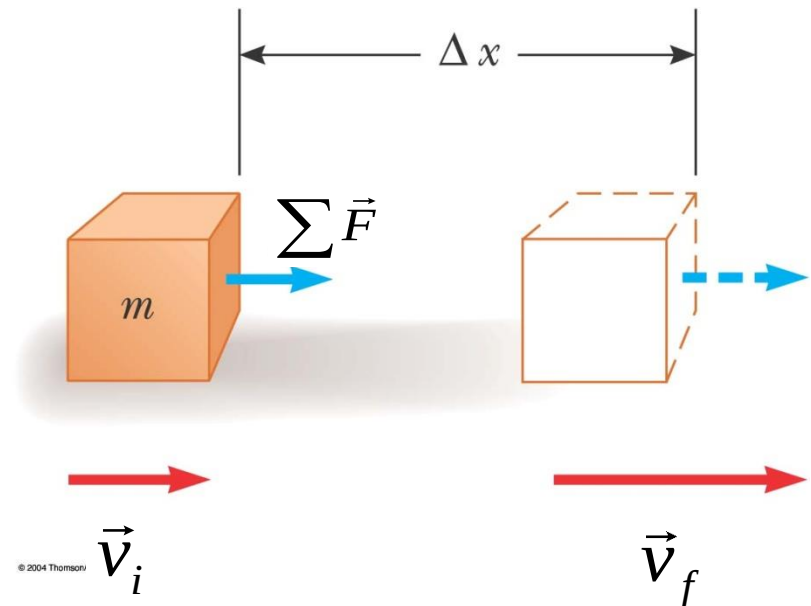
Energia Cinética

Calculamos o trabalho: caso da
força e aceleração na mesma
direcção

$$W = \int_{x_i}^{x_f} \sum F \, dx = \int_{x_i}^{x_f} ma \, dx$$

$$W = \int_{v_i}^{v_f} mv \, dv$$

$$\sum W = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$



Teorema do Trabalho-Energia ou da Energia Cinética

O teorema da energia cinética afirma:

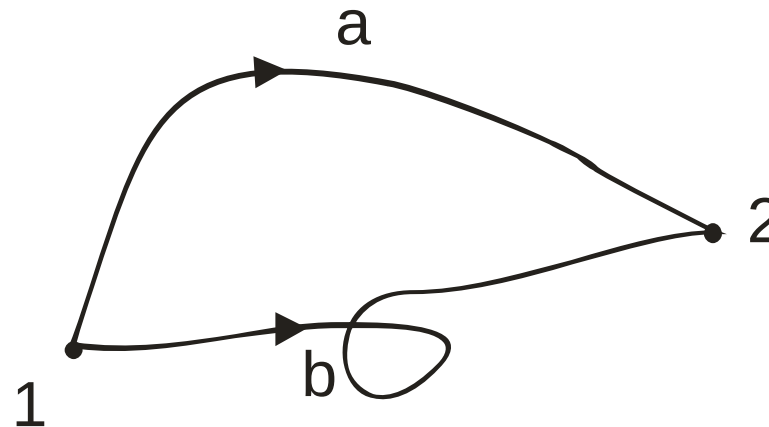
No caso em que *a única alteração* no sistema é no módulo da sua velocidade, o trabalho realizado pela força resultante num determinado intervalo de tempo é igual à variação da energia cinética do sistema nesse intervalo de tempo.

$$\sum W = E_{C_f} - E_{C_i} = \Delta E_C$$

Energia Potencial

Energia potencial é a energia associada à *configuração* de um sistema de corpos que interactivam uns com os outros.

As diferentes formas de energia potencial estão associadas a forças conservativas.



Depende *apenas das posições* dos pontos 1 e 2

Energia Potencial

Existem muitas formas de energia potencial, entre as quais:

Gravítica

Electromagnética

Química

Nuclear

No interior de um sistema, uma forma de energia pode converter-se noutra e energia potencial pode converter-se em cinética.

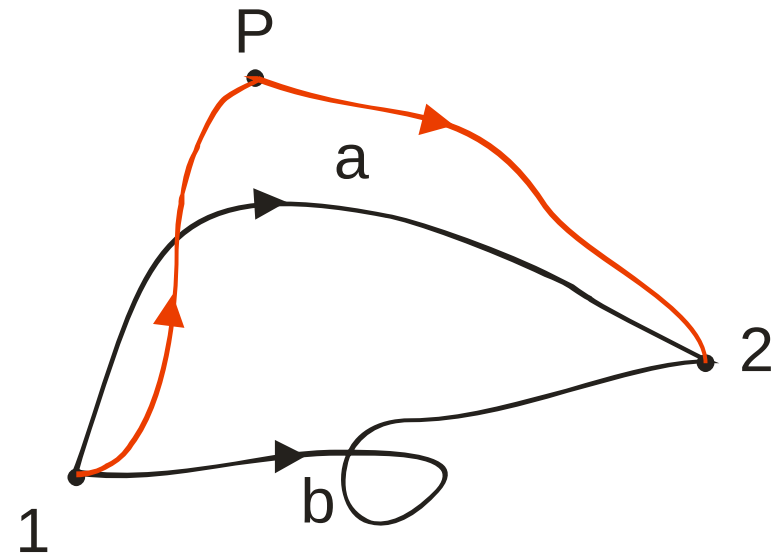
Trabalho de uma Força Conservativa e Energia Potencial

O trabalho da força $\vec{F}$ quando o corpo se desloca de 1 a 2 é:

$$W_{1 \rightarrow 2} = U_1 - U_2$$

U_1 - Energia potencial no ponto 1

U_2 - Energia potencial no ponto 2



Trabalho de uma Força Conservativa e Energia Potencial

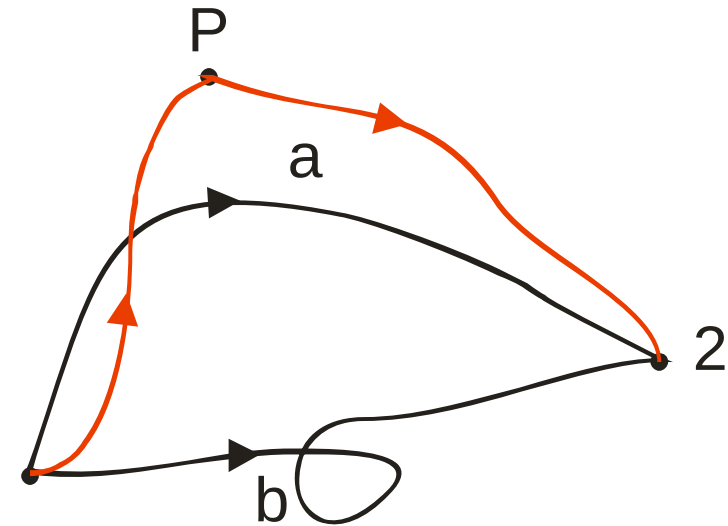
Seja P uma posição arbitrária;

O trabalho da força $\vec{F}$ quando o corpo se desloca de 1 para 2 é:

$$\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^P \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_P^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Se mantivermos o ponto P fixo,¹
então:

$$\int_P^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(2) = -U(2)$$



$$U(2) \equiv U(x_2, y_2, z_2)$$

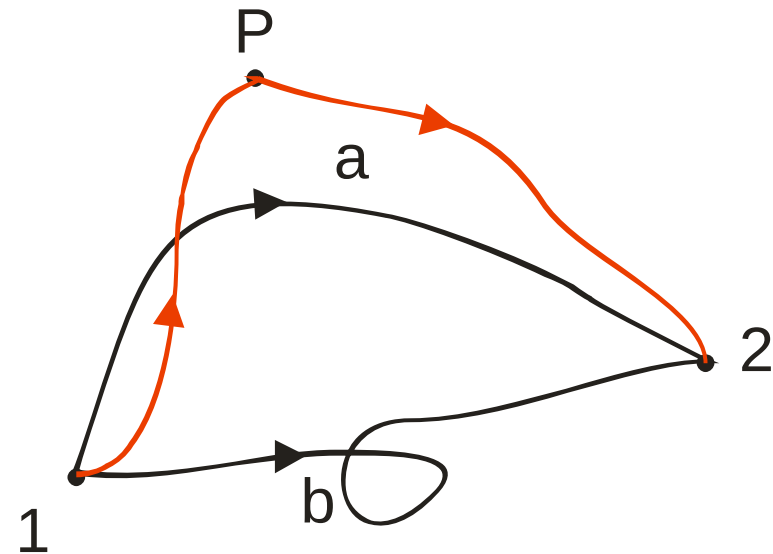
Trabalho de uma Força Conservativa e Energia Potencial

O trabalho da força $\vec{F}$ quando o corpo se desloca de 1 a P é:

$$\int_1^P \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(1)$$

Então:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^P \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_P^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

U – energia potencial associada à força conservativa $\vec{F}$

Trabalho de uma Força Conservativa e Energia Potencial

Forças Conservativas

Relação da força com a energia potencial

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

Daqui obtemos a relação entre a força e a energia potencial:

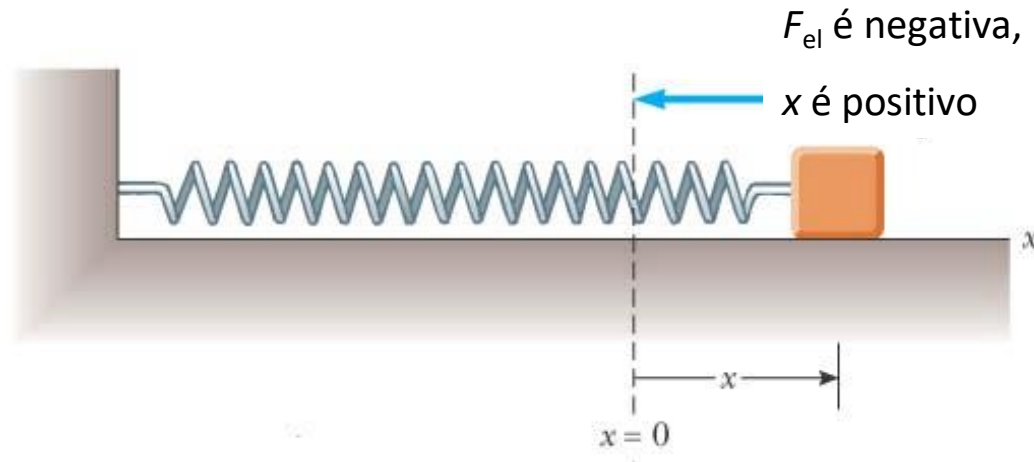
$$F_x = -\frac{dU}{dx}$$

$$F_y = -\frac{dU}{dy}$$

$$F_z = -\frac{dU}{dz}$$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

Lei de Hooke



A força exercida pela mola sobre o corpo é

$$F_{el} = - kx$$

x é a posição do bloco em relação à posição de equilíbrio ($x = 0$)

k é a constante da mola e mede a resistência desta à distensão ou compressão

Esta equação exprime a Lei de Hooke

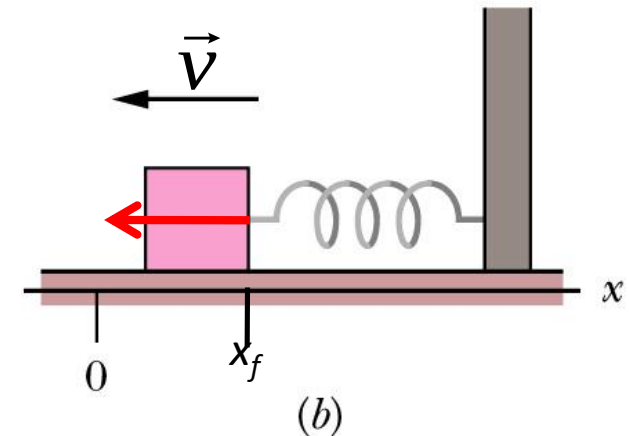
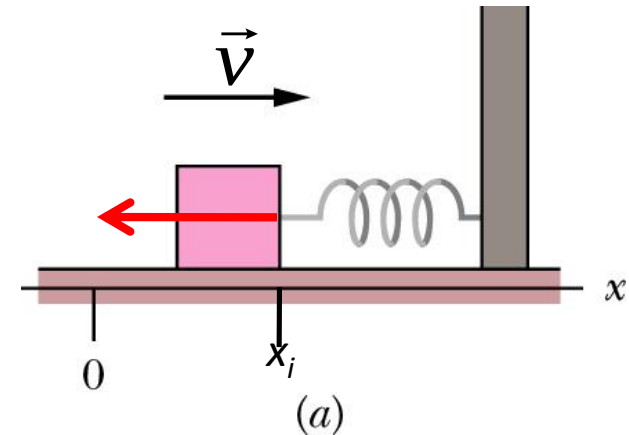
Energia Potencial Elástica

O trabalho efectuado pela mola sobre o corpo quando este se move do ponto x_i para o ponto x_f é:

$$\begin{aligned}
 W &= \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx = \\
 &= \int_{x_i}^{x_f} -kx dx = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2)
 \end{aligned}$$

A variação da energia potencial elástica entre x_i e x_f é:

$$\Delta U_{el} = -W = \frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2)$$



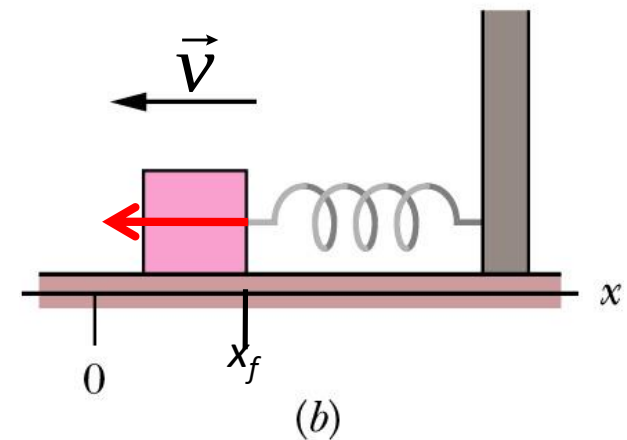
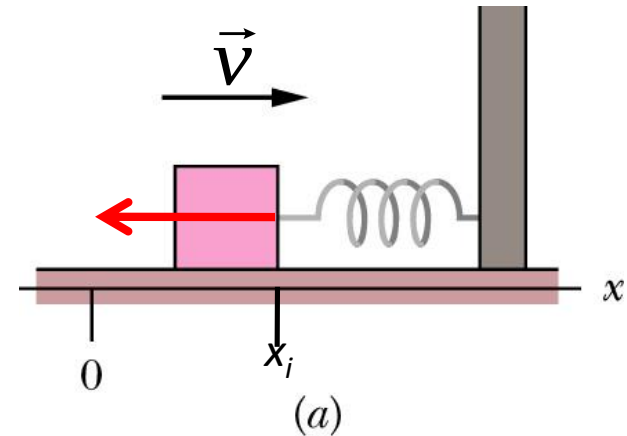
Energia Potencial Elástica

A variação da energia potencial elástica entre x_i e x_f é:

$$\Delta U_{el} = \frac{1}{2} k (x_f^2 - x_i^2)$$

Utilizando o ponto $x = 0$ (o ponto de equilíbrio) como ponto de referência obtemos para qualquer ponto x :

$$U_{el} = \frac{1}{2} k x^2$$



Energia Potencial Elástica

Dizemos que a energia potencial elástica acumulada na mola é nula, quando a mola está na posição de equilíbrio ($U = 0$ para $x = 0$);

Assim só há energia potencial acumulada na mola quando ela está comprimida ou esticada;

A energia potencial elástica é máxima quando a mola atingiu a extensão ou compressão máximas;

A energia potencial elástica é sempre positiva;
 x^2 é sempre positivo.

Conservação de Energia Mecânica

Quando **forças conservativas** actuam no interior de um sistema isolado, a energia cinética ganha (ou perdida) pelo sistema quando os seus componentes alteram as posições relativas é equilibrada por perda (ou ganho) de energia potencial;

Esta é uma expressão da ***Conservação da Energia Mecânica***.

Conservação de Energia

O trabalho realizado pela resultante das forças aplicadas num corpo é igual à variação da sua energia cinética.

$$W_{12} = E_{c_2} - E_{c_1}$$

O trabalho realizado pela resultante das forças aplicadas num corpo, se todas elas forem conservativas, é igual ao simétrico da variação da sua energia potencial.

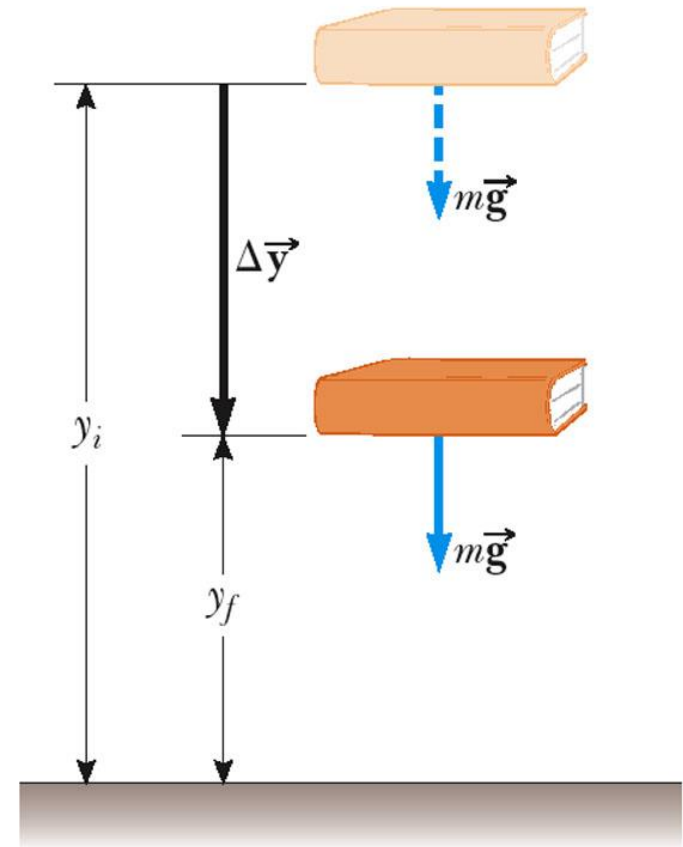
$$W_{12} = U_1 - U_2$$

$$E_{c_1} + U_1 = E_{c_2} + U_2 = \text{Constante}$$

$$E = E_c + U = \text{Constante}$$

Conservação de Energia Mecânica: movimento de um corpo no campo gravítico

Considere-se o trabalho efectuado pela força gravítica sobre o livro, quando este cai de uma determinada altura:



© 2006 Brooks/Cole - Thomson

Conservação de Energia Mecânica

Se a energia mecânica do sistema se conserva, isto é, se só há forças conservativas em jogo, escrevemos a energia total na forma:

$$E_i = E_{\text{cin } i} + U_i \text{ para a configuração inicial}$$

$$E_f = E_{\text{cin } f} + U_f \text{ para a configuração final}$$

Como a energia mecânica se conserva, $E_i = E_f$

Conservação da Energia Mecânica, Exemplo 1 (Queda de uma Bola)

Condições iniciais:

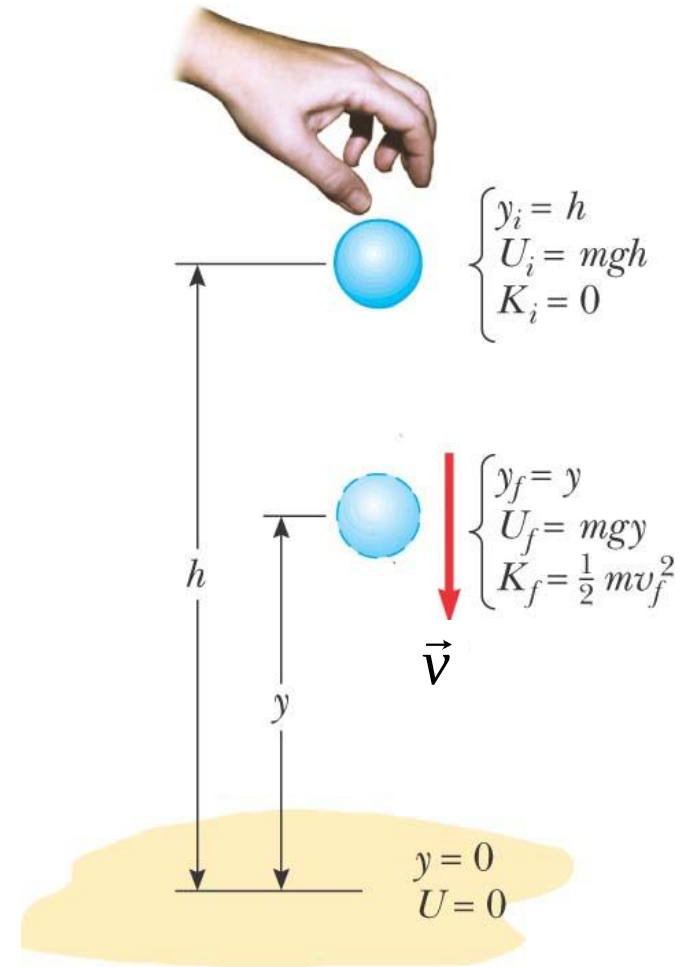
$$E_i = E_{\text{cin } i} + U_i = mgh$$

A bola é largada, de modo que $E_{\text{cin } i} = 0$

A configuração correspondente a energia potencial nula é a bola no solo

As regras de conservação aplicadas a um ponto y acima do solo conduz a

$$\frac{1}{2} mv_f^2 + mgy = mgh$$



© 2004 Thomson/Brooks Cole

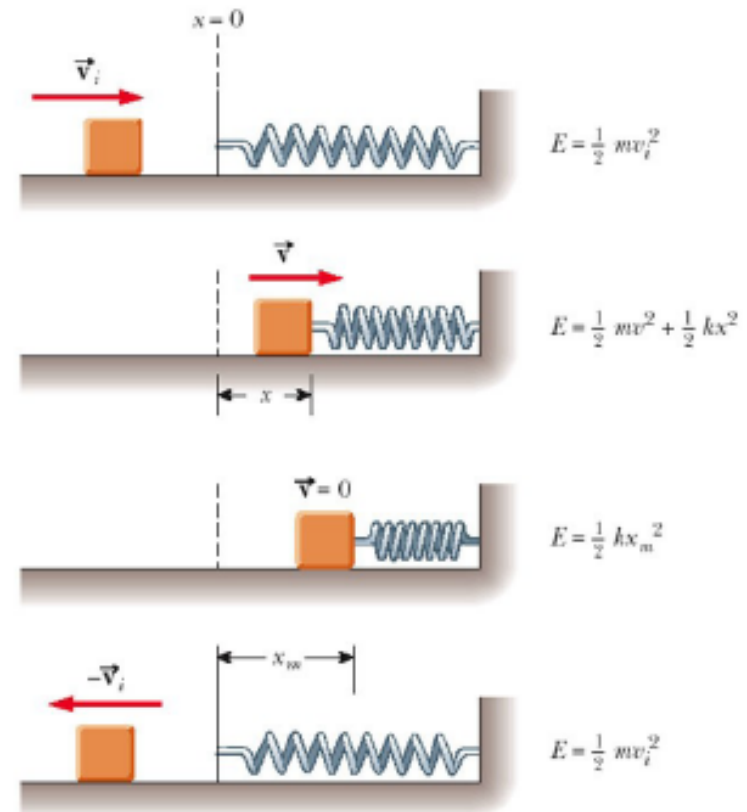
Conservação de Energia Mecânica: mola elástica

Energia mecânica

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

Energia mecânica conserva-se

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} k x_1^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} k x_2^2$$

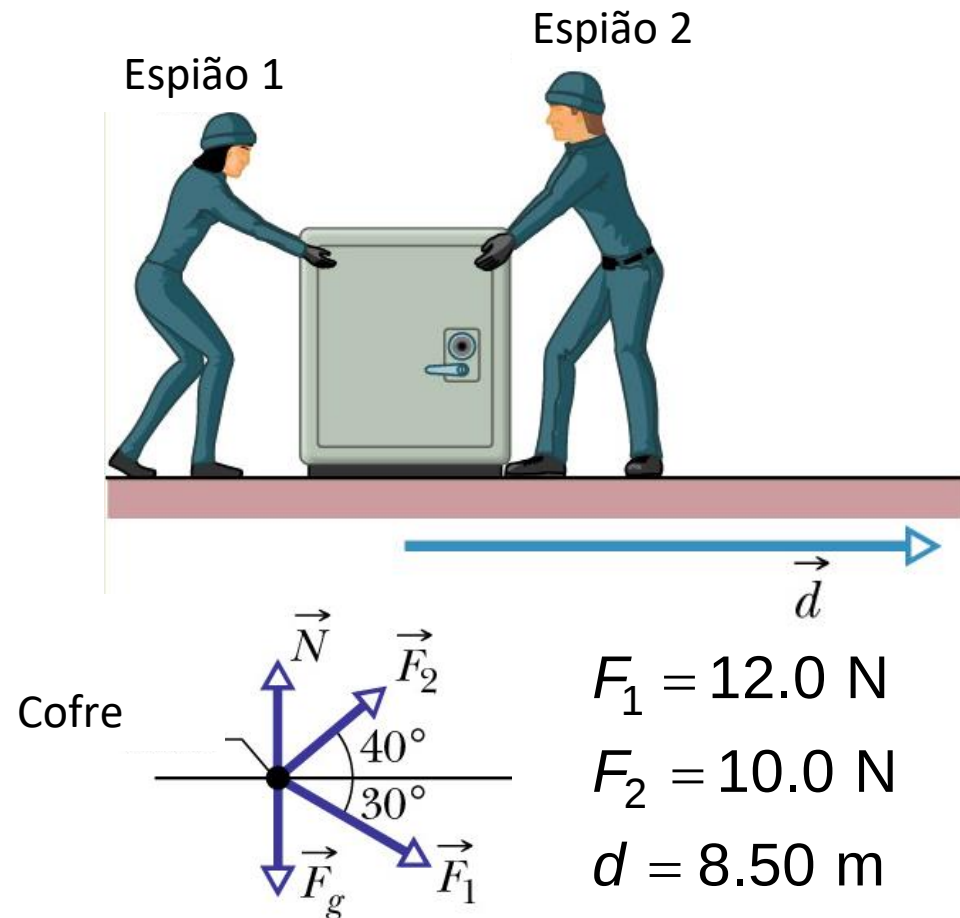


© 2006 Brooks/Cole - Thomson

Teorema do Trabalho-Energia – Problema

Dois espiões industriais deslocam de 8.50 m um cofre com massa de 225 kg, fazendo-o escorregar sobre uma superfície sem atrito. As forças que actuam no cofre estão indicadas no diagrama.

$$m=225 \text{ kg}$$

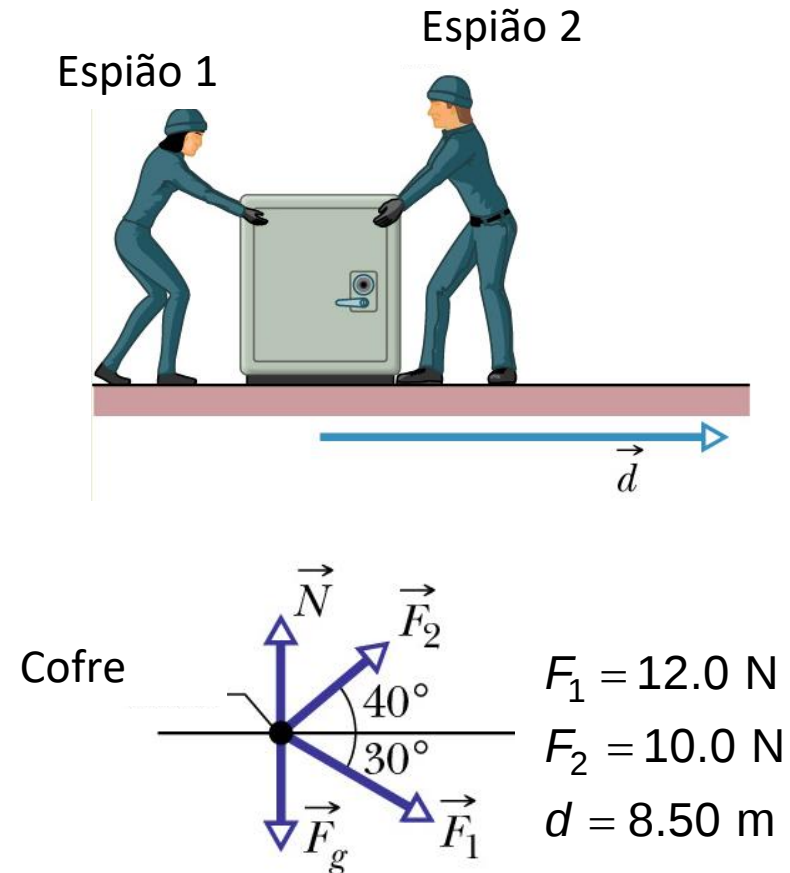


Teorema do Trabalho-Energia – Problema

a) Qual é o trabalho total realizado pelas forças que actuam no cofre durante o deslocamento $\vec{d}$

b) O cofre estava inicialmente em repouso. Qual é o módulo da sua velocidade após o deslocamento de 8.50 m?

$$V=2ad$$



Teorema do Trabalho-Energia – Problema

Um objecto vai de A (0,0), onde tem uma velocidade indicada abaixo, para B (1,3) sob a acção da força indicada abaixo. Determine o trabalho realizado pela força durante 1 s, pela definição e pelo teorema trabalho-energia cinética

$$\vec{F} = 2\vec{e}_x$$

$$\vec{v}_0 = 3\vec{e}_y$$

$$m = 1,0 \text{ kg}$$

$$W_{AB} = ?? \text{ A(0,0); B(1,3)m}$$

$$W_{AB} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

$$W_{AB} = 2\vec{i} \cdot (\vec{i} + 3\vec{j}) = 2 \text{ J}$$

$$\vec{v}_A = 3\vec{e}_y$$

$$\vec{v}_B = ??$$

$$a_x = 2$$

$$a_y = 0$$

$$v_x = 2t$$

$$v_y = 3$$

$$\begin{aligned} x &= t^2 \\ y &= 3t \end{aligned}$$

$$t = 1 \text{ s}$$

$$\vec{v}_B = 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y$$

$$E_{cA} = 4,5 \text{ J}$$

$$E_{cB} = 6,5 \text{ J}$$

$$\Delta E_c = 2 \text{ J}$$