

Lógica Computacional

Duração: 3h

Ano de 2013 / 14 – Exame

Grupos para Avaliar

(Todos por Omissão)

G1

G2

G3

G4

Nome:

nº:

1.1. (5 valores) Considere as seguintes frases (assuma que uma pessoa só tem um carro)

- O carro da Dora é verde, tal como o do Ivo.
- O Ivo e a Dora nasceram na mesma data.
- A Dora e a Vera não são ambas louras.

a) Apresente uma assinatura $\Sigma = \langle NP, NF_0 \cup NF_1 \rangle$ de uma linguagem de 1ª ordem que lhe permita escrever fórmulas de 1ª ordem correspondentes

NF_0 : Constantes	NF_1 : Funções	NP : Predicados

b) Traduza para fórmulas de 1ª ordem as frases acima indicadas:

i) O carro da Dora é verde, tal como o do Ivo.

ii) O Ivo e a Dora nasceram na mesma data.

iii) A Dora e a Vera não são ambas louras.

1.2. (2 valores) Classifique cada uma das fórmulas abaixo, indicando no quadro (com S e N, respectivamente) se são ou não

V-TT: Verdade Tautológica;

V-FO: Verdade Lógica

V-TW: Verdade Analítica (Tarski)

P-TT: Possibilidade Tautológica;

P-FO: Possibilidade Lógica;

P-TW: Possibilidade Analítica (Tarski)

$(a = b \wedge \text{Cube}(a)) \rightarrow \neg \text{Tet}(b)$
 $\text{SameShape}(a, b) \rightarrow (\text{Tet}(a) \wedge \text{Cube}(b))$
 $(\text{Tet}(a) \wedge a = b) \rightarrow \text{Cube}(b)$

V-TT	V-FO	V-TW	P-TT	P-FO	P-TW

1.3. (3 valores) Considerando os mundos e a linguagem de Tarski, indique se os seguintes argumentos são válidos tautologica (Val-TT), logica (Val-FO) e/ou analiticamente (nos mundos de Tarski Val-TW).

{Premissa 1, ..., Premissa n} |= Conclusão
{ Larger(a, c), a = b } |= Smaller(c, b)
{ ¬Large(a), Large(b) } |= a ≠ b
{ Tet(a) ∨ Tet(b), ¬Tet(b) } |= Tet(a)

Val-TT	Val-FO	Val-TW

1.4. (5 valores) Considere as fórmulas **P1**: $A \rightarrow (B \wedge C)$ e **P2**: $B \rightarrow (A \wedge C)$, bem como as fórmulas **C1**: $\neg C \rightarrow (A \leftrightarrow B)$ e **C2**: $(A \vee B) \leftrightarrow C$.

a) Preencha a seguinte tabela de verdade relativas às fórmulas **P1**, **P2**, **C1** e **C2**.

A	B	C	$A \rightarrow (B \wedge C)$	$B \rightarrow (A \wedge C)$	$\neg C \rightarrow (A \leftrightarrow B)$	$(A \vee B) \leftrightarrow C$
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

b) Por análise da tabela, indique justificando se as fórmulas **C1** e **C2** são ou não consequências tautológicas das premissas P1 e P2.

Justificação:

1.5. (5 valores) Considere a fórmula $\neg((\neg A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \vee C))$. Converta-a para as formas normais conjuntiva (CNF) e disjuntiva (DNF), simplificando-as da forma mais conveniente.

Grupo 2

(corresponde ao 2º teste)

2.1. (4 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições

a) Um dos objectos **a** ou **b** é um cubo e está à frente do outro

b) Os tetraedros **a** e **b** se não estiverem em linhas diferentes são o mesmo objecto.

c) O menor dos objectos **b** e **c** (se um deles o for) não é um cubo.

d) Se os blocos **a** e **b** estiverem na mesma coluna então têm o dodecaedro **d** entre eles.

2.2. (4 valores) Considere os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiro de 3×3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições

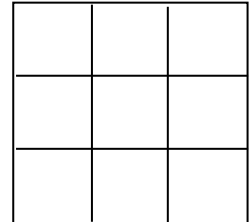
1. $\neg (\text{SameShape}(b, c) \vee \text{SameShape}(a, c) \vee \text{SameShape}(a, b))$

2. $\neg \text{FrontOf}(a, c) \wedge \neg \text{FrontOf}(c, a)$

3. $\text{Tet}(a) \wedge \text{LeftOf}(a, b)$

4. $\text{Between}(b, a, c) \vee (\text{Tet}(a) \wedge \text{Tet}(b))$

5. $\neg \text{Dodec}(c) \rightarrow (\text{Cube}(a) \wedge \text{Cube}(b))$



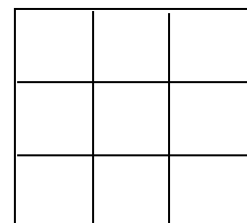
2.3. (3 valores) Considere o seguinte argumento na linguagem de Tarski, e a respectiva demonstração.

a) Verifique que a demonstração está *errada*, e indique o(s) passo(s) em que as regras do sistema de Dedução Natural não foram corretamente utilizadas

1.	$\text{Tet}(b) \rightarrow \text{Dodec}(a)$	
2.	$\neg (\text{Cube}(a) \vee \text{Cube}(b))$	
3.	$\text{Cube}(a)$	
4.	$\neg \text{Cube}(a)$	Elim $\vee$: 2
5.	$\perp$	Intr $\perp$: 3, 4
6.	$\text{Tet}(b)$	Elim $\perp$: 5
7.	$\text{Dodec}(a)$	Elim $\rightarrow$: 1, 6

Erro(s):

b) Indique no tabuleiro ao lado um contra-exemplo que mostre que o argumento não é válido



assinaladas

1.	$A \leftrightarrow (B \rightarrow C)$	
2.	$\neg A \vee \neg C$	
3.	$\neg A$	
4.	B	
5.	$\neg A$	Reit : 3
6.		Intr $\rightarrow$: 4 - 5
7.	$\neg C$	
8.	B	
9.	A	
10.	$B \rightarrow C$	
11.		Elim $\rightarrow$: 8 , 10
12.	$\perp$	Intr $\perp$: 7 , 11
13.	$\neg A$	
14.		Intr $\rightarrow$: 8 - 13
15.	$B \rightarrow \neg A$	

Dedução Natural

1.	$\neg(A \wedge B \wedge C)$
2.	$D \rightarrow A$
$(B \wedge D) \rightarrow \neg C$	

Grupo 3

(corresponde ao 3º teste)

3.1. (5 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições

a) Os objectos pequenos têm formas diferentes.

b) Existe um tetraedro à frente de todos os dodecaedros.

c) Não há cubos com um tetraedro entre eles.

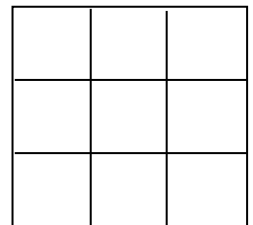
d) Apenas objectos maiores que o cubo **a** são tetraedros.

e) Todos os cubos, e apenas eles, estão entre os blocos a e b.

f) Os maiores blocos (i.e. que não têm outros maiores que eles) são cubos.

3.2. (4 valores) Considere os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiro de 3×3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições

1. $\text{Cube}(c) \wedge \forall y (y \neq c \rightarrow \text{LeftOf}(c, y))$
2. $\exists x (\text{Tet}(x) \wedge \forall y (\text{SameCol}(y, x) \rightarrow \text{SameShape}(y, x)))$
3. $\text{Tet}(a) \wedge \forall x (x = a \vee \text{BackOf}(x, a))$
4. $\neg ((\text{Cube}(b) \wedge \text{Cube}(c) \wedge b \neq c) \rightarrow \neg \text{SameRow}(b, c))$
5. $\exists x (\text{Cube}(x) \wedge \forall y (\text{Tet}(y) \rightarrow \text{LeftOf}(y, x)))$
6. $\neg \forall x (\text{Tet}(x) \rightarrow x = a)$



3.3. (2 valores) O seguinte argumento é válido analiticamente nos Mundos de Tarski.

- | | |
|---|--|
| 1 | $\neg \exists x (\text{Cube}(x) \wedge \neg \text{Medium}(x))$ |
| 2 | $\forall x (\text{Dodec}(x) \rightarrow \text{Large}(x))$ |
| 3 | $\forall x (\text{Tet}(x) \rightarrow \text{Small}(x))$ |

Assinale em baixo, quais os axiomas de Tarski que seria necessário colocar explicitamente como premissas para que o argumento fosse válido logicamente (válido-FO).

- ☐ $\forall x (\text{Large}(x) \vee \text{Medium}(x) \vee \text{Small}(x))$
- ☐ $\forall x \forall y (\text{Medium}(x) \wedge \text{Larger}(y, x) \rightarrow \text{Large}(y))$
- ☐ $\forall x \forall y (\text{Medium}(x) \wedge \text{Larger}(x, y) \rightarrow \text{Small}(y))$
- ☐ $\neg \exists x (\text{Medium}(x) \wedge \text{Small}(x))$
- ☐ $\forall x (\text{Tet}(x) \vee \text{Cube}(x) \vee \text{Dodec}(x))$
- ☐ $\neg \exists x (\text{Tet}(x) \wedge \text{Cube}(x))$
- ☐ $\neg \exists x (\text{Tet}(x) \wedge \text{Dodec}(x))$
- ☐ $\neg \exists x (\text{Cube}(x) \wedge \text{Dodec}(x))$

3.4. (4 valores) Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas.

1	$\forall x \text{ (Cube}(x) \rightarrow \exists y \text{ (Adjoins}(x,y) \wedge \text{Small}(y))}$	
2	$\neg \exists x \text{ (Medium}(x) \wedge \text{Small}(x))$	
3	$\forall x \forall y \text{ (Adjoins}(x,y) \wedge \neg \text{Medium}(y)) \rightarrow \text{Medium}(x))$	
4		
5	Cube(a)	
6	Cube(a) $\rightarrow \exists y \text{ (Adjoins}(a,y) \wedge \text{Small}(y))$	
7	$\exists y \text{ (Adjoins}(a,y) \wedge \text{Small}(y))$	Elim $\rightarrow$: 5, 6
8		
9	Small(b)	Elim $\wedge$: 8
10	Medium(b)	
11	Medium(b) $\wedge$ Small(b)	Intr $\wedge$: 9, 10
12		Intr $\exists$: 11
13	$\perp$	
14	$\neg \text{Medium}(b)$	Intr $\neg$: 10, 13
15		
16	Adjoins(a,b) $\wedge \neg \text{Medium}(b)$	Intr $\wedge$: 14, 15
17	(Adjoins(a,b) $\wedge \neg \text{Medium}(b)) \rightarrow \text{Medium}(a)$	Elim $\forall$: 3
18	Medium(a)	Elim $\rightarrow$: 16, 17
19	Medium(a)	
20	Cube(a) $\rightarrow \text{Medium}(a)$	Intr $\rightarrow$: 5 - 19
21	$\forall x \text{ (Cube}(x) \rightarrow \text{Medium}(x))$	Intr $\forall$: 4 - 20

3.5. (5 valores) Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural.

[illegible]

Grupo 4

(corresponde ao 4º teste)

4.1. (2 valores) Verifique se o conjunto S de cláusulas Horn abaixo indicado é satisfazível.

$$1. A \rightarrow E$$

$$2. (A \wedge B) \rightarrow C$$

$$3. T \rightarrow B$$

$$4. (D \wedge F) \rightarrow E$$

$$5. (B \wedge E) \rightarrow F$$

$$6. B \rightarrow C$$

$$7. (B \wedge C) \rightarrow D$$

$$8. A \rightarrow \perp$$

4.2. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento em lógica proposicional.

$$P1 \quad A \leftrightarrow (B \rightarrow C)$$

$$P2 \quad \neg A \vee \neg C$$

$$X \quad B \rightarrow \neg A$$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal.

b) Mostre que as cláusulas obtidas em a) são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

4.3. (2 valores) Converta as fórmulas abaixo para a forma Prenex, com a matriz na forma normal CNF.

$$a) \neg \forall x (Cube(x) \rightarrow \exists y (Tet(y) \wedge Adjoins(x, y)))$$

$$b) \exists x (Cube(x) \wedge \forall y (Tet(y) \rightarrow LeftOf(x, y)))$$

4.4. (1 valor) Coloque na forma clausal, incluindo a Skolemização, a seguinte fórmula:

$$\forall x ((Cube(x) \wedge \forall y SameCol(x, y)) \rightarrow (Small(x) \wedge \exists z SameSize(x, z)))$$

4.5. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento de lógica de predicados de 1ª ordem.

P1	$\forall x \text{ (Cube}(x) \rightarrow \exists y \text{ (Adjoins}(x,y) \wedge \text{Small}(y))$
P2	$\neg \exists x \text{ (Medium}(x) \wedge \text{Small}(x))$
P3	$\forall x \forall y \text{ (Adjoins}(x,y) \wedge \neg \text{Medium}(y)) \rightarrow \text{Medium}(x)$
C	$\forall x \text{ (Cube}(x) \rightarrow \text{Medium}(x))$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal

b) Mostre que as cláusulas obtidas são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

4.6. (5 valores) Como pode verificar, $P(3) = 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 = 3 \times 4 \times 5 / 3$. Mais geralmente, prove por indução sobre os números naturais que $P(n) = \sum_{i=1}^n i * (i + 1) = (n)(n + 1)(n + 2) / 3$.

Passo Base:

Passo de Indução: