Lógica Computacional

Demonstrações Formais

Dedução Natural

Introdução e Eliminação da Negação

Introdução e Eliminação da Contradição

Negação e Contradição

- Antes de apresentarmos as regras da negação no sistema de dedução natural, relembramos que no raciocínio por absurdo se pretende atingir uma contradição a partir de uma hipótese que pretendemos provar como sendo falsa.

- Geralmente a contradição é atingida quando na mesma demonstração se tem uma fórmula φ a sua "oposta", $\neg\varphi$.

- Em princípio, esta verificação seria suficiente. No entanto para tornar mais simples o sistema e separar a obtenção da contradição da negação da hipótese, introduz-se um novo símbolo proposicional, $\perp$, de contradição (ou *bottom*) que como o nome indica é falso em qualquer interpretação que se considere para os símbolos proposicionais utilizados.

- Tal como para o predicado de igualdade, e ainda para os operadores Booleanos de conjunção e de disjunção, o sistema de Dedução Natural define regras de introdução e de eliminação da contradição.

Introdução da Contradição

- No sistema de **Dedução Natural**, a contradição é introduzida após a detecção de uma fórmula e da sua negação, como referido atrás.

Introdução da $\perp$

```
    | ...
k1  | φ
    | ...
k2  | ¬φ
    | ...
k   | ⊥          Intr ⊥: k1,k2
```

Nota:
k > k1
k > k2

- Estamos agora em condições de apresentar as regras da negação, deixando a regra de eliminação da contradição para mais tarde.

Eliminação da Negação

- A regra de eliminação da negação corresponde à conhecida equivalência entre uma fórmula e e sua dupla negação, e é definida da seguinte forma.

Eliminação da $\neg$

```
      |  ...
k1    |  ¬¬φ
      |  ...
k2    |  φ          Elim ¬: k1
      |  ...
```

Nota:
k2 > k1

- Sendo φ e $\neg\neg\varphi$ fórmulas equivalentes, poder-se-ia ser tentado a considerar como regra de introdução da negação a inferência de $\neg\neg\varphi$ a partir da fórmula φ.

- No entanto esta regra não introduziria o raciocínio por absurdo como um novo método de introdução da negação. Como veremos, ele torna redundante a existência de uma regra de inferência da fórmula $\neg\neg\varphi$ a partir da fórmula φ.

Introdução da Negação

- A introdução da negação corresponde pois ao raciocínio por absurdo, que como vimos pretende inferir uma contradição a partir de uma fórmula "duvidosa", demonstrando-se assim a negação dessa fórmula. Esquematicamente,

Introdução da ¬

```
     |   ...
k1   |  | φ
     |  |----
     |  |  ...
k2   |  | ⊥
     |
k    | ¬φ          Intr ¬: k1-k2
     |  ...
```

```
Nota:
  k2 > k1
   k > k2
```

Tal como na disjunção, a introdução da negação assume uma hipótese φ que não necessita de ser justificada. De facto ela não poderia ser justificada com base nas anteriores pois pretende-se provar exactamente que ela é falsa!

Introdução da Negação

- Com esta regra de introdução pode facilmente obter-se a pseudo-regra de introdução que tínhamos referido, para se inferir $\neg\neg\varphi$ a partir da fórmula φ.

- Essa demonstração pode ser feita como indicado de seguida:

```
k1  |  φ
    |  ...
m1  |  | ¬φ
    |  |----
m2  |  | ⊥        Intr ⊥: k1, m1
k2  |  ¬¬φ       Intr ¬: m1-m2
    |  ...
```

- Estamos agora em condições de apresentar a regra de eliminação da contradição.

Eliminação da Contradição

- Como já analisamos na análise da argumentação, uma conclusão era válida se todas as interpretações que tornassem verdadeiras as premissas tornassem verdadeira a conclusão.

- Um caso especial ocorre quando as premissas são sempre falsas, isto é, quando não é possivel valorar (com V ou F) as fórmulas atómicas que aparecem nas premissas de forma a torná-las todas verdadeiras.

- Neste caso, assumimos que a **argumentação era válida**, embora obviamente **não fosse sólida**.

- Naturalmente tal não indica que uma fórmula seja verdadeira, mas apenas que num **contexto em que existe uma contradição qualquer fórmula pode ser deduzida**!

- Assim sendo, e porque se pretende que o sistema de dedução seja completo, as suas regras de inferência deverão permitir demonstrar as conclusões obtidas com argumentos válidos, o que justifica a regra de eliminação da contradição.

Eliminação da Contradição

- Esta regra de eliminação corresponde à situação descrita atrás de que a partir de premissas falsas a fórmula φ pode ser demonstrada, qualquer que ela seja!

Eliminação da ⊥

```
    |  ...
k1  |  ⊥
    |  ...
k2  |  φ        Elim ⊥: k1
    |  ...
```

- Tal como a introdução, também a regra de eliminação da ⊥ é redundante, sendo no entanto mantida no sistema para o tornar mais "simples". Com efeito, as regras de negação seriam suficientes para se atingir o mesmo efeito.

```
k   |  ⊥
m1  |  | ¬φ
    |  |----
m2  |  | ⊥      Reit : k
k1  |  ¬¬φ      Intr ¬: m1-m2
k2  |  φ        Elim ¬: k1
```

Leis de de Morgan – Negação da Conjunção

- Uma vez definidas as regras da negação e da contradição que lhe estão associadas, podemos verificar que elas são suficientes, em conjunto com as da conjunção e da disjunção, para demonstrar as leis de de Morgan.

$$\neg(A \lor B) \models \neg A \land \neg B$$

1	$\neg(A \lor B)$	
2	$\quad A$	
3	$\quad A \lor B$	Intr $\lor$: 2
4	$\quad \bot$	Intr $\bot$: 1,3
5	$\neg A$	Intr $\neg$: 2-4
6	$\quad B$	
7	$\quad A \lor B$	Intr $\lor$: 6
8	$\quad \bot$	Intr $\bot$: 1,7
9	$\neg B$	Intr $\neg$: 6-8
10	$\neg A \land \neg B$	Intr $\land$: 5,9

Leis de de Morgan - Negação da Conjunção

$$\neg A \land \neg B \models \neg(A \lor B)$$

1	$\neg A \land \neg B$	
2	$\neg A$	Elim $\land$: 1
3	$\neg B$	Elim $\land$: 1
4	$A \lor B$	
5	A	
6	$\perp$	Intr $\perp$: 2,5
7	B	
8	$\perp$	Intr $\perp$: 3,7
9	$\perp$	Elim $\lor$: 4, 5-6, 7-8
10	$\neg(A \lor B)$	Intr $\neg$: 4-9

Heurísticas

- Para demonstrar as fórmulas pretendidas há que utilizar algumas estratégias para se obter a sequência adequada de fórmulas que constituem a demonstração. Para esse efeito há que ter em conta algumas “regras” já seguidas atrás

1. Entender bem o que se pretende demonstrar
   - A partir deste entendimento poder-se-ão ...

2. Estabelecer fórmulas intermédias, para “ancorar” a demonstração
   - Muito úteis para conjunções, e não só, como vimos e veremos

3. Heurísticas genéricas:
   i. **Conjunções**: Se se pretende demonstrar $\varphi \wedge \psi$ demonstrar separadamente as fórmulas φ e ψ;
   ii. **Negações**: Se se pretende demonstrar $\neg\varphi$ demonstrar que φ é “absurdo”;
   iii. **Disjunções**: Se se pretende demonstrar $\varphi \vee \psi$ tentar demonstrar um deles;
   iv. **Em “desespero”**: Usar o raciocínio por absurdo.

- Alguns exemplos ilustrarão este processo.

Leis de de Morgan - Negação da Disjunção

$$\neg A \lor \neg B \models \neg(A \land B)$$

1	$\neg A \lor \neg B$	
2	$\quad A \land B$	
3	$\quad\quad \neg A$	
4	$\quad\quad A$	Elim $\land$: 2
5	$\quad\quad \perp$	Intr $\perp$: 3,4
6	$\quad\quad \neg B$	
7	$\quad\quad B$	Elim $\land$: 2
8	$\quad\quad \perp$	Intr $\perp$: 6,7
9	$\quad \perp$	Elim $\lor$: 1, 3-5, 6-8
10	$\neg(A \land B)$	Intr $\neg$: 2-9

Leis de de Morgan – Negação da Disjunção

$$\neg(A \land B) \models \neg A \lor \neg B$$

1	$\neg(A \land B)$	
2	$\neg(\neg A \lor \neg B)$	
3	$\neg A$	
4	$\neg A \lor \neg B$	Intr $\lor$: 3
5	$\perp$	Intr $\perp$: 2,4
6	$\neg\neg A$	Intr $\neg$: 3-5
7	A	Elim $\neg$: 6
8	$\neg B$	
9	$\neg A \lor \neg B$	Intr $\lor$: 8
10	$\perp$	Intr $\perp$: 2,9
11	$\neg\neg B$	Intr $\neg$: 8-10
12	B	Elim $\neg$: 11
13	$A \land B$	Intr $\land$: 7,12
14	$\perp$	Intr $\perp$: 1,13
15	$\neg\neg(\neg A \lor \neg B)$	Intr $\neg$: 2-14
16	$\neg A \lor \neg B$	Elim $\neg$: 15

Tautologias

- Na demonstração de tautologias, por não haver premissas, a única regra aplicável (por agora) do sistema de Dedução Natural é a regra de Introdução da Negação.
- Tal como anteriormente, na demonstração vão-se estabelecendo fórmulas intermédias e descobrindo o encadeamento de regras até as atingir.
- O processo de "construção" da demonstração pode ser ilustrado como se segue para a tautologia $A \lor \neg A$.

1	$\neg(A \lor \neg A)$	
2	A	
3	$A \lor \neg A$	Intr $\lor$: 2
4	$\perp$	Intr $\perp$: 1,3
5	$\neg A$	Intr $\neg$: 2-4
6	$A \lor \neg A$	Intr $\lor$: 5
7	$\perp$	Intr $\perp$: 1,6
8	$\neg\neg(A \lor \neg A)$	Intr $\neg$: 1-7
9	$A \lor \neg A$	Elim $\neg$: 8