



Aula 08

Movimento oscilatório

Sumário

Oscilações

Movimento Harmónico Simples (MHS)

A Força no Movimento Harmónico Simples

Movimentos Periódicos

Um movimento é ***periódico*** se todas as suas características se repetem em intervalos de tempo iguais

Ao intervalo de tempo mínimo em que as características do movimento se repetem, dá-se o nome de **período**

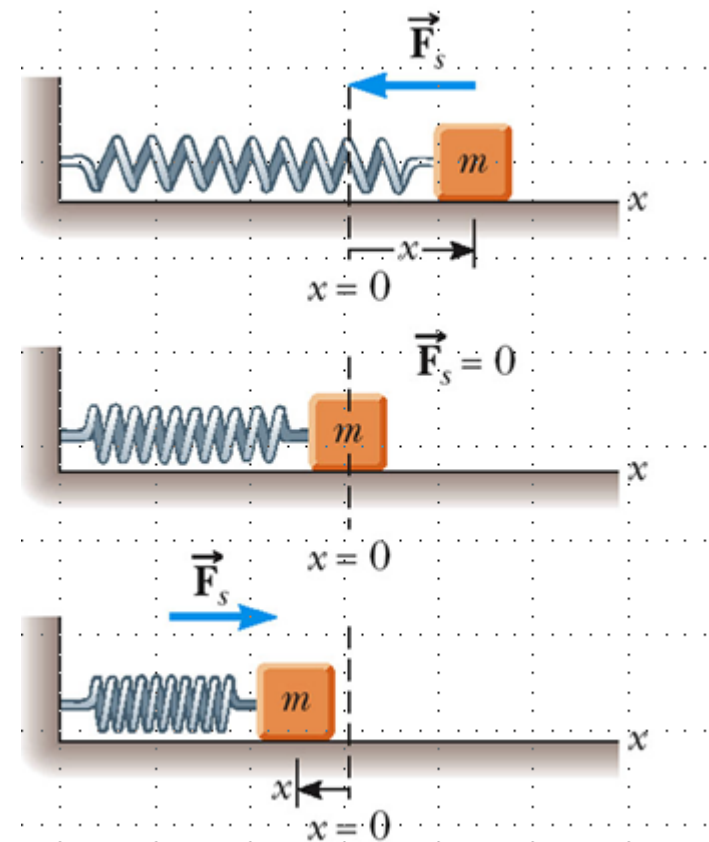
Um tipo especial de movimento periódico ocorre quando a força que actua num corpo é proporcional à distância do corpo a uma posição de equilíbrio

Se a força está sempre dirigida para a posição de equilíbrio, o movimento é ***harmónico simples***

Movimento de um Sistema de uma Massa Ligada a uma Mola

Um bloco de massa m está ligado a uma mola, o bloco move-se livremente sobre uma superfície horizontal sem atrito;

Quando a mola não está comprimida nem esticada, o bloco está na **posição de equilíbrio**, $x = 0$

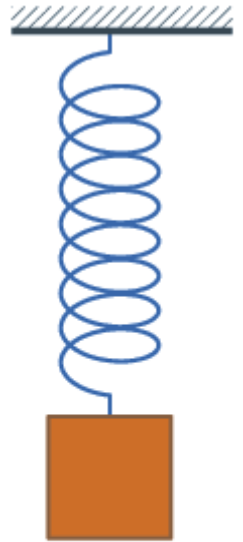


Lei de Hooke

A lei de Hook da elasticidade é uma aproximação útil para a resposta de um material que sofre uma pequena deformação.

Os materiais que seguem a lei de Hook dizem-se linear-elásticos.

Hook foi um cientista inglês que viveu no Sec. XVII.



Lei de Hooke

Lei de Hooke:

$$F_s = - kx$$

F_s é a força restauradora

Aponta sempre para a posição de equilíbrio

Portanto, tem sinal oposto ao do deslocamento a partir do equilíbrio

k é a constante da mola

x é o deslocamento

Lei de Hooke



Aceleração

Sendo a força elástica, dada pela lei de Hooke, a força resultante, pela 2.ª Lei de Newton:

$$F = ma$$

$$-kx = ma$$

$$a = -\frac{k}{m}x$$

Aceleração

$$a = -\frac{k}{m}x$$

A aceleração é proporcional ao deslocamento do bloco;
O sentido da aceleração é oposto ao do deslocamento, a partir do equilíbrio;

Se um corpo se move com *movimento harmónico simples*, a sua aceleração é proporcional à posição e aponta no sentido oposto ao do deslocamento a partir da posição de equilíbrio.

Aceleração

$$a = -\frac{k}{m}x$$

A aceleração ***não*** é constante:

- Não podemos, portanto, aplicar a equação da cinemática do movimento uniformemente acelerado;
- Se o bloco é largado da posição $x = A$, então a sua aceleração inicial é $-kA/m$;
- Quando o bloco passa na posição de equilíbrio, a sua aceleração é $a = 0$;
- O bloco continua a mover-se até $x = -A$, onde a sua aceleração é $+kA/m$.

Movimento do Bloco

O bloco vai oscilar entre $x = -A$ e $x = +A$;

Estes são os *pontos de retorno* do movimento;

A força é conservativa;

Na ausência de atrito, o movimento continuará indefinidamente;

Nos sistemas reais existe geralmente atrito, pelo que não irão oscilar indefinidamente.

Mola Vertical

Quando o bloco está pendurado numa mola vertical, o seu peso fará com que a mola se distenda;

Se a posição de repouso da mola for definida como $x = 0$, podemos aplicar a mesma análise da mola horizontal.

Movimento Harmónico Simples (MHS) – Representação Matemática

Consideramos o bloco como sendo uma partícula;

Escolhemos o eixo dos x para a direcção em que ocorre a aceleração;

Aceleração:
$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Definimos:
$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Então:
$$a = -\omega^2x$$

Movimento Harmónico Simples (MHS) – Representação Matemática

Necessitamos de uma função que seja solução da equação:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

A função $x(t)$ deve ter 2.ª derivada igual à função original com sinal negativo e multiplicada por ω^2 ;

Só as funções seno e co-seno satisfazem estas condições;

Movimento Harmónico Simples (MHS) – Representação Matemática

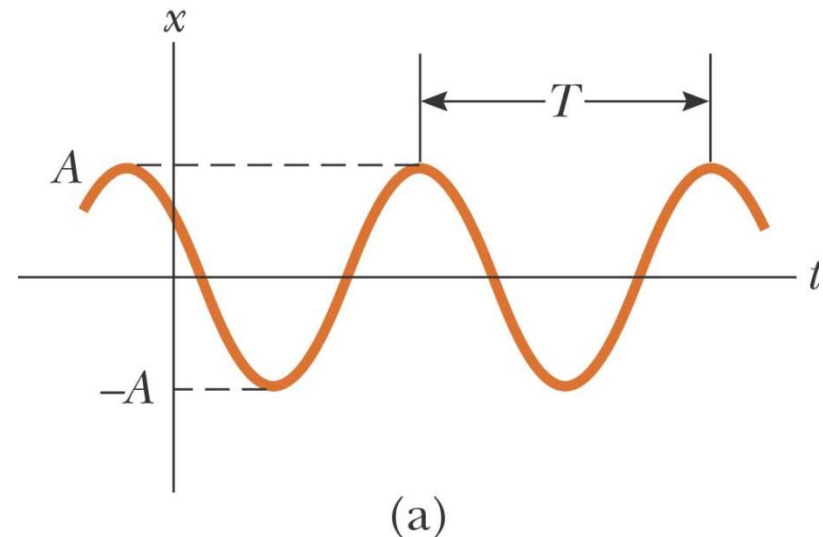
A solução mais geral é:

$$x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$$

Pode ser escrita na forma:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

A , ω , ϕ são constantes



© 2004 Thomson/Brooks Cole

Movimento Harmónico Simples (MHS) – Representação Matemática

A é a amplitude do movimento

É o valor máximo da posição (elongação) da partícula, no sentido positivo ou negativo

ω é a frequência angular

A unidade SI é rad s^{-1}

ϕ é a constante de fase ou o ângulo de fase inicial

Movimento Harmónico Simples (MHS) – Representação Matemática

A e ϕ são determinados apenas pela posição e velocidade da partícula para $t = 0$;

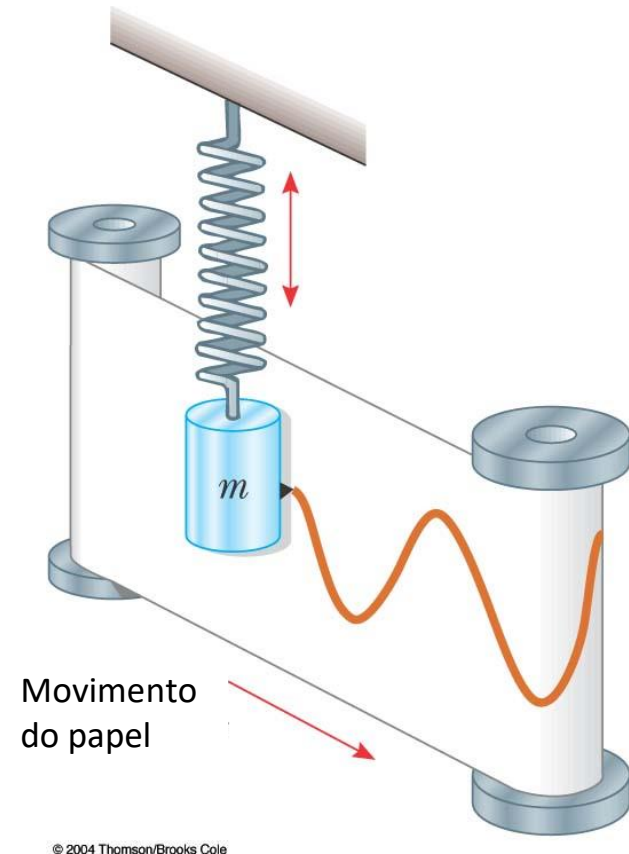
Se a partícula se encontra em $x = A$ para $t = 0$, então $\phi = 0$;

A **fase** do movimento é $(\omega t + \phi)$;

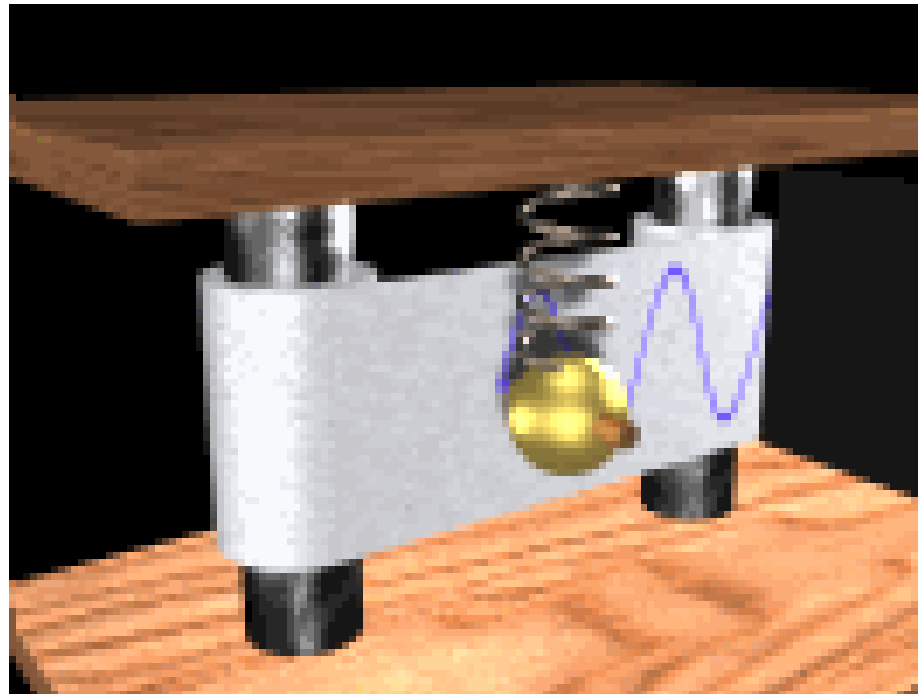
$x(t)$ é periódica e o seu valor é o mesmo sempre que ωt aumenta de 2π radianos.

Método experimental para demonstrar o MHS

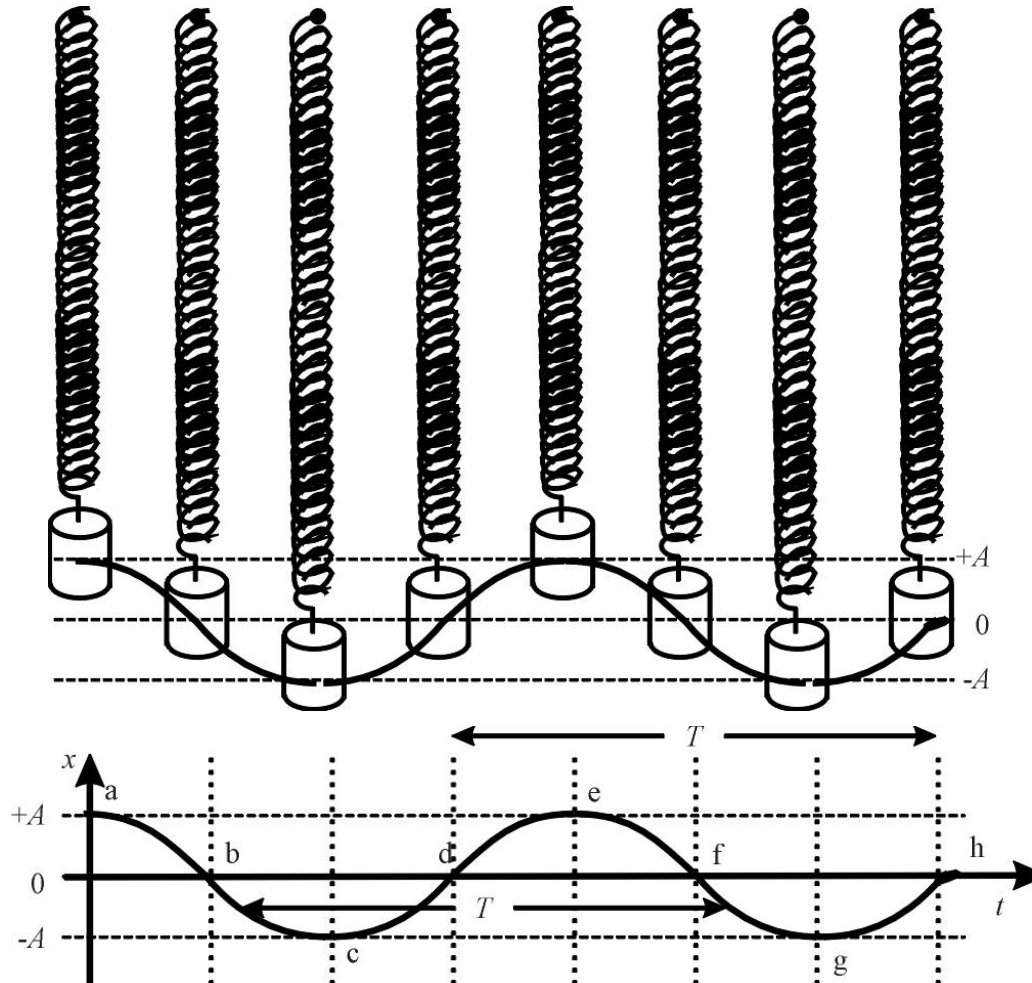
A caneta, ligada ao corpo que oscila, traça uma sinusóide no papel que está a mover-se.



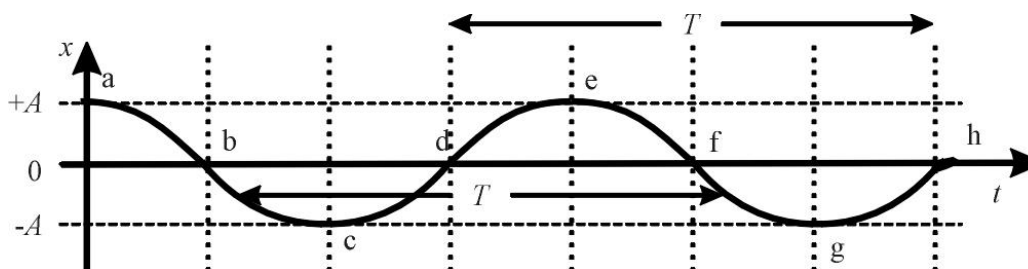
Método experimental para demonstrar o MHS



Método experimental para demonstrar o MHS



Período

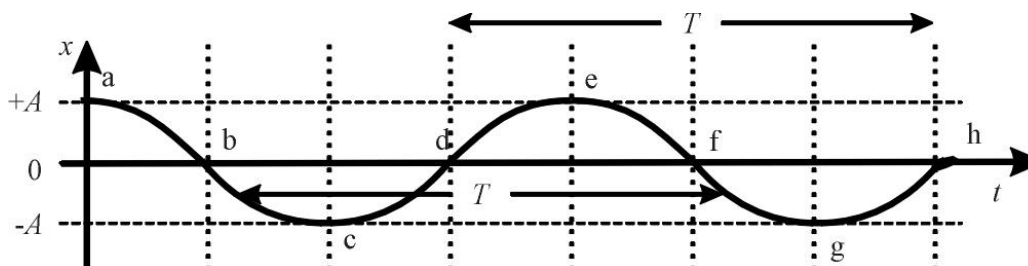


O **período**, T , é o intervalo de tempo necessário para a partícula efectuar um ciclo do seu movimento

Os valores de x , v e a , da partícula no instante t são iguais aos valores de x , v e a , no instante $t + T$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Frequência



O inverso do período é a ***frequência***;

A frequência é o número de oscilações que a partícula efectua por unidade de tempo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

A unidade é hertz (Hz) = 1 ciclo por segundo

Sumário – Período e Frequência

A frequência angular pode ser escrita em termos da frequência e do período:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

O período e a frequência podem ainda ser escritos na forma:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Período e Frequência

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

A frequência e o período dependem apenas da massa da partícula e da constante de força da mola;

Não dependem dos parâmetros do movimento (tempo, posição);

A frequência é maior para uma mola mais dura (valor elevado de k) e diminui quando aumenta a massa da partícula.

Equações do Movimento MHS

Recordemos que o movimento harmónico simples **não** é movimento uniformemente acelerado:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$

Valores Máximos of v e a

Como as funções seno e coseno oscilam entre ± 1 , podemos facilmente obter os valores máximos da velocidade e aceleração de um objecto com MHS:

$$v_{\max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}} A$$

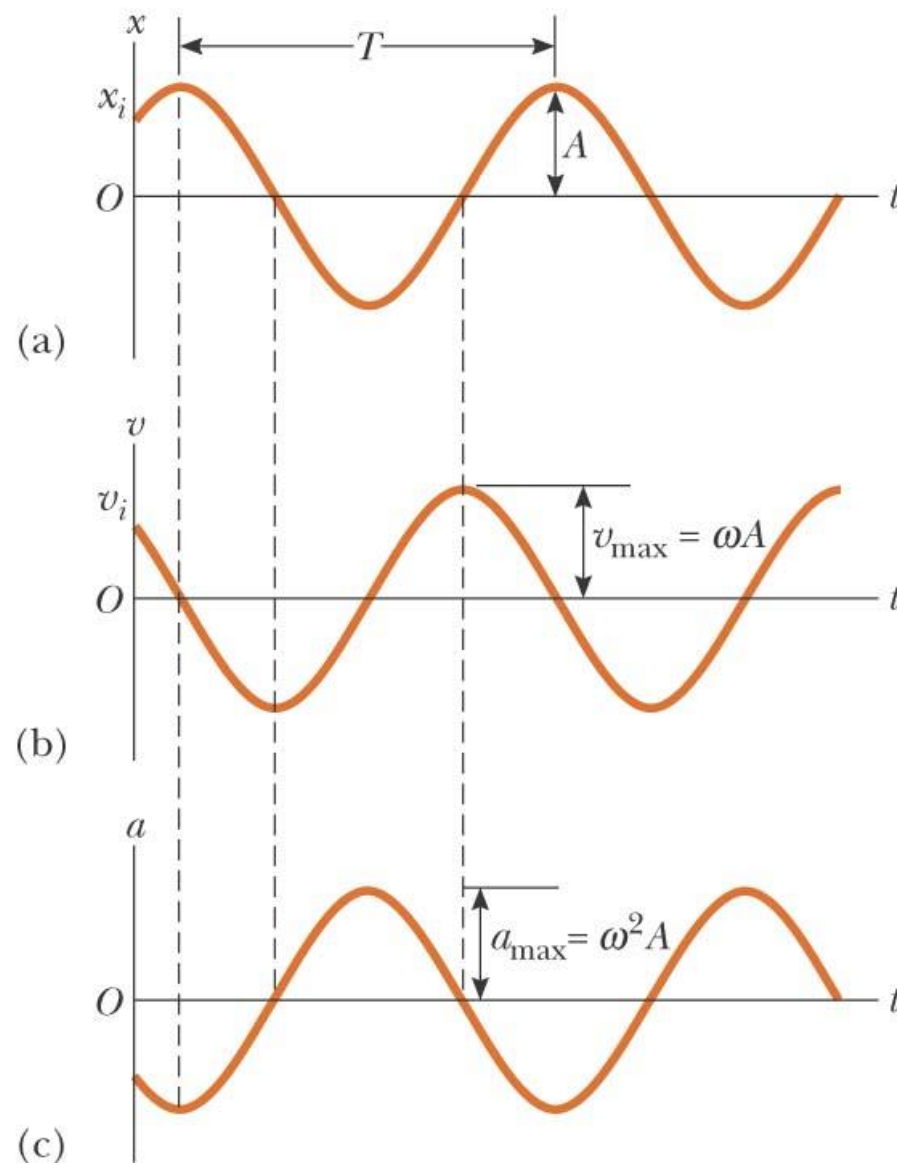
$$a_{\max} = \omega^2 A = \frac{k}{m} A$$

Representação Gráfica

Os gráficos mostram:

- (a) o deslocamento em função do tempo;
- (b) a velocidade em função do tempo;
- (c) a aceleração em função do tempo.

A velocidade está *desfasada* de 90° em relação ao deslocamento e a aceleração está *desfasada* de 180° em relação ao deslocamento.



© 2004 Thomson/Brooks Cole

A Energia no Movimento Harmónico Simples

Um Oscilador Harmónico Simples Angular

O Pêndulo simples

O Movimento Harmónico Simples Amortecido

Oscilações Forçadas e Ressonância

Energia do Oscilador MHS

Supomos que um sistema de uma massa e uma mola se move sobre uma superfície sem atrito;

Concluimos que a energia total é constante;

A energia cinética é:

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2 (\omega t + \phi)$$

A energia potencial elástica é:

$$U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2 (\omega t + \phi)$$

A energia total é: $E_C + U = \frac{1}{2} k A^2 = C^{\text{te}}$.

Energia do Oscilador MHS

A energia potencial é:

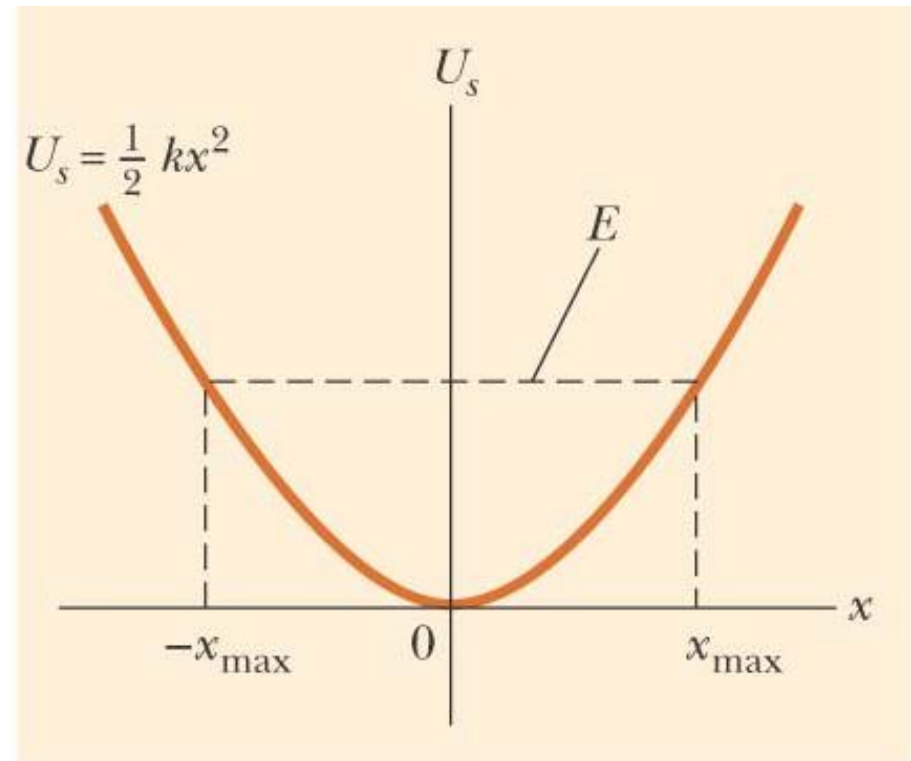
$$U = \frac{1}{2} kx^2$$

A energia mecânica total é constante:

$$U = \frac{1}{2} kx_{\max}^2$$

A energia mecânica total é proporcional ao quadrado da amplitude:

$$A = x_{\max}$$

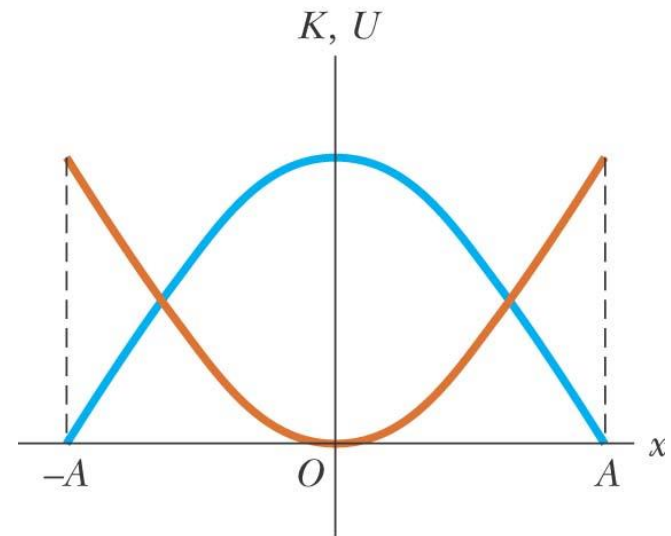


Energia do Oscilador MHS

A energia mecânica total é constante;

A energia está continuamente a ser transferida entre energia potencial acumulada na mola e energia cinética do bloco;

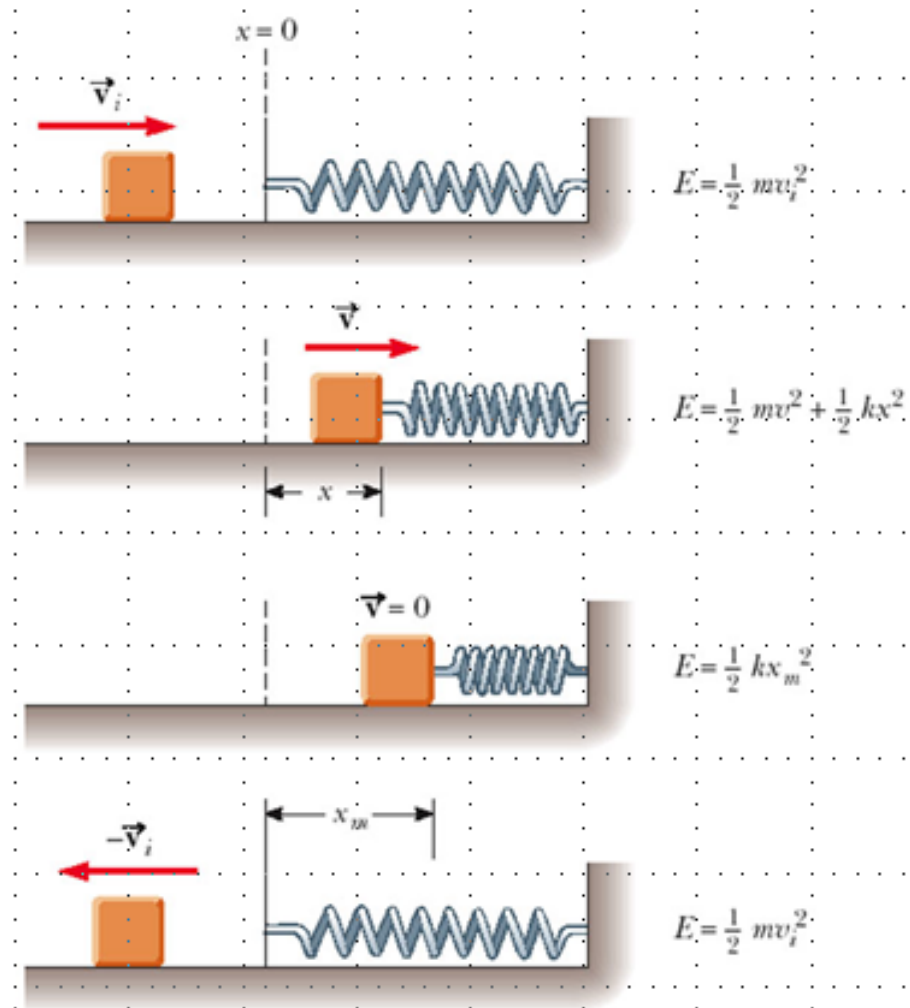
— $U = \frac{1}{2} kx^2$
— $K = \frac{1}{2} mv^2$



(b)

© 2004 Thomson/Brooks Cole

Energia do Oscilador MHS



Energia do Oscilador MHS

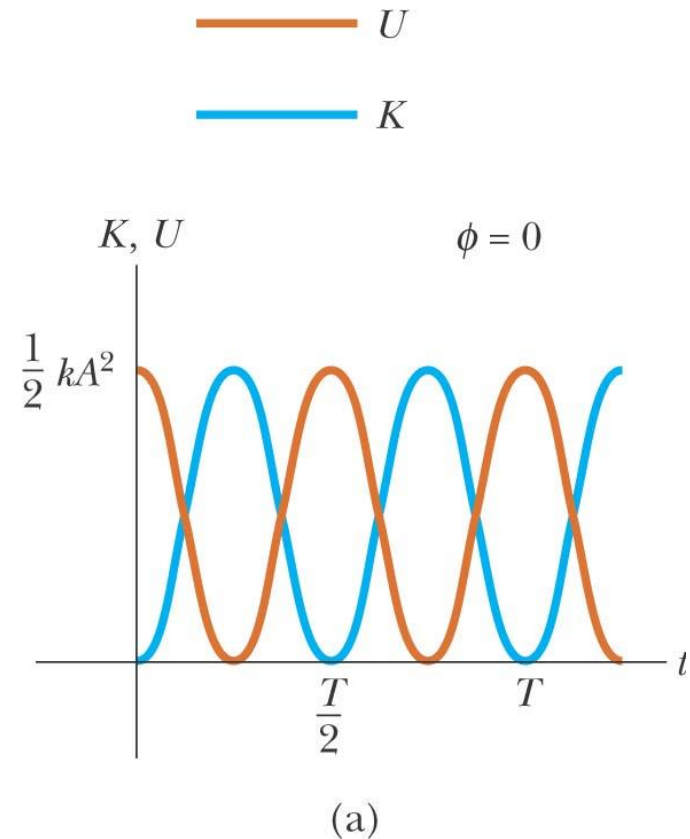
À medida que o movimento continua, a troca de energia também continua;

A energia pode ser utilizada para encontrar a velocidade;

$$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m} (A^2 - x^2)}$$

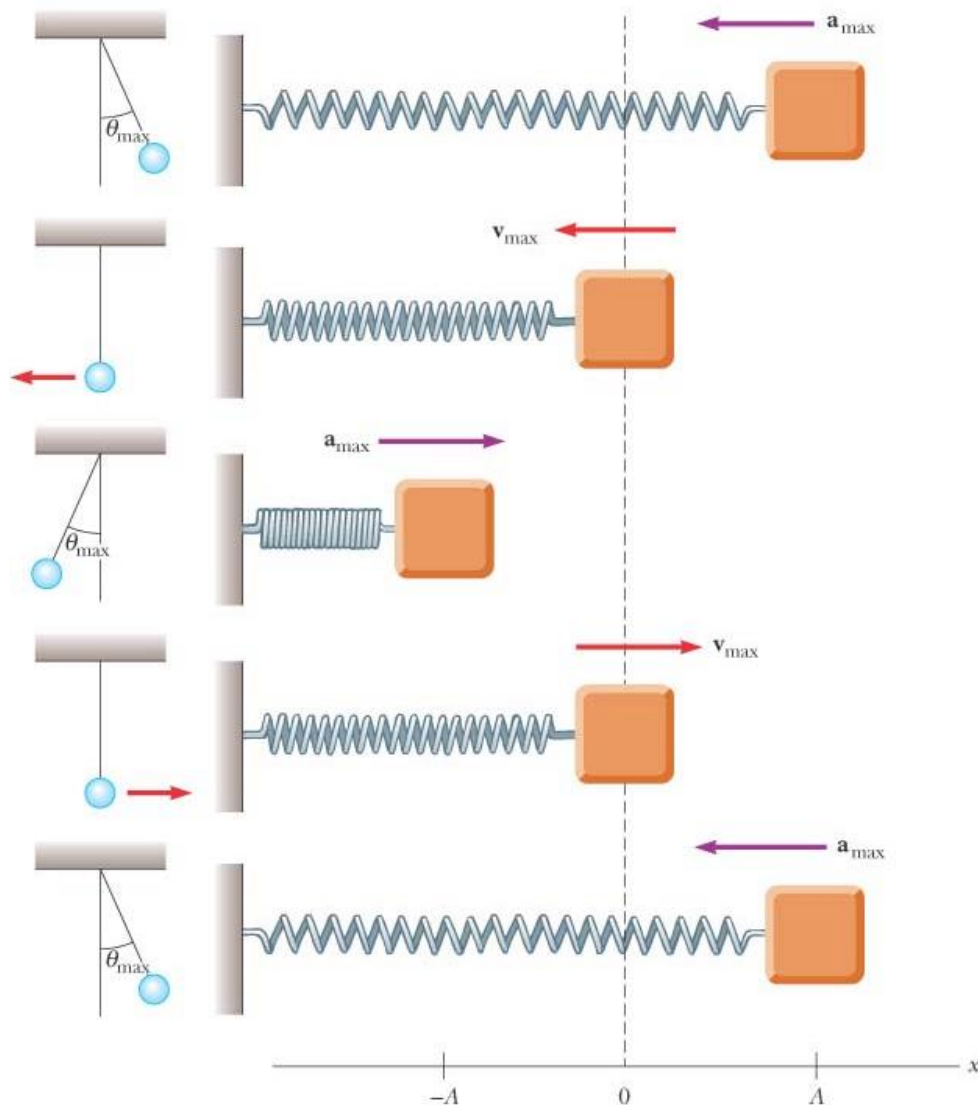
$$= \pm \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$E_c = E_t - E_p$$



© 2004 Thomson/Brooks Cole

Energia do Oscilador MHS, sumário



t	x	v	a	E_c	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2} kA^2$
$T/4$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2} kA^2$	0
$T/2$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2} kA^2$
$3T/4$	0	ωA	0	$\frac{1}{2} kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2} kA^2$

O Pêndulo Simples

Um pêndulo simples também exhibe movimento periódico;

O movimento ocorre no plano vertical e é provocado pela força gravítica;

O movimento é muito próximo de MHS se o ângulo é pequeno ($<10^\circ$).

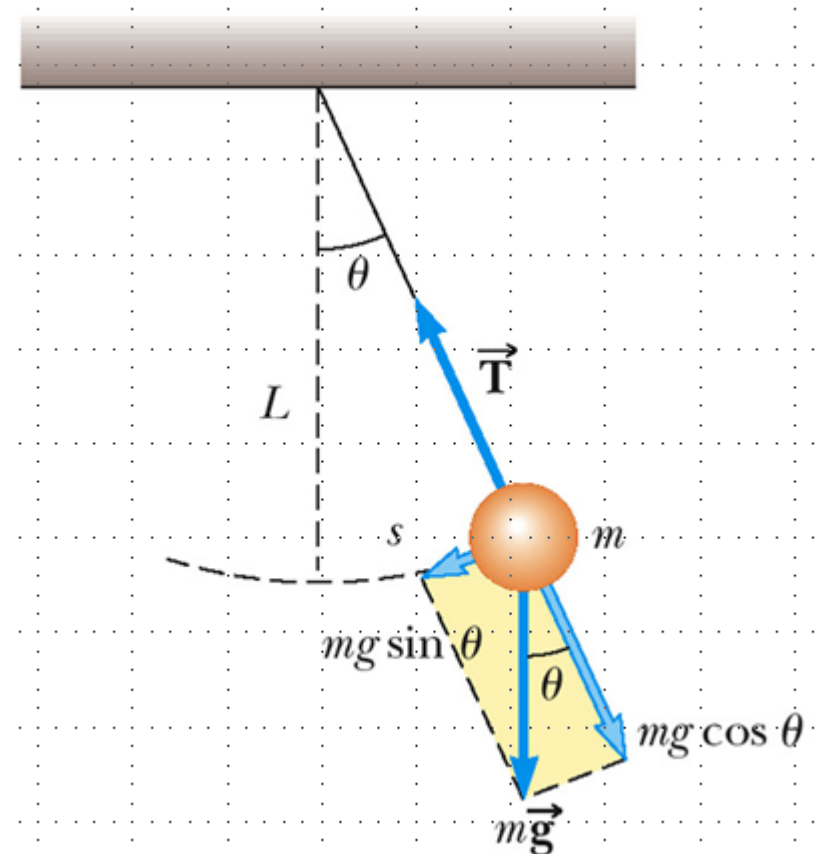
O Pêndulo Simples

A forças que actuam na esfera são $\vec{T}$ e $m\vec{g}$

$\vec{T}$ é a tensão da corda

$m\vec{g}$ é a força gravítica

A componente tangencial da força gravítica é uma força restauradora.



O Pêndulo Simples

Na direcção tangencial,

$$F_t = -mg \sin \theta = m \frac{d^2 s}{dt^2}$$

O comprimento, L , do pêndulo é constante, e para valores pequenos de θ

$$\begin{aligned} s &= L \theta \\ s &= L \theta: ds = L d\theta \end{aligned} \quad \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta = -\frac{g}{L} \theta \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Isto confirma que o movimento é MHS

O Pêndulo Simples

A função $\theta(t)$ pode ser escrita na forma:

$$\theta = \theta_{\max} \cos(\omega t + \phi)$$

A frequência angular é:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

O período é:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

O Pêndulo Simples, Sumário

O período e a frequência de um pêndulo simples dependem apenas do comprimento da corda e da aceleração da gravidade;

O período é independente da massa;

Todos os pêndulos simples com o mesmo comprimento e no mesmo local oscilam com o mesmo período:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Oscilações Amortecidas

Em muitos sistemas reais, estão presentes forças não conservativas;

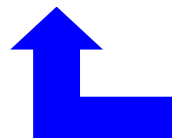
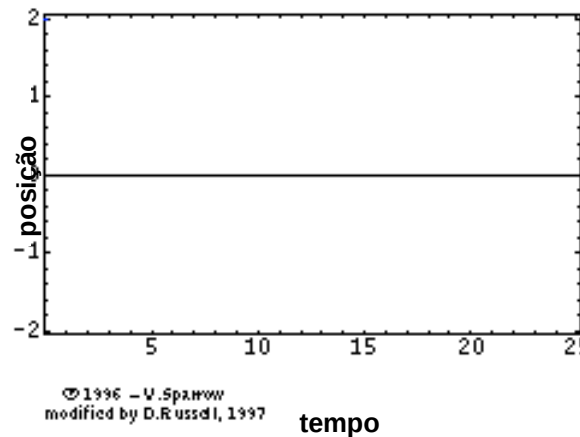
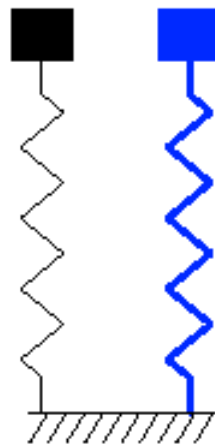
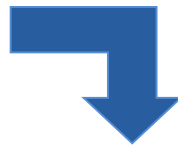
O sistema deixa de ser ideal;

O atrito é uma força não conservativa comum;

Neste caso, a energia mecânica do sistema diminui com o tempo, diz-se que o movimento é ***amortecido***.

Oscilações Amortecidas

Movimento
oscilatório
harmónico
simples

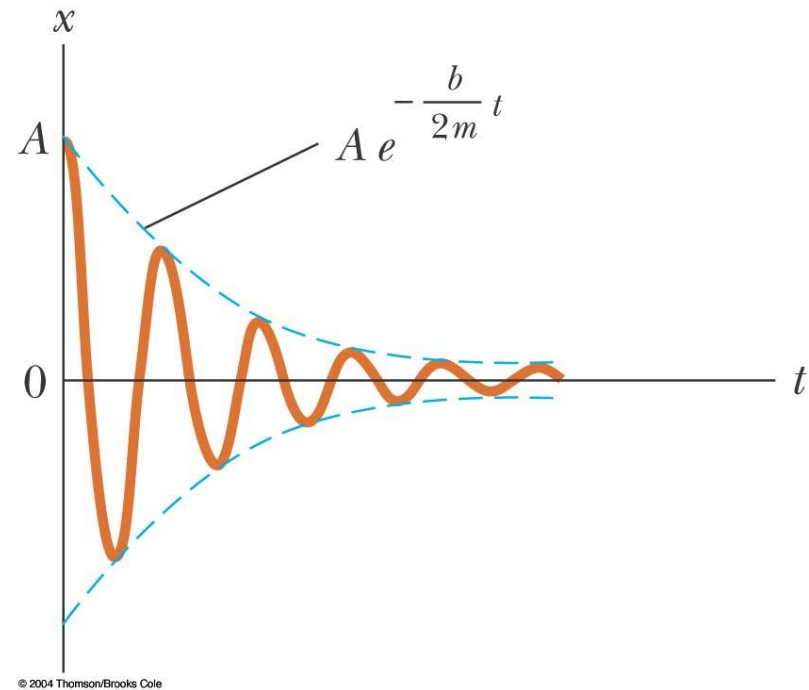


Movimento
oscilatório
harmónico
amortecido

Oscilações Amortecidas

A amplitude diminui com o tempo;

A linha azul a tracejado é o *envelope* do movimento.



Oscilações Amortecidas

A força restauradora é $-kx$;

Da Segunda Lei de Newton:

$$\Sigma F_x = -kx - bv_x = ma_x$$

Quando a força amortecedora é pequena comparada com o valor máximo da força restauradora, podemos obter uma expressão para x ;

Isto ocorre quando b é pequeno.

Oscilações Amortecidas

A posição é dada por:

$$x = Ae^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi)$$

A frequência angular será:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

Oscilações Amortecidas - Sumário

Quando a força de amortecimento é pequena, o carácter oscilatório do movimento é preservado, mas a amplitude diminui exponencialmente com o tempo;

O movimento cessará eventualmente;

A frequência angular pode assumir outra forma:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

em que ω_0 é a frequência angular na ausência da força amortecedora:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{é também chamada a } \textbf{frequência natural} \text{ do sistema}$$

Oscilações Forçadas

Podemos compensar a perda de energia num sistema amortecido, aplicando uma força exterior;

A amplitude do movimento manter-se-á constante se a energia fornecida por ciclo for exactamente igual à perda de energia mecânica resultante das forças resistivas.

Oscilações Forçadas

Após a força exterior começar a actuar, a amplitude das oscilações aumentará;

Após um intervalo de tempo suficientemente elevado,

$$E_{\text{fornecida}} = E_{\text{transformada em energia interna}}$$

Eventualmente é atingido um estado estacionário e o movimento prosseguirá com amplitude constante.

Oscilações Forçadas

A amplitude das oscilações forçadas é:

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

em que ω_0 é a frequência natural do oscilador não amortecido.

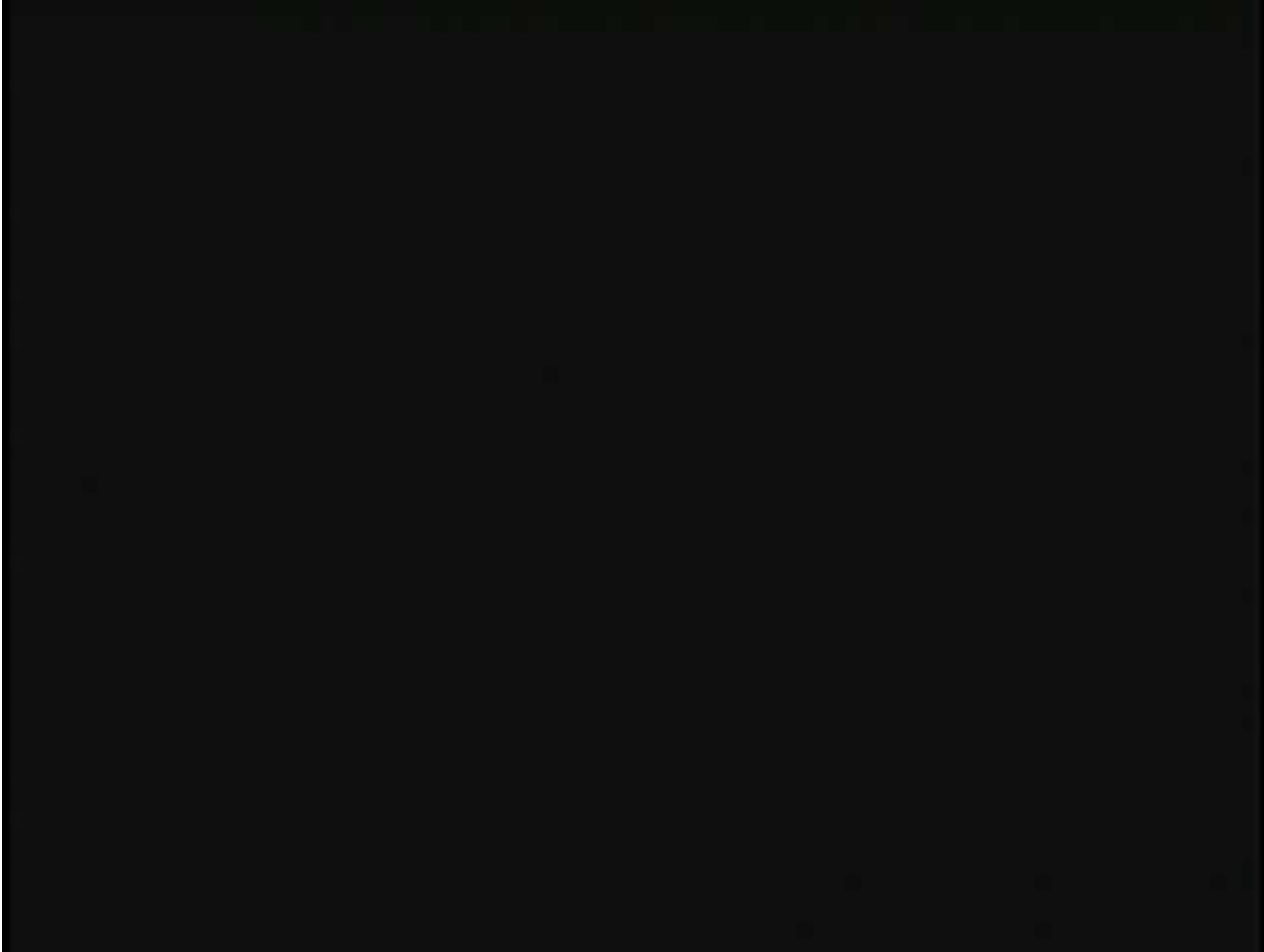
Ressonância

Quando a frequência da força exterior está próxima da frequência natural do oscilador ($\omega \approx \omega_0$), ocorre um aumento da amplitude;

Este aumento dramático da amplitude é denominado ***ressonância***;

A frequência natural, ω_0 , é também denominada *frequência de ressonância* do sistema.

Ressonância



Ressonância

Na ressonância, a força aplicada está em fase com a velocidade e a potência transferida para o oscilador é máxima;

A força aplicada e a velocidade são ambas proporcionais a $\sin(\omega t + \phi)$;

A potência transferida é $\vec{F} \cdot \vec{v}$

É máxima quando $\vec{F}$ e $\vec{v}$ estão em fase.

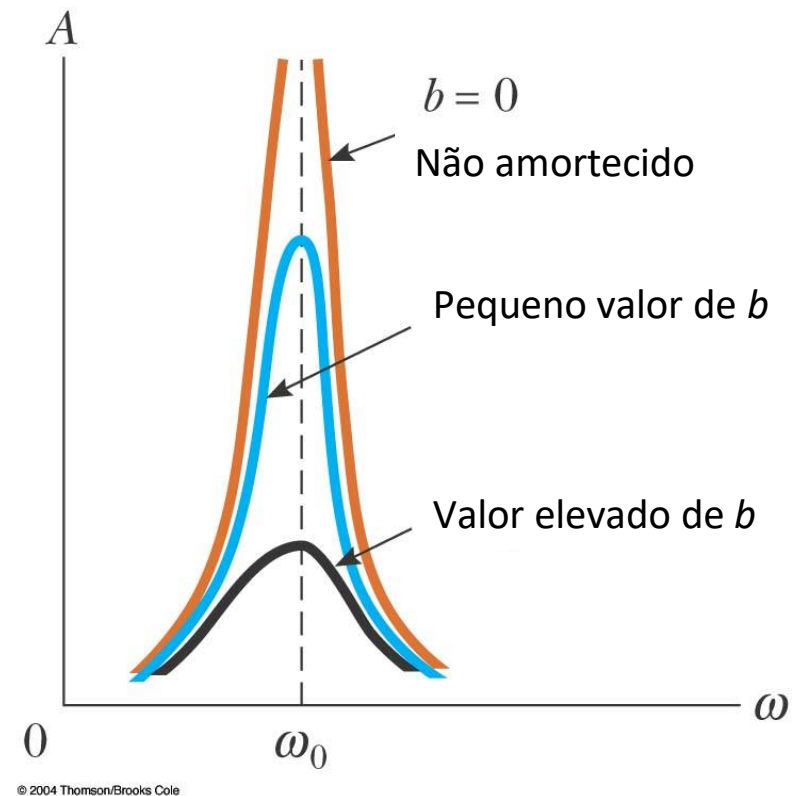
Ressonância

A Ressonância (o máximo do pico) ocorre quando a frequência da força aplicada é igual à frequência natural;

A amplitude aumenta quando o amortecimento diminui;

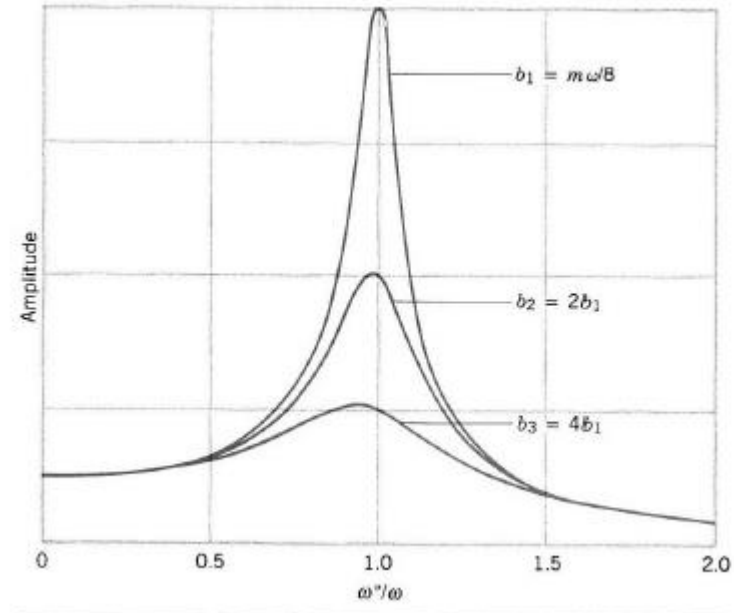
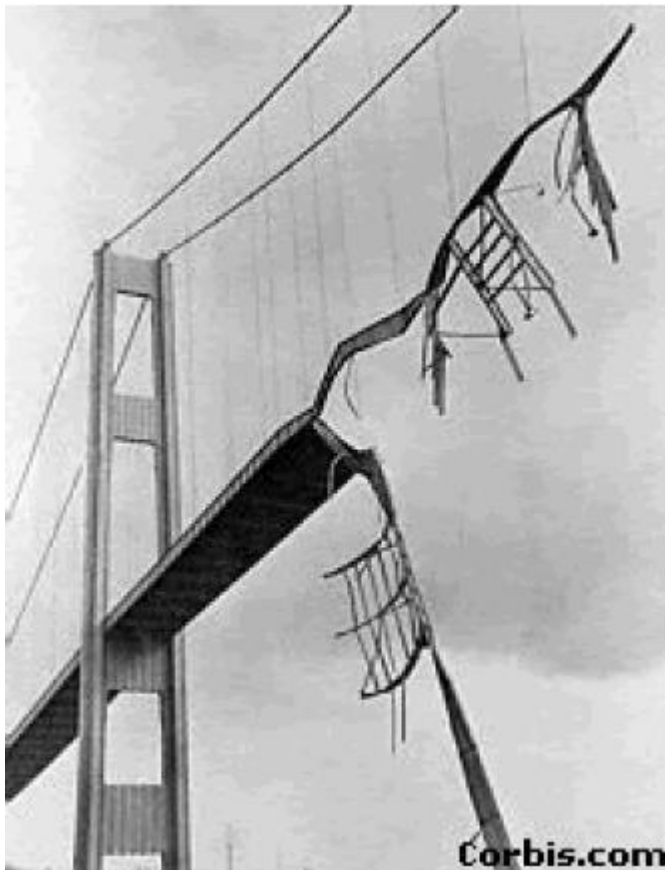
A curva alarga-se quando o amortecimento aumenta;

A forma da curva de ressonância depende de b .



Efeitos da ressonância

Colapso da ponte de Tacoma, EEUU

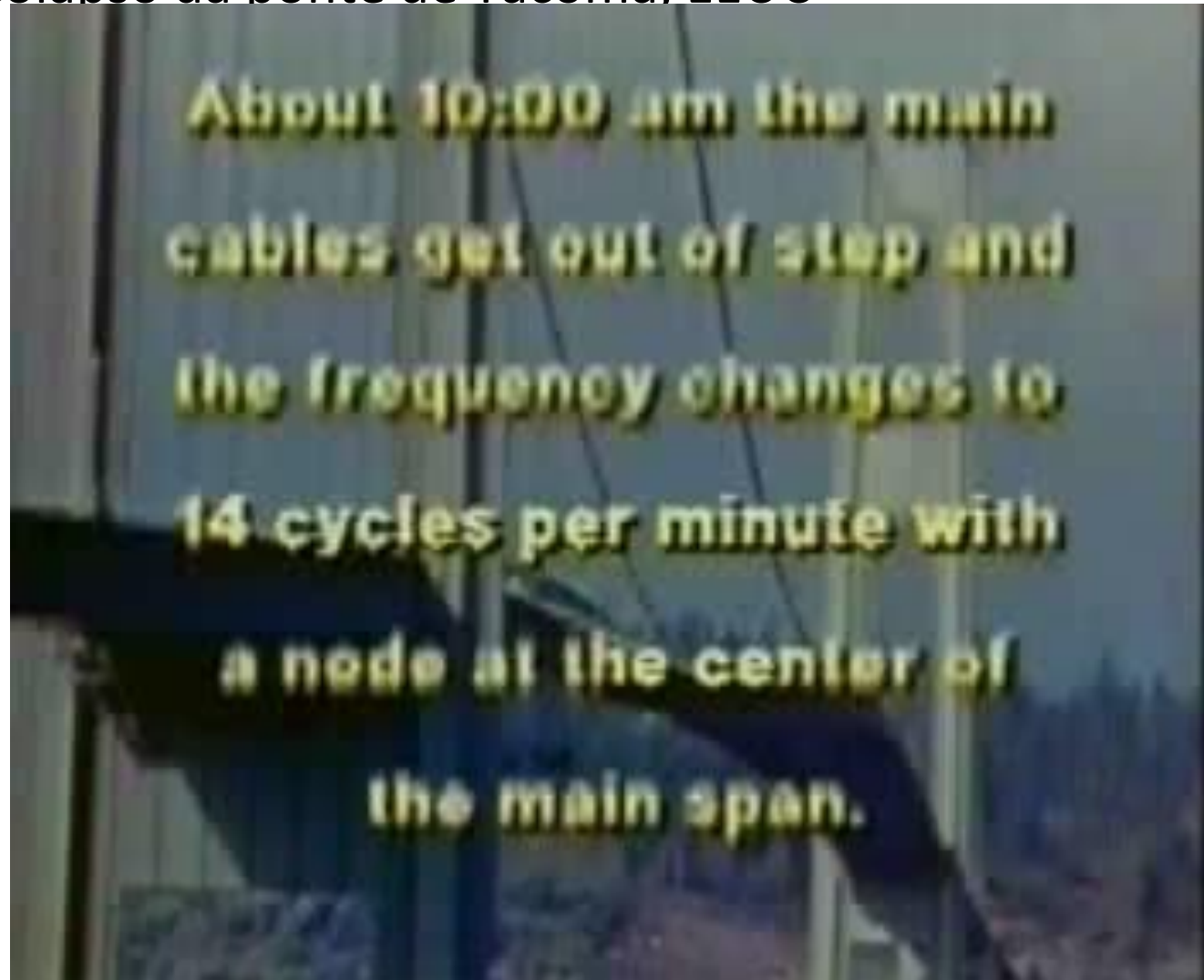


A amplitude é **máx.** quando a frequência imposta é ω_0

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

Efeitos da ressonância

Colapso da ponte de Tacoma, EEUU



MHS Exemplo 1

As condições iniciais para $t = 0$ são:

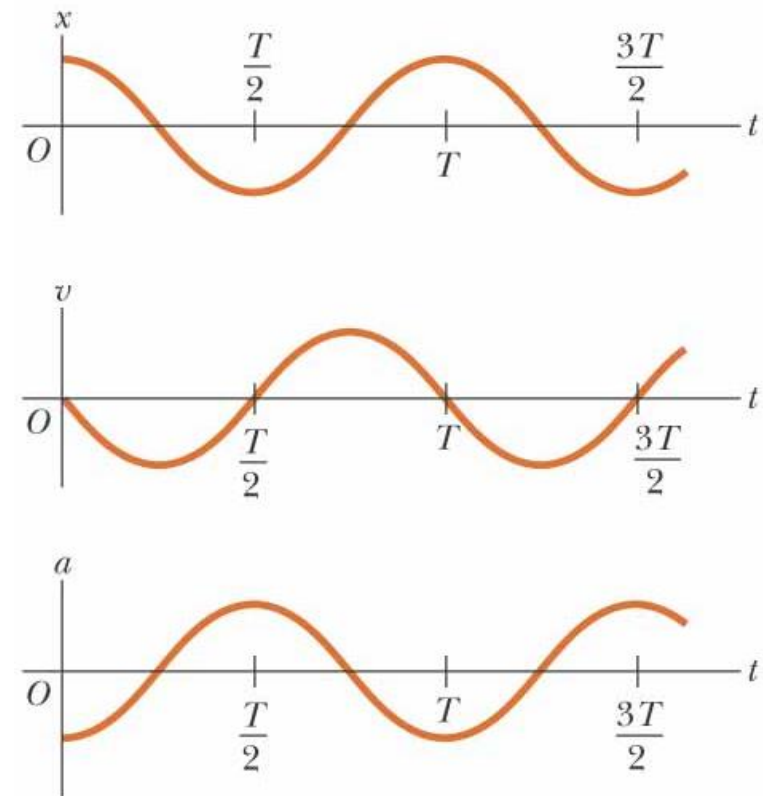
$$x(0) = A$$

$$v(0) = 0$$

Significa $\phi = 0$

Os extremos da
aceleração são $\pm \omega^2 A$;

Os máximos da velocidade
são $\pm \omega A$, quando a massa
passa na origem



MHS Exemplo 2

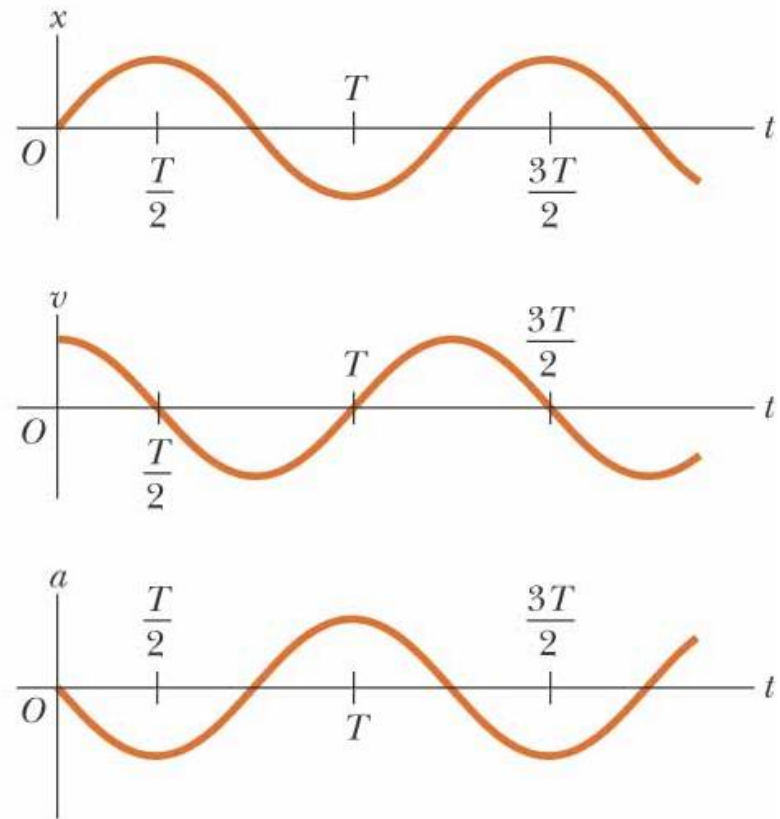
As condições para $t = 0$ são:

$$x(0) = 0$$

$$v(0) = v_i$$

Significa $\phi = -\pi/2$

O gráfico está desviado para a direita de um quarto de ciclo em relação ao gráfico de $x(0) = A$.



Fase na origem; Amplitude; Condições Iniciais

$$\begin{array}{lcl} x(t) = A \cos(\omega t + \phi) & \longrightarrow & x_0 = A \cos \phi \\ v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi) & & v_0 = -\omega A \sin \phi \end{array}$$

$$\tan \phi = -\frac{v_0}{\omega x_0} \longrightarrow \text{Duas escolhas possíveis; escolha final depende de ter em conta o sinal do } \cos \phi \text{ ou } \sin \phi$$

Depois de saber ϕ a amplitude A calcula-se de

$$A = x_0 / \cos \phi$$