Lógica Computacional

Duração: 1h

Época de 2013 / 14– 4º Teste de Avaliação (sem Consulta)

Nome:	**nº:**

1. Pretende-se verificar se o conjunto *S* de cláusulas Horn abaixo indicado é satisfazível,

1. $(B \land D) \to G$	6. $B \to E$
2. $(A \land H \land I) \to \bot$	7. $(B \land D) \to F$
3. $D \to I$	8. $\top \to D$
4. $(D \land E \land G) \to A$	9. $(A \land C) \to \bot$
5 $\top \to B$	10. $(A \land B \land F) \to H$

a) Indique os átomos que deverão ser verdadeiros em qualquer interpretação que satisfaça S.

A = T (4)	B = T (5)	C =	D = T (8)	E = T (6)
F = T (7)	G = T (1)	H = T (10)	I = T (3)	$\bot$ = T (2)

b) O átomo $\bot$ está incluído nessas interpretações? Que conclusão tira desse facto?

Como indicado na alínea anterior, o átomo $\bot$ está incluído nessas interpretações, o que indica que essas interpretações são contraditórias e portanto S não é satisfazível.

2. Mostre por resolução a validade do seguinte argumento em lógica proposicional.

P1	$A \to (B \lor C)$
P2	$\neg(C \land D)$
P3	$(B \land C) \to \neg A$
P4	$A \leftrightarrow D$
C	$D \to B$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal.

1	$\neg A \lor B \lor C$	de P1
2	$\neg C \lor \neg D$	de P2
3	$\neg B \lor \neg C \lor \neg A$	de P3
4	$A \lor \neg D$	de P4
5	$\neg A \lor D$	de P4
6	D	de $\neg$C
7	$\neg B$	de $\neg$C

b) Mostre que as cláusulas obtidas em a) são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

8.	$\neg C$	Res 6, 2
9.	$\neg A \lor B$	Res 8, 1
10.	$\neg A$	Res 9, 7
11.	$\neg D$	Res 10, 4
12.	$\square$	Res 11, 6

3. Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições

   a) Existem tetraedros grandes que não estão à frente de nenhum bloco.

   `∃x (Tet(x) ∧ Large(x) ∧ ¬∃y FrontOf(x,y))`

   b) Os blocos grandes são cubos ou estão ao lado de um cubo.

   `∀x (Large(x) → (Cube(x) ∨ ∃y (Cube(y) ∧ Adjoins(x,y))))`

   c) Não há blocos pequenos que não estejam atrás de um cubo.

   `¬∃x (Small(x) ∧ ¬∃y (Cube(y) ∧ BackOf(x,y)))`

   d) Todos os cubos são maiores que os não cubos que estejam na mesma coluna.

   `∀x (Cube(x) → ∀y ((SameCol(y,x) ∧ ¬ Cube(y)) → Larger(x,y)))`

   e) Todos os tetraedros são menores que um certo dodecaedro.

   `∃x (Dodec(x) ∧ ∀y (Tet(y) → Smaller(y,x)))`

4. Converta as fórmulas abaixo para a forma Prenex, com a matriz na forma normal conjuntiva (CNF).

   a) `∀x (∃y FrontOf(x,y) → Cube(x))`

   `∀x ∀y (¬FrontOf(x,y) ∨ Cube(x))`

   b) `∃x Tet(x) → ∃y Cube(y)`

   `∀x ∃y (¬Tet(x) ∨ Cube(y))`

   c) `∀x (Small(x) → ¬∃y Adjoins(y,x))`

   `∀x ∀y (¬Small(x) ∨ ¬Adjoins(y,x))`

5. Coloque na forma clausal, incluindo a Skolemização, as seguintes fórmulas Prenex:

   a) `∃x ( Cube(x) ∧ ∀y (Tet(y) → SameSize(y,x))`

   1. `Cube(a)`
   2. `(¬Tet(x2) ∨ SameSize(x2,a)`

   b) `∀x (Small(x) → ∃y (Tet(y) ∧ Adjoins(y,x)))`

   1. `¬Small(x1) ∨ Tet(f(x1))`
   2. `¬Small(x2) ∨ Adjoins(f(x2),x2)`

6. Obtenha uma substituição σ que unifique os dois termos abaixo. Indique qual o termo obtido quando se aplica essa substituição a qualquer um dos termos unificados

   T1 : `Larger(x, f(x))` **T2 : `Larger(g(y), z)`**

   substituição σ = `{ x / g(y), z / f(g(y)) }`

   T1σ = T2σ = `Larger( g(y), f(g(y)) )`

7. Mostre por resolução a validade do seguinte argumento de lógica de predicados de 1ª ordem

P1	`∀x (Cube(x) → ∃y (Tet(y) ∧ Adjoins(x,y)))`
P2	`∀x ∀y (Adjoins(x,y) → ¬Tet(x))`
P3	`∀x ∀y (Adjoins(x,y) → Adjoins(y,x))`
C	`¬∃x Cube(x)`

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal

```
1. ¬Cube(x1) ∨ Tet(f(x1))
2.  ¬Cube(x2) ∨ Adjoins(x2,f(x2))
3. ¬Adjoins(x3,y3) ∨ ¬Tet(x3)
4.  ¬Adjoins(x4,y4) ∨ Adjoins(y4,x4))
5.  Cube(c)
```

b) Mostre que as cláusulas obtidas são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

```
6. Tet(f(c))                    Res 5, 1  { x1/ c }
7.  ¬Adjoins(f(c),y3)           Res 6, 3  { x3/ f(c) }
8. ¬Adjoins(x4,f(c))            Res 7, 4  { y4/ f(c), y3/ x4 }
9.  ¬Cube(c)                    Res 8, 2  { x2/ c, x4 / c }
10.  □                          Res 9, 5  { }
```

8. Notando que $1! < 2^1$ (1 < 2), $2! < 2^2$ (2 < 4), $3! < 2^3$ (6 < 8)

mas que $4! > 2^4$ (24 < 16), $5! > 2^5$ (120 > 32), $6! > 2^6$ (720 > 64), ...

prove por indução sobre os naturais (*maiores que 3*), que $n! > 2^n$ para todos os naturais maiores que 3.

Passo Base:

4 é o primeiro natural maior que 3, e temos $4! = 24 > 16 = 2^4$

Passo de Indução: $n! > 2^n \Rightarrow (n+1)! > 2^{n+1}$

Seja **n** um inteiro maior que 3. Então

$(n+1)!$	$= n! * (n+1)$	por definição de factorial
	$> 2^n * (n+1)$	pela hipótese de indução
	$> 2^n * 2$	por ser n > 3
	$= 2^{n+1}$	por definição de factorial

Tendo em conta os passos de base e de indução, fica provado que

$n > 3 \Rightarrow n! > 2^n$

q.e.d.

9.