

Lógica Computacional

Duração: 3h

Ano de 2014 / 15 – Exame

Grupos para Avaliar

(Todos por Omissão)

G1

G2

G3

G4

Nome:

nº:

1.1. (5 valores) Considere as seguintes frases (assuma que uma pessoa só tem uma casa)

- A casa do Nuno é perto da do Gil, mas não da da Rita.
- O Nuno tem 18 anos e é mais velho que a Rita.
- Se o Nuno for rico, então o Gil não o é.

a) Apresente uma assinatura $\Sigma = \langle NP, NF_0 \cup NF_1 \rangle$ de uma linguagem de 1ª ordem que lhe permita escrever fórmulas de 1ª ordem correspondentes

NF_0 : Constantes	NF_1 : Funções	NP : Predicados

b) Traduza para fórmulas de 1ª ordem as frases acima indicadas:

i) A casa do Nuno é perto da do Gil, mas não da da Rita.

ii) O Nuno tem 18 anos e é mais velho que a Rita.

iii) Se o Nuno for rico, então o Gil não o é.

1.2. (2 valores) Classifique cada uma das fórmulas abaixo, indicando no quadro (com S e N, respectivamente) se são ou não

V-TT: Verdade Tautológica;

V-FO: Verdade Lógica

V-TW: Verdade Analítica (Tarski)

P-TT: Possibilidade Tautológica;

P-FO: Possibilidade Lógica;

P-TW: Possibilidade Analítica (Tarski)

$(\text{Cube}(a) \wedge \neg \text{Cube}(b)) \rightarrow a \neq b$

$\text{Tet}(a) \wedge \text{Cube}(b) \wedge a = b$

$a = b \rightarrow \neg (\text{Cube}(a) \wedge \text{Tet}(b))$

V-TT	V-FO	V-TW	P-TT	P-FO	P-TW

1.3. (3 valores) Considerando os mundos e a linguagem de Tarski, indique se os seguintes argumentos são válidos tautologica (Val-TT), logica (Val-FO) e/ou analiticamente (nos mundos de Tarski Val-TW).

{Premissa 1, ..., Premissa n} $\models$ Conclusão

{ Cube(a), Cube(b) } $\models$ Cube(a) $\vee$ Cube(c)

{ Large(a), Small(b) } $\models$ Larger(a,b)

{ Tet(a), a = b $\vee$ Tet(b) } $\models$ Tet(b)

Val-TT	Val-FO	Val-TW

1.4. (5 valores) Considere as fórmulas **P1**: $(A \wedge B) \rightarrow C$ e **P2**: $\neg B \rightarrow (A \wedge C)$, bem como as fórmulas **C1**: $A \leftrightarrow (B \vee C)$ e **C2**: $(A \wedge C) \vee B$.

a) Preencha a seguinte tabela de verdade relativa às fórmulas **P1**, **P2**, **C1** e **C2**.

A	B	C	$(A \wedge B) \rightarrow C$	$\neg B \rightarrow (A \wedge C)$	$A \leftrightarrow (B \vee C)$	$(A \wedge C) \vee B$
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

b) Por análise da tabela, indique justificando se as fórmulas **C1** e **C2** são ou não consequências tautológicas das premissas P1 e P2.

Justificação:

1.5. (5 valores) Considere a fórmula $\neg((A \rightarrow B) \wedge \neg((A \vee B) \rightarrow C))$. Converta-a para as formas normais conjuntiva (CNF) e disjuntiva (DNF), simplificando-as da forma mais conveniente.

Grupo 2

(corresponde ao 2º teste)

2.1. (4 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições

a) O objecto **a** ou é um cubo ou é menor do que o cubo **b**.

b) Os tetraedros **a** e **b** estão em linhas ou colunas diferentes.

c) Um dos objectos **b** e **c** é menor que o outro a menos que sejam ambos cubos.

d) Se o bloco **c** estiver à frente do **a** então o dodecaedro **d** não estará entre eles.

2.2. (4 valores) Considere os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiro de 3×3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições

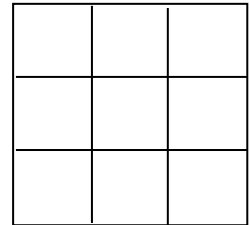
1. $\neg (\text{SameShape}(b, a) \vee \text{SameShape}(b, c))$

2. $\neg (\neg \text{Cube}(a) \vee \neg \text{LeftOf}(c, a))$

3. $\text{FrontOf}(c, b)$

4. $\text{RightOf}(b, a) \wedge \text{BackOf}(c, a)$

5. $\neg \text{Tet}(c) \rightarrow b = c$



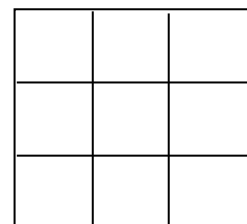
2.3. (3 valores) Considere o seguinte argumento na linguagem de Tarski, e a respectiva demonstração.

a) Verifique que a demonstração está *errada*, e indique o(s) passo(s) em que as regras do sistema de Dedução Natural não foram corretamente utilizadas

1.		$\neg (\text{Tet}(b) \vee \text{Dodec}(a))$	
2.		$\text{Tet}(b) \rightarrow \text{Dodec}(a)$	
3.			
4.			
5.			
6.			
7.			

Erro(s):

b) Indique no tabuleiro ao lado um contra-exemplo que mostre que o argumento não é válido



2.4. (4 valores) Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas

1.	$C \rightarrow (A \leftrightarrow \neg B)$	
2.	$A \leftrightarrow (B \vee C)$	
3.	A	
4.	B	
5.	C	
6.	$A \leftrightarrow \neg B$	Elim $\rightarrow$: 1 , 5
7.	$\neg B$	Elim $\leftrightarrow$: 3 , 6
8.	$\perp$	Intr $\perp$: 4 , 7
9.	$\neg C$	
10.	$\neg C$	
11.		Elim $\leftrightarrow$: 2 , 3
12.	B	
13.	B	Reit : 12
14.	C	
15.	$\perp$	Intr $\perp$: 10 , 14
16.		
17.	B	
18.		Intr $\leftrightarrow$: 4 - 9, 10 - 17
19.	$A \rightarrow (B \leftrightarrow \neg C)$	Intr $\rightarrow$: 3 - 18

2.5. (5 valores) Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural

1	$(A \wedge D) \rightarrow (B \wedge C)$
2	$\neg B \vee \neg C$

D → ¬A
(Assumption for contradiction)

Grupo 3

(corresponde ao 3º teste)

3.1. (5 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições

a) Objectos distintos com a mesma forma são grandes.

b) Um tetraedro que esteja à frente de todos os cubos é pequeno.

c) Objectos que tenham um outro entre eles têm a mesma forma.

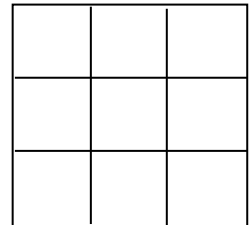
d) Os únicos objectos que são grandes estão à esquerda do tetraedro a.

e) Apenas cubos estão à frente de ambos os blocos a e b.

f) Os blocos mais à esquerda (i.e. sem blocos à sua esquerda) que não são cubos são tetraedros.

3.2. (4 valores) Considere os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiro de 3×3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições

1. $\text{Cube}(a) \wedge \text{Tet}(c) \wedge \exists x (\text{Tet}(x) \wedge \text{Between}(a, x, c))$
2. $\forall x (\neg \text{Cube}(x) \rightarrow \neg \text{SameRow}(x, a))$
3. $\neg \exists x (\neg \text{Cube}(x) \wedge \text{SameCol}(x, a))$
4. $\forall x (\text{Cube}(x) \rightarrow x = a)$
5. $\neg \exists x (\text{LeftOf}(x, a) \wedge \text{FrontOf}(x, a))$
6. $\text{Tet}(b) \wedge \text{RightOf}(b, c) \wedge \text{BackOf}(c, a)$



3.3. (2 valores) O seguinte argumento é válido analiticamente nos Mundos de Tarski.

- | | |
|---|--|
| 1 | $\exists x (\neg \text{Small}(x) \wedge \neg \text{Large}(x))$ |
| 2 | $\forall x (\text{Medium}(x) \rightarrow \text{Cube}(x))$ |
| 3 | $\neg \forall x (\text{Tet}(x) \vee \text{Dodec}(x))$ |

Assinale em baixo, quais os axiomas de Tarski que seria necessário colocar explicitamente como premissas para que o argumento fosse válido logicamente (válido-FO).

- ☐ $\forall x (\text{Large}(x) \vee \text{Medium}(x) \vee \text{Small}(x))$
- ☐ $\forall x \forall y ((\text{Medium}(x) \wedge \text{Larger}(y, x)) \rightarrow \text{Large}(y))$
- ☐ $\forall x \forall y ((\text{Medium}(x) \wedge \text{Larger}(x, y)) \rightarrow \text{Small}(y))$
- ☐ $\neg \exists x (\text{Medium}(x) \wedge \text{Small}(x))$
- ☐ $\forall x (\text{Tet}(x) \vee \text{Cube}(x) \vee \text{Dodec}(x))$
- ☐ $\neg \exists x (\text{Tet}(x) \wedge \text{Cube}(x))$
- ☐ $\neg \exists x (\text{Tet}(x) \wedge \text{Dodec}(x))$
- ☐ $\neg \exists x (\text{Cube}(x) \wedge \text{Dodec}(x))$

3.4. (4 valores) Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas.

1.	$\exists x \text{ (Large}(x) \wedge \forall y \text{ (Cube}(y) \rightarrow \text{FrontOf}(x,y)) \text{))}$	
2.	$\neg \exists x \text{ (Large}(x) \wedge \neg \text{Dodec}(x) \text{))}$	
3.		
4.	Large(a)	Elim $\wedge$: 3
5.	$\forall y \text{ (Cube}(y) \rightarrow \text{FrontOf}(a,y) \text{))}$	Elim $\wedge$: 3
6.	$\neg \text{Dodec}(a)$	
7.	Large(a) $\wedge \neg \text{Dodec}(a)$	Intr $\wedge$: 4 , 6
8.	$\exists x \text{ (Large}(x) \wedge \neg \text{Dodec}(x) \text{))}$	
9.	$\perp$	Intr $\perp$: 2 , 8
10.	$\neg \neg \text{Dodec}(a)$	Intr $\neg$: 6 - 9
11.	Dodec(a)	Elim $\neg$: 10
12.	c :	
13.		
14.	Cube(c) $\rightarrow$ FrontOf(a,c)	
15.	FrontOf(a,c)	Elim $\rightarrow$: 13 , 14
16.		Intr $\wedge$: 11 , 15
17.	$\exists y \text{ (Dodec}(y) \wedge \text{FrontOf}(y,c) \text{))}$	Intr $\exists$: 16
18.	Cube(c) $\rightarrow \exists y \text{ (Dodec}(y) \wedge \text{FrontOf}(y,c) \text{))}$	Intr $\rightarrow$: 13 - 17
19.		
20.	$\forall x \text{ (Cube}(x) \rightarrow \exists y \text{ (Dodec}(y) \wedge \text{FrontOf}(y,x) \text{))}$	

3.5. (5 valores) Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural.

1	$\forall x \text{ (Small}(x) \rightarrow \exists y \text{ (Tet}(y) \wedge \text{Adjoins}(x,y)))}$
2	$\neg \exists x \text{ Tet}(x)$
	$\forall x \neg \text{Small}(x)$

Grupo 4

(corresponde ao 4º teste)

4.1. (2 valores) Verifique se o conjunto S de cláusulas Horn abaixo indicado é satisfazível.

$$1. T \rightarrow D$$

$$2. (A \wedge B) \rightarrow C$$

$$3. D \rightarrow B$$

$$4. (D \wedge E) \rightarrow F$$

$$5. (B \wedge D) \rightarrow A$$

$$6. F \rightarrow A$$

$$7. (A \wedge F) \rightarrow D$$

$$8. E \rightarrow \perp$$

4.2. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento em lógica proposicional.

P1	$(A \wedge D) \rightarrow (B \wedge C)$
P2	$\neg B \vee \neg C$
X	$D \rightarrow \neg A$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal.

b) Mostre que as cláusulas obtidas em a) são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

4.3. (2 valores) Converta as fórmulas abaixo para a forma Prenex, com a matriz na forma normal CNF.

a) $\exists x (Cube(x) \vee \forall y (Tet(y) \rightarrow FrontOf(x,y)))$

b) $\forall x Cube(x) \rightarrow \exists y \neg Tet(y)$

4.4. (1 valor) Coloque na forma clausal, incluindo a Skolemização, a seguinte fórmula:

$$\forall x \exists y \exists z (Cube(x) \rightarrow (FrontOf(y,x) \wedge Between(z,x,y)))$$

4.5. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento de lógica de predicados de 1ª ordem.

P1	$\forall x ((\text{Cube}(x) \vee \text{Medium}(x)) \rightarrow \exists y \text{Adjoins}(x,y))$
P2	$\forall x \forall y (\text{Adjoins}(x,y) \rightarrow \neg \text{SameShape}(x,y))$
Z	$\forall x \forall y \text{SameShape}(x,y) \rightarrow \exists z (\neg \text{Cube}(z) \wedge \neg \text{Medium}(z))$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal

b) Mostre que as cláusulas obtidas são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

4.6. (5 valores) Notando que

$$\begin{aligned} S(1) &= (1+2) &= 3 &= 2^2 - 1, \\ S(2) &= (1+2) + (2+3) &= 8 &= 3^2 - 1, \\ S(3) &= (1+2) + (2+3) + (3+4) &= 15 &= 4^2 - 1, \end{aligned}$$

prove por indução sobre os números naturais que $S(n) = \sum_{i=1}^n [i + (i + 1)] = (n + 1)^2 - 1$.

Passo Base:

Passo de Indução: