Lógica Computacional

Duração: 3h

Ano de 2013 / 14 – Exame

Grupos para Avaliar
(Todos por Omissão)

G1	G2	G3	G4

Nome:	**nº:**

1.1. (5 valores) Considere as seguintes frases (assuma que uma pessoa só tem um carro)

- O carro da Dora é verde, tal como o do Ivo.
- O Ivo e a Dora nasceram na mesma data.
- A Dora e a Vera não são ambas louras.

a) Apresente uma assinatura Σ = <NP, $NF_0 \cup NF_1$> de uma linguagem de 1ª ordem que lhe permita escrever fórmulas de 1ª ordem corespondentes

NF_0: Constantes	*NF_1: Funções*	*NP: Predicados*
ivo dora vera verde	carroDe/1 dataDeNascimento/1	CorDe/2 =/2 Loura/1

b) Traduza para fórmulas de 1ª ordem as frases acima indicadas:

i) O carro da Dora é verde, tal como o do Ivo.

CorDe(carroDe(dora), verde) ∧ CorDe(carroDe(ivo), verde)

ii) O Ivo e a Dora nasceram na mesma data.

dataDeNascimento(dora) = dataDeNascimento(ivo)

iii) A Dora e a Vera não são ambas louras.

¬Loura(dora) ∨ ¬Loura(vera)

1.2. (2 valores) Classifique cada uma das fórmulas abaixo, indicando no quadro (com S e N, respectivamente) se são ou não

V-TT: Verdade Tautológica; V-FO: Verdade Lógica V-TW: Verdade Analítica (Tarski)
P-TT: Possibilidade Tautológica; P-FO: Possibilidade Lógica; P-TW: Pssibilidade Analítica (Tarski)

	V-TT	V-FO	V-TW	P-TT	P-FO	P-TW
(a = b ∧ Cube(a)) → ¬Tet(b)	N	N	S	S	S	S
SameShape(a,b) → (Tet(a) ∧ Cube(b))	N	N	N	S	S	N
(Tet(a) ∧ a = b) → Cube(b)	N	N	N	S	S	N

1.3. (3 valores) Considerando os mundos e a linguagem de Tarski, indique se os seguintes argumentos são válidos tautologica (Val-TT), logica (Val-FO) e/ou analiticamente (nos mundos de Tarski Val-TW).

{Premissa 1, ..., Premissa n } |= Conclusão	Val-TT	Val-FO	Val-TW
{ Larger(a,c), a = b } |= Smaller(c,b)	N	N	S
{ ¬Large (a), Large(b) } |= a ≠ b	N	S	S
{ Tet(a) ∨ Tet(b), ¬Tet(b)} |= Tet(a)	S	S	S

1.4. (5 valores) Considere as fórmulas **P1: `A → (B ∧ C)`** e **P2: `B → (A ∧ C)`,** bem como as fórmulas **C1: `¬C → (A ↔ B)`** e **C2: `(A ∨ B) ↔ C`.**

a) Preencha a seguinte tabela de verdade relativas às fórmulas **P1**, **P2**, **C1** e **C2**.

A	B	C	A → (B ∧ C)		B → (A ∧ C)		¬C → (A ↔ B)			(A ∨ B) ↔ C	
V	**V**	**V**	**V**	V	**V**	V	F	**V**	V	V	**V**
V	**V**	**F**	**F**	F	**F**	F	V	**V**	V	V	**F**
V	**F**	**V**	**F**	F	**V**	V	F	**V**	F	V	**V**
V	**F**	**F**	**F**	F	**V**	F	V	**F**	F	V	**F**
F	**V**	**V**	**V**	V	**F**	F	F	**V**	F	V	**V**
F	**V**	**F**	**V**	F	**F**	F	V	**F**	F	V	**F**
F	**F**	**V**	**V**	F	**V**	F	F	**V**	V	F	**F**
F	**F**	**F**	**V**	F	**V**	F	V	**V**	V	F	**V**

b) Por análise da tabela, indique justificando se as fórmulas **C1** e **C2** são ou não consequências tautológicas das premissas P1 e P2.

Justificação:

A fórmula C1 é consequência tautológica das premissas P1 e P2 pois sempre que estas são verdadeiras ela também o é.

Já a fórmula C2 é falsa numa interpretações (A = B = Falso e C = Verdade) em que as premissas são verdadeiras. Assim sendo, C2 não é consequência tautológica de P1 e P2.

1.5. **(5 valores)** Considere a fórmula `¬((¬A → B) → ¬(A ∨ C))`. Converta-a para as formas normais conjuntiva (CNF) e disjuntiva (DNF), simplificando-as da forma mais conveniente.

`¬((¬A → B) → ¬(A ∨ C))`

⇔ `¬(¬(¬A → B) ∨ ¬(A ∨ C))`	Equivalência de →
⇔ `¬¬(¬A → B) ∧ ¬¬(A ∨ C)`	Leis de de Morgan
⇔ `(¬A → B) ∧ (A ∨ C)`	Dupla Negação
⇔ `(¬¬A ∨ B) ∧ (A ∨ C)`	Equivalência de →
⇔ `(A ∨ B) ∧ (A ∨ C)`	Dupla Negação

Esta fórmula já está em CNF

⇔ `(A ∧ A) ∨ (A ∧ C) ∨ (B ∧ A) ∨ (B ∧ C)`	Distribuição
⇔ `A ∨ (A ∧ C) ∨ (B ∧ A) ∨ (B ∧ C)`	Simplificação
⇔ `A ∨ (B ∧ C)`	Simplificação

Esta fórmula está em DNF

Grupo 2

(corresponde ao 2º teste)

2.1. (4 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições

a) Um dos objectos **a** ou **b** é um cubo e está à frente do outro

(Cube(a) ∧ FrontOf(a,b)) ∨ (Cube(b) ∧ FrontOf(b,a))

b) Os tetraedros a e b se não estiverem em linhas diferentes são o mesmo objecto.

Tet(a) ∧ Tet(b) ∧ (SameRow(a,b) → a = b)

c) O menor dos objectos **b** e **c** (se um deles o for) não é um cubo.

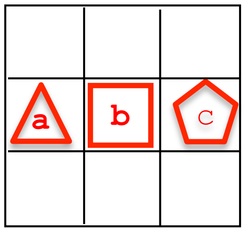
(Smaller(b,c) → ¬Cube(b)) ∧ (Smaller(c,b) → ¬Cube(c))

d) Se os blocos **a** e **b** estiverem na mesma coluna então têm o dodecaedro **d** entre eles.

Dodec(d) ∧ (SameCol(a,b) → Between(d,a,b))

2.2. **(4 valores)** Considere os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiro de 3 × 3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições

1. ¬(SameShape(b,c) ∨ SameShape(a,c) ∨ SameShape(a,b))
2. ¬FrontOf(a,c) ∧ ¬FrontOf(c,a)
3. Tet(a) ∧ LeftOf(a,b)
4. Between(b,a,c) ∨ (Tet(a) ∧ Tet(b))
5. ¬Dodec(c) → (Cube(a) ∧ Cube(b))



2.3. (3 valores) Considere o seguinte argumento na linguagem de Tarski, e a respectiva demonstração.

a) Verifique que a demonstração está *errada*, e indique o(s) passo(s) em que as regras do sistema de Dedução Natural não foram corretamente utilizadas

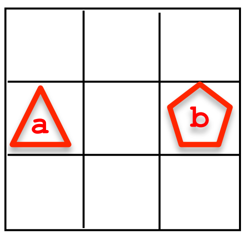
```
1. | Tet(b) → Dodec(a)
2. | ¬(Cube(a) ∨ Cube(b))
   |---------------------
3. | | Cube(a)
   | |--------
4. | | ¬ Cube(a)            Elim ∨: 2
5. | | ⊥                    Intr ⊥: 3, 4
6. | Tet(b)                 Elim ⊥ : 5
7. | Dodec(a)               Elim → : 1, 6
```

Erro(s):

No passo 4, não existe tal regra de eliminação da disjunção, embora a inferência seja válida.

No passo 6, a eliminação da ⊥ não pode ser feita fora do contexto em que ocorre, sendo a inferência não válida, invalidando a demonstração.

b) Indique no tabuleiro ao lado um contra-exemplo que mostre que o argumento não é válido



2.4. (4 valores) Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas

1.	$A \leftrightarrow (B \to C)$	
2.	$\neg A \vee \neg C$	
3.	$\neg A$	
4.	B	
5.	$\neg A$	Reit : 3
6.	$B \to \neg A$	Intr $\to$: 4 - 5
7.	$\neg C$	
8.	B	
9.	A	
10.	$B \to C$	Elim $\leftrightarrow$: 1
11.	C	Elim $\to$: 8 , 10
12.	$\perp$	Intr $\perp$: 7 , 11
13.	$\neg A$	Intr $\neg$: 9 - 12
14.	$B \to \neg A$	Intr $\to$: 8 - 13
15.	$B \to \neg A$	Elim $\vee$: 2, 3 - 6 , 7 - 14

2.5. (5 valores) Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural

1.	$\neg(A \wedge B \wedge C)$	
2.	$D \to A$	
3.	$B \wedge D$	
4.	B	Elim $\wedge$: 3
5.	D	Elim $\wedge$: 3
6.	A	Elim $\to$: 2, 5
7.	C	
8.	$A \wedge B \wedge C$	Intr $\wedge$: 4 , 6 , 7
9.	$\perp$	Intr $\perp$: 1 , 8
10.	$\neg C$	Intr $\neg$: 7 - 9
11.	$(B \wedge D) \to \neg C$	Intr $\to$: 3 - 10

Grupo 3

(corresponde ao 3º teste)

3.1. (5 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições

a) Os objectos pequenos têm formas diferentes.

$\forall x\ \forall y\ ((\text{Small}(x) \land \text{Small}(y) \land x \neq y) \rightarrow \neg \text{SameShape}(x,y))$

b) Existe um tetraedro à frente de todos os dodecaedros.

$\exists x\ (\text{Tet}(x) \land \forall y\ (\text{Dodec}(y) \rightarrow \text{FrontOf}(x,y)))$

c) Não há cubos com um tetraedro entre eles.

$\neg \exists x\ \exists y\ \exists z\ (\text{Cube}(x) \land \text{Cube}(y) \land \text{Tet}(z) \land \text{Between}(z,x,y))$

d) Apenas objectos maiores que o cubo **a** são tetraedros.

$\text{Cube}(a) \land \forall x\ (\text{Larger}(x,a) \rightarrow \text{Tet}(x))$

e) Todos os cubos, e apenas eles, estão entre os blocos a e b.

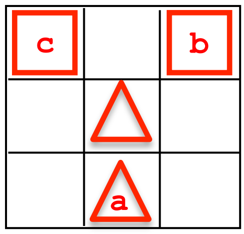
$\forall x\ (\text{Cube}(x) \leftrightarrow \text{Between}(x,a,b))$

f) Os maiores blocos (i.e. que não têm outros maiores que eles) são cubos.

$\forall x\ (\neg \exists y\ \text{Larger}(y,x) \rightarrow \text{Cube}(x))$

3.2. (4 valores) Considere os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiro de 3 × 3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições

1. $\text{Cube}(c) \land \forall y\ (y \neq c \rightarrow \text{LeftOf}(c,y))$
2. $\exists x\ (\text{Tet}(x) \land \forall y\ (\text{SameCol}(y,x) \rightarrow \text{SameShape}(y,x))$
3. $\text{Tet}(a) \land \forall x\ (x = a \lor \text{BackOf}(x,a))$
4. $\neg((\text{Cube}(b) \land \text{Cube}(c) \land b \neq c) \rightarrow \neg \text{SameRow}(b,c))$
5. $\exists x\ (\text{Cube}(x) \land \forall y\ (\text{Tet}(y) \rightarrow \text{LeftOf}(y,x))$
6. $\neg \forall x\ (\text{Tet}(x) \rightarrow x = a)$



3.3. (2 valores) O seguinte argumento é válido analiticamente nos Mundos de Tarski.

1 | $\neg \exists x\ (\text{Cube}(x) \land \neg \text{Medium}(x))$
2 | $\forall x\ (\text{Dodec}(x) \rightarrow \text{Large}(x))$
---
3 | $\forall x\ (\text{Tet}(x) \rightarrow \text{Small}(x))$

Assinale em baixo, quais os axiomas de Tarski que seria necessário colocar explicitamente como premissas para que o argumento fosse válido logicamente (válido-FO).

- [x] $\forall x\ (\text{Large}(x) \lor \text{Medium}(x) \lor \text{Small}(x))$
- [ ] $\forall x\ \forall y\ (\text{Medium}(x) \land \text{Larger}(y,x) \rightarrow \text{Large}(y))$
- [ ] $\forall x\ \forall y\ (\text{Medium}(x) \land \text{Larger}(x,y) \rightarrow \text{Small}(y))$
- [ ] $\neg \exists x\ (\text{Medium}(x) \land \text{Small}(x))$
- [ ] $\forall x\ (\text{Tet}(x) \lor \text{Cube}(x) \lor \text{Dodec}(x))$
- [x] $\neg \exists x\ (\text{Tet}(x) \land \text{Cube}(x))$
- [x] $\neg \exists x\ (\text{Tet}(x) \land \text{Dodec}(x))$
- [ ] $\neg \exists x\ (\text{Cube}(x) \land \text{Dodec}(x))$

3.4. (4 valores) Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas.

```
1  | ∀x (Cube(x) → ∃y (Adjoins(x,y) ∧ Small(y))
2  | ¬∃x (Medium(x) ∧ Small(x))
3  | ∀x ∀y (Adjoins(x,y) ∧ ¬Medium(y)) → Medium(x))
   |------------------------------------------------
4  | | a:
   | |----
5  | | | Cube(a)
   | | |--------
6  | | | Cube(a) → ∃y (Adjoins(a,y) ∧ Small(y))          Elim ∀ : 1
7  | | | ∃y (Adjoins(a,y) ∧ Small(y))                     Elim → : 5, 6
8  | | | | b: Adjoins(a,b) ∧ Small(b))
   | | | |----------------------------
9  | | | | Small(b)                                       Elim ∧ : 8
10 | | | | | Medium(b)
   | | | | |----------
11 | | | | | Medium(b) ∧ Small(b)                         Intr ∧ : 9, 10
12 | | | | | ∃x (Medium(x) ∧ Small(x))                    Intr ∃ : 11
13 | | | | | ⊥                                            Intr ⊥ : 2, 12
14 | | | | ¬ Medium(b)                                    Intr ¬ : 10, 13
15 | | | | Adjoins(a,b)                                   Elim ∧ : 8
16 | | | | Adjoins(a,b) ∧ ¬ Medium(b)                     Intr ∧ : 14, 15
17 | | | | (Adjoins(a,b) ∧ ¬Medium(b)) → Medium(a))       Elim ∀ : 3
18 | | | | Medium(a)                                      Elim → : 16, 17
19 | | | Medium(a)                                        Elim ∃ : 7, 8 - 18
20 | | Cube(a) → Medium(a)                                Intr → : 5 - 19
21 | ∀x (Cube(x) → Medium(x))                             Intr ∀ : 4 - 20
```

3.5. (5 valores) Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural.

```
1  | ∃x (Small(x) ∧ ∀y (Cube(y) → LeftOf(x,y)))
2  | ¬ ∃x ∃y LeftOf(x,y)
   |------------------------------------------------
3  | | ∃x Cube(x)
   | |-----------
4  | | | c: Cube(c)
   | | |------------
5  | | | | b: Small(b) ∧ ∀y (Cube(y) → LeftOf(b,y))
   | | | |------------------------------------------
6  | | | | ∀y (Cube(y) → LeftOf(b,y))                     Elim ∧: 5
7  | | | | Cube(c) → LeftOf(b,c)                          Elim ∀: 6
8  | | | | LeftOf(b,c)                                    Elim → : 4 , 7
9  | | | | ∃x ∃y LeftOf(x,y)                              Intr ∃ : 8
10 | | | | ⊥                                              Intr ⊥ : 2 , 9
11 | | | ⊥                                                Elim ∃ : 1, 5 - 10
12 | | ⊥                                                  Elim ∃ : 3, 4 - 11
13 | ¬ ∃x Cube(x)                                         Intr ¬ : 3 - 12
```

Grupo 4

(corresponde ao 4º teste)

4.1. (2 valores) Verifique se o conjunto S de cláusulas Horn abaixo indicado é satisfazível.

1. $A \rightarrow E$	5. $(B \wedge E) \rightarrow F$
2. $(A \wedge B) \rightarrow C$	6. $B \rightarrow C$
3. $T \rightarrow B$	7. $(B \wedge C) \rightarrow D$
4 $(D \wedge F) \rightarrow E$	8. $A \rightarrow \perp$

Pela cláusula 3: **B = True**. Pela cláusula 6: **C = True**, e pela cláusula 7: **D = True**. Mais nenhuma das proposições A, E e F é implicada pelas cláusulas de Horn, pelo que uma interpretação que satisfaz todas as cláusulas é **B=C=D=True** e **A=E=F=False**. De facto existem outras interpretações que satisfazem as cláusulas, por exemplo com **E=F=True**.

4.2. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento em lógica proposicional.

P1	$A \leftrightarrow (B \rightarrow C)$
P2	$\neg A \vee \neg C$
X	$B \rightarrow \neg A$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal.

1	$\neg A \vee \neg B \vee C$	(P1)
2	$A \vee B$	(P1)
3	$A \vee \neg C$	(P1)
4	$\neg A \vee \neg C$	(P2)
5	B	($\neg$X)
6	A	($\neg$X)

b) Mostre que as cláusulas obtidas em a) são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

7	$\neg B \vee C$	Res 6, 1
8	C	Res 7, 5
9	$\neg A$	Res 8, 4
10	$\square$	Res 9, 6

4.3. **(2 valores)** Converta as fórmulas abaixo para a forma Prenex, com a matriz na forma normal CNF.

a) $\neg\forall x\ (\mathrm{Cube}(x) \rightarrow \exists y\ (\mathrm{Tet}(y) \wedge \mathrm{Adjoins}(x,y)))$

$\exists x\ \forall y\ [\ \mathrm{Cube}(x) \wedge (\neg\mathrm{Tet}(y) \vee \neg\mathrm{Adjoins}\ (x,y))\ ]$

b) $\exists x\ (\mathrm{Cube}(x) \wedge \forall y\ (\mathrm{Tet}(y) \rightarrow \mathrm{LeftOf}(x,y))$

$\exists x\ \forall y\ [\ \mathrm{Cube}(x) \wedge (\neg\mathrm{Tet}(y)) \vee \mathrm{LeftOf}(x,y))\ ]$

4.4. **(1 valor)** Coloque na forma clausal, incluindo a Skolemização, a seguinte fórmula:

$\forall x\ ((\mathrm{Cube}(x) \wedge \forall y\ \mathrm{SameCol}(x,y)) \rightarrow (\mathrm{Small}(x) \wedge \exists z\ \mathrm{SameSize}(x,z)))$

1. $\neg\mathrm{Cube}(x1) \vee \neg\mathrm{SameCol}(f(x1)) \vee \mathrm{Small}(x1)$
2. $\neg\mathrm{Cube}(x2) \vee \neg\mathrm{SameCol}(f(x2)) \vee \mathrm{SameSize}(x2,g(x2))$

4.5. **(5 valores)** Mostre por resolução a validade do seguinte argumento de lógica de predicados de 1ª ordem.

P1	∀x (Cube(x) → ∃y (Adjoins(x,y) ∧ Small(y))
P2	¬∃x (Medium(x) ∧ Small(x))
P3	∀x ∀y (Adjoins(x,y) ∧ ¬Medium(y)) → Medium(x))
C	∀x (Cube(x) → Medium(x))

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal

```
1. ¬Cube(x1) ∨ Adjoins(x1, f(x1))
2. ¬Cube(x2) ∨ Small(f(x2))
3. ¬Medium(x3) ∨ ¬Small(x3)
4. ¬Adjoins(x4,y4) ∨ Medium(x4) ∨ Medium(y4)
5. Cube(c)
6. ¬Medium(c)
```

b) Mostre que as cláusulas obtidas são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

```
 7. Adjoins(c, f(c))              Res  5, 1 { x1 / c }
 8. Medium(c) ∨ Medium(f(c))      Res  7, 4 { x4 / c, y4 / f(c) }
 9. Medium(f(c))                  Res  8, 6 { }
10. ¬Small(f(c))                  Res  9, 3 { x3 / f(c) }
11. ¬Cube(c)                      Res 10, 2 { x2 / c }
10. □                             Res 11, 5 { }
```

4.6. **(5 valores)** Como pode verificar, P(3) = 1×2 + 2×3 + 3×4 = 3×4×5/3. Mais geralmente, prove por indução sobre os números naturais que $P(n) = \sum_{i=1}^{n} i * (i+1) = (n)(n+1)(n+2)/3$.

Passo Base: P(1) = (1)(1+1)(1+2)/3

Para n = 1 temos P(1) = 1×2 = (1)(1+1)(1+2)/3 = 2

Passo de Indução: P(n) = (n)(n+1)(n+2)/3 ⇒ P(n+1) = (n+1)(n+2)(n+3)/3

```
P(n+1) = 1×2 + 2×3 + ... + (n)(n+1) + (n+1)(n+2)
       = P(n) + (n+1)(n+2)
       = (n)(n+1)(n+2)/3  + (n+1)(n+2)
       = (n+1)(n+2)[n/3 + 1]
       = (n+1)(n+2)[(n + 3)/3]
       = (n+1)(n+2)(n+3)/3
```

q.e.d.