Lógica Computacional

Duração: 3h

Ano de 2014 / 15 – Exame

Grupos para Avaliar (Todos por Omissão)

G1	G2	G3	G4

Nome:	nº:

1.1. **(5 valores)** Considere as seguintes frases (assuma que uma pessoa só tem uma casa)

- A casa do Nuno é perto da do Gil, mas não da da Rita.
- O Nuno tem 18 anos e é mais velho que a Rita.
- Se o Nuno for rico, então o Gil não o é.

a) Apresente uma assinatura Σ = <NP, $NF_0 \cup NF_1$> de uma linguagem de 1ª ordem que lhe permita escrever fórmulas de 1ª ordem correspondentes

NF_0: Constantes	*NF_1: Funções*	*NP: Predicados*
nuno gil rita 18	casaDe/1 idadeDe/1	PertoDe/2 Rico/1 =/2 , >/2

b) Traduza para fórmulas de 1ª ordem as frases acima indicadas:

i) A casa do Nuno é perto da do Gil, mas não da da Rita.

```
PertoDe(casaDe(nuno), casaDe(gil)) ∧ ¬PertoDe(casaDe(nuno), casaDe(rita))
```

ii) O Nuno tem 18 anos e é mais velho que a Rita.

```
idadeDe(nuno) = 18 ∧ idadeDe(nuno) > idadeDe(rita)
```

iii) Se o Nuno for rico, então o Gil não o é.

```
Rico(nuno) → ¬Rico(gil)
```

1.2. **(2 valores)** Classifique cada uma das fórmulas abaixo, indicando no quadro (com S e N, respectivamente) se são ou não

V-TT: Verdade Tautológica; V-FO: Verdade Lógica V-TW: Verdade Analítica (Tarski)
P-TT: Possibilidade Tautológica; P-FO: Possibilidade Lógica; P-TW: Possibilidade Analítica (Tarski)

	V-TT	V-FO	V-TW	P-TT	P-FO	P-TW
(Cube(a) ∧ ¬Cube(b)) → a ≠ b	N	S	S	S	S	S
Tet(a) ∧ Cube(b) ∧ a = b	N	N	N	S	S	N
a = b → ¬(Cube(a) ∧ Tet(b))	N	N	S	S	S	S

1.3. **(3 valores)** Considerando os mundos e a linguagem de Tarski, indique se os seguintes argumentos são válidos tautologica (Val-TT), logica (Val-FO) e/ou analiticamente (nos mundos de Tarski Val-TW).

{Premissa 1, ... , Premissa n } |= Conclusão	Val-TT	Val-FO	Val-TW
{ Cube(a), Cube(b)} |= Cube(a) ∨ Cube(c)	S	S	S
{ Large(a), Small(b) } |= Larger(a,b)	N	N	S
{ Tet(a), a = b ∨ Tet(b)} |= Tet(b)	N	S	S

1.4. (5 valores) Considere as fórmulas **P1:** $(A \land B) \rightarrow C$ e **P2:** $\neg B \rightarrow (A \land C)$, bem como as fórmulas **C1:** $A \leftrightarrow (B \lor C)$ e **C2:** $(A \land C) \lor B$.

a) Preencha a seguinte tabela de verdade relativa às fórmulas **P1**, **P2**, **C1** e **C2**.

A	B	C	$(A \land B)$	$\rightarrow C$	$\neg B$	$\rightarrow$	$(A \land C)$	$A \leftrightarrow$	$(B \lor C)$	$(A \land C)$	$\lor B$
V	**V**	**V**	V	**V**	F	**V**	V	**V**	V	V	**V**
V	**V**	**F**	V	**F**	F	**V**	F	**V**	V	F	**V**
V	**F**	**V**	F	**V**	V	**V**	V	**V**	V	V	**V**
V	**F**	**F**	F	**V**	V	**F**	F	**F**	F	F	**F**
F	**V**	**V**	F	**V**	F	**V**	F	**F**	V	F	**V**
F	**V**	**F**	F	**V**	F	**V**	F	**F**	V	F	**V**
F	**F**	**V**	F	**V**	V	**F**	F	**F**	V	F	**F**
F	**F**	**F**	F	**V**	V	**F**	F	**V**	F	F	**F**

b) Por análise da tabela, indique justificando se as fórmulas **C1** e **C2** são ou não consequências tautológicas das premissas P1 e P2.

Justificação:

A fórmula C1 é falsa em duas interpretações (em que A = Falso e B = Verdade) em que as premissas são verdadeiras. Assim sendo, C1 não é consequência tautológica de P1 e P2.

A fórmula C2 é consequência tautológica das premissas P1 e P2 pois sempre que estas são verdadeiras ela também o é.

1.5. (5 valores) Considere a fórmula $\neg((A \rightarrow B) \land \neg((A \lor B) \rightarrow C))$. Converta-a para as formas normais conjuntiva (CNF) e disjuntiva (DNF), simplificando-as da forma mais conveniente.

$\neg((A \rightarrow B) \land \neg((A \lor B) \rightarrow C))$

$\Leftrightarrow \neg(A \rightarrow B) \lor \neg\neg((A \lor B) \rightarrow C)$	Leis de de Morgan
$\Leftrightarrow \neg(\neg A \lor B) \lor \neg\neg(\neg(A \lor B) \lor C)$	Equivalência de $\rightarrow$
$\Leftrightarrow \neg(\neg A \lor B) \lor (\neg(A \lor B) \lor C)$	Dupla Negação
$\Leftrightarrow (\neg\neg A \land \neg B) \lor ((\neg A \land \neg B) \lor C)$	Leis de de Morgan
$\Leftrightarrow (A \land \neg B) \lor ((\neg A \land \neg B) \lor C)$	Dupla Negação
$\Leftrightarrow (A \land \neg B) \lor (\neg A \land \neg B) \lor C$	Associatividade da $\lor$

Esta fórmula já está em DNF mas pode ser simplificada

$\Leftrightarrow ((A \lor \neg A) \land \neg B) \lor C$	Distribuição da $\land$ e.r.a $\lor$
$\Leftrightarrow (1 \land \neg B) \lor C$	Tautologia
$\Leftrightarrow \neg B \lor C$	Elemento Neutro

Esta fórmula está não só em DNF mas também em CNF

Grupo 2

(corresponde ao 2º teste)

2.1. (4 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições

a) O objecto **a** ou é um cubo ou é menor do que o cubo **b** .

`Cube(b) ∧ (Cube(a) ∨ Smaller(a,b))`

b) Os tetraedros a e b estão em linhas ou colunas diferentes.

`Tet(a) ∧ Tet(b) ∧ (¬SameRow(a,b) ∨ ¬SameCol(a,b))`

c) Um dos objectos **b** e **c** é menor que o outro a menos que sejam ambos cubos.

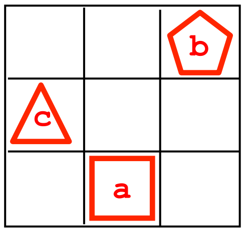
`¬(Cube(b) ∧ Cube(c)) → (Smaller(b,c) ∨ Smaller(c,b))`

d) Se o bloco **c** estiver à frente do **a** então o dodecaedro **d** não estará entre eles.

`Dodec(d) ∧ (FrontOf(c,a) → ¬ Between(d,a,c))`

2.2. (4 valores) Considere os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiro de 3 × 3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições

1. `¬(SameShape(b,a) ∨ SameShape(b,c))`
2. `¬(¬Cube(a) ∨ ¬LeftOf(c,a))`
3. `FrontOf(c,b)`
4. `RightOf(b,a) ∧ BackOf(c,a)`
5. `¬Tet(c) → b = c`



2.3. (3 valores) Considere o seguinte argumento na linguagem de Tarski, e a respectiva demonstração.

a) Verifique que a demonstração está *errada*, e indique o(s) passo(s) em que as regras do sistema de Dedução Natural não foram corretamente utilizadas

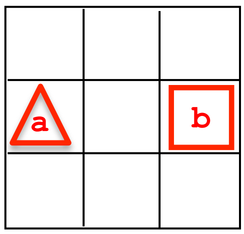
```
1. | ¬ (Tet(b) ∨ Dodec(a))
2. | Tet(b) → Dodec(a)
   |----------------------
3. | | Tet(b)
   | |--------
4. | | Dodec(a)        Elim →: 2 , 3
5. | | Dodec(a)
   | |--------
6. | | Dodec(a)        Reit : 4
7. | Dodec(a)          Elim ∨ : 1, 3 -4 , 5 -6
```

Erro(s):

No passo 6, a reiteração da fórmula `Dodec(a)` deve ser referida ao passo 5, já que a fórmula 4 não é visível em 6. Mas essa correcção pode ser feita sem afectar o resto da demonstração.

No passo 7, a eliminação da ∨ não pode ser feita, pois a fórmula 1 é uma negação e não uma disjunção.

b) Indique no tabuleiro ao lado um contra-exemplo que mostre que o argumento não é válido



2.4. (4 valores) Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas

```
 1. | C → (A ↔ ¬B)
 2. | A ↔ (B ∨ C)
    |--------------------
 3. | | A
    | |------
 4. | | | B
    | | |------
 5. | | | | C
    | | | |------
 6. | | | | A ↔ ¬B        Elim → : 1 , 5
 7. | | | | ¬B            Elim ↔ : 3 , 6
 8. | | | | ⊥             Intr ⊥ : 4 , 7
 9. | | | ¬C              [Intr ¬ : 5 - 8]
10. | | | ¬C
    | | |------
11. | | | [B ∨ C]         Elim ↔ : 2 , 3
12. | | | | B
    | | | |------
13. | | | | B             Reit   : 12
14. | | | | C
    | | | |------
15. | | | | ⊥             Intr ⊥ : 10 , 14
16. | | | | [B]           [Elim ⊥ : 15]
17. | | | B               [Elim ∨ :11, 12-13, 14-16]
18. | | [B ↔ ¬C]          Intr ↔ : 4 - 9, 10 - 17
19. | A → ( B ↔ ¬C)       Intr →  : 3 - 18
```

2.5. (5 valores) Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural

```
 1  | (A ∧ D) → (B ∧ C)
 2  | ¬B ∨ ¬C
    |--------------------
 3. | | D
    | |------
 4. | | | A
    | | |------
 5. | | | A ∧ D           Intr ∧ : 3 , 4
 6. | | | B ∧ C           Elim → : 1 , 5
 7. | | | | ¬B
    | | | |------
 8. | | | | B             Elim ∧ : 6
 9. | | | | ⊥             Intr ⊥ : 7 , 8
10. | | | | ¬C
    | | | |------
11. | | | | C             Elim ∧ : 6
12. | | | | ⊥             Intr ⊥ : 10 , 11
13. | | | ⊥               Elim ∨ : 2 , 7 - 9 , 10 - 12
14. | | ¬A                Intr ¬ : 4 - 13
15. | D → ¬A              Intr → : 3 - 14
```

Grupo 3

(corresponde ao 3º teste)

3.1. (5 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições

a) Objectos distintos com a mesma forma são grandes.

`∀x ∀y ((SameShape(x,y) ∧ x ≠ y) → (Large(x) ∧ Large(y)))`

b) Um tetraedro que esteja à frente de todos os cubos é pequeno.

`∀x (Tet(x) ∧ ∀y (Cube(y) → FrontOf(x,y)) → Small(x))`

c) Objectos que tenham um outro entre eles têm a mesma forma.

`∀x ∀y ( ∃z Between(z,x,y) → SameShape(x,y))`

d) Os únicos objectos que são grandes estão à esquerda do tetraedro a.

`Tet(a) ∧ ∀x (Large(x) → LeftOf(x,a))`

e) Apenas cubos estão à frente de ambos os blocos a e b.

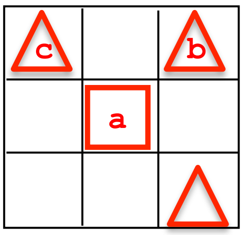
`∀x ((FrontOf(x,a) ∧ FrontOf(x,b)) → Cube(x))`

f) Os blocos mais à esquerda (i.e. sem blocos à sua esquerda) que não são cubos são tetraedros.

`∀x ((¬Cube(x) ∧ ¬∃y LeftOf(y,x)) → Tet(x))`

3.2. (4 valores) Considere os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiro de 3 × 3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições

1. `Cube(a) ∧ Tet(c) ∧ ∃x (Tet(x) ∧ Between(a,x,c))`
2. `∀x (¬Cube(x) → ¬SameRow(x,a))`
3. `¬∃x (¬Cube(x) ∧ SameCol(x,a))`
4. `∀x (Cube(x) → x = a)`
5. `¬∃x (LeftOf(x,a) ∧ FrontOf(x,a)))`
6. `Tet(b) ∧ RightOf(b,c) ∧ BackOf(c,a)`



3.3. (2 valores) O seguinte argumento é válido analiticamente nos Mundos de Tarski.

```
1 | ∃x (¬ Small(x) ∧ ¬ Large(x))
2 | ∀x (Medium(x) → Cube(x))
  |-----------------------------
3 | ¬ ∀x (Tet(x) ∨ Dodec(x))
```

Assinale em baixo, quais os axiomas de Tarski que seria necessário colocar explicitamente como premissas para que o argumento fosse válido logicamente (válido-FO).

- ☒ `∀x (Large(x) ∨ Medium(x) ∨ Small(x))`
- ☐ `∀x ∀y ((Medium(x) ∧ Larger(y,x)) → Large(y))`
- ☐ `∀x ∀y ((Medium(x) ∧ Larger(x,y)) → Small(y))`
- ☐ `¬ ∃x (Medium(x) ∧ Small(x))`
- ☐ `∀x (Tet(x) ∨ Cube(x) ∨ Dodec(x))`
- ☒ `¬ ∃x (Tet(x) ∧ Cube(x))`
- ☐ `¬ ∃x (Tet(x) ∧ Dodec(x))`
- ☒ `¬ ∃x (Cube(x) ∧ Dodec(x))`

3.4. (4 valores) Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas.

1.	∃x (Large(x) ∧ ∀y (Cube(y) → FrontOf(x,y)))	
2.	¬∃x (Large(x) ∧ ¬ Dodec(x))	
3.	a: Large(a) ∧ ∀y (Cube(y) → FrontOf(a,y))	
4.	Large(a)	Elim ∧ : 3
5.	∀y (Cube(y) → FrontOf(a,y))	Elim ∧ : 3
6.	¬ Dodec(a)	
7.	Large(a) ∧ ¬ Dodec(a)	Intr ∧ : 4 , 6
8.	∃x (Large(x) ∧ ¬Dodec(x))	Intr ∃ : 7
9.	⊥	Intr ⊥ : 2 , 8
10.	¬¬Dodec(a)	Intr ¬ : 6 - 9
11.	Dodec(a)	Elim ¬ : 10
12.	c :	
13.	Cube(c)	
14.	Cube(c) → FrontOf(a,c)	Elim ∀ : 5
15.	FrontOf(a,c)	Elim → : 13 , 14
16.	Dodec(a) ∧ FrontOf(a,c)	Intr ∧ : 11 , 15
17.	∃y (Dodec(y) ∧ FrontOf(y,c))	Intr ∃ : 16
18.	Cube(c) → ∃y (Dodec(y) ∧ FrontOf(y,c))	Intr → : 13 - 17
19.	∀x (Cube(x) → ∃y (Dodec(y) ∧ FrontOf(y,x)))	Intr ∀ : 12 - 18
20.	∀x (Cube(x) → ∃y (Dodec(y) ∧ FrontOf(y,x)))	Elim ∃ : 1 , 3 - 19

3.5. (5 valores) Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural.

1	∀x (Small(x) → ∃y (Tet(y) ∧ Adjoins(x,y)))	
2	¬ ∃x Tet(x)	
3	a:	
4	Small(a)	
5	Small(a) → ∃y (Tet(y) ∧ Adjoins(a,y))	Elim ∀: 1
6	∃y (Tet(y) ∧ Adjoins(a,y))	Elim →: 4, 5
7	b: Tet(b) ∧ Adjoins(a,b))	
8	Tet(b)	Elim ∧ : 7
9	∃x Tet(x)	Intr ∃ : 8
10	⊥	Intr ⊥ : 2 , 9
11	⊥	Elim ∃ : 6, 7 - 10
12	¬ Small(a)	Intr ¬ : 4 - 11
13	∀x ¬Small(x)	Intr ∀ : 3 - 12

Grupo 4

(corresponde ao 4º teste)

4.1. (2 valores) Verifique se o conjunto S de cláusulas Horn abaixo indicado é satisfazível.

1. $T \rightarrow D$	5. $(B \land D) \rightarrow A$
2. $(A \land B) \rightarrow C$	6. $F \rightarrow A$
3. $D \rightarrow B$	7. $(A \land F) \rightarrow D$
4 $(D \land E) \rightarrow F$	8. $E \rightarrow \perp$

Pela cláusula 1: **D = True**. Pela cláusula 3: **B = True**. Pela cláusula 5: **A = True**. Pela cláusula 2: **C = True**. Nenhuma das outras proposições, **E** e **F**, é implicada pelas cláusulas de Horn. Assim, a interpretação **A=B=C=D=True** e **E=F=False** satisfaz todas as cláusulas (que são também satisfeitas com **E=False** e **F=True**).

4.2. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento em lógica proposicional.

P1	$(A \land D) \rightarrow (B \land C)$
P2	$\neg B \lor \neg C$
X	$D \rightarrow \neg A$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal.

1.	$\neg A \lor \neg D \lor B$	(P1)
2.	$\neg A \lor \neg D \lor C$	(P1)
3.	$\neg B \lor \neg C$	(P2)
4.	D	(¬X)
5.	A	(¬X)

b) Mostre que as cláusulas obtidas em a) são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

6.	$\neg D \lor B$	Res 5, 1
7.	B	Res 6, 4
8.	$\neg C$	Res 7, 3
9.	$\neg A \lor \neg D$	Res 8, 2
10.	$\neg A$	Res 9, 4
11.	$\square$	Res 10, 5

4.3. (2 valores) Converta as fórmulas abaixo para a forma Prenex, com a matriz na forma normal CNF.

a) $\exists x\ (Cube(x) \lor \forall y\ (Tet(y) \rightarrow FrontOf(x,y)))$

$\exists x\ \forall y\ (Cube(x) \lor \neg Tet(y) \lor FrontOf(x,y))$

b) $\forall x\ Cube(x) \rightarrow \exists y\ \neg Tet(y)$

$\exists x\ \exists y\ (\neg Cube(x) \lor \neg Tet(y))$

4.4. (1 valor) Coloque na forma clausal, incluindo a Skolemização, a seguinte fórmula:

$\forall x\ \exists y\ \exists z\ (Cube(x) \rightarrow (FrontOf(y,x) \land Between(z,x,y)))$

1. $\neg Cube(x1) \lor FrontOf(f(x1),x1)$
2. $\neg Cube(x2) \lor Between(g(x2),x2,f(x2))$

4.5. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento de lógica de predicados de 1ª ordem.

P1	∀x ((Cube(x) ∨ Medium(x)) → ∃y Adjoins(x,y))
P2	∀x ∀y (Adjoins(x,y) → ¬SameShape(x,y))
Z	∀x ∀y SameShape(x,y) → ∃z (¬Cube(z) ∧ ¬Medium(z))

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal

1. ¬Cube(x1) ∨ Adjoins(x1, f(x1))	de P1
2. ¬Medium(x2) ∨ Adjoins(x2, f(x2))	de P1
3. ¬Adjoins(x3,y3) ∨ ¬SameShape (x3,y3)	de P2
4. Cube(x4) ∨ Medium(x4)	de ¬Z
5. SameShape (x5,y5)	de ¬Z

b) Mostre que as cláusulas obtidas são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

6. ¬Adjoins(x5, y5)	Res 5, 3 {x3 / x5, y3 / y5}
7. ¬Cube(x1)	Res 6, 1 {x5 / x1, y5 / f(x1)}
8. Medium(x4)	Res 7, 4 {x1 / x4}
9. Adjoins(x4, f(x4))	Res 8, 2 {x2 / x4 }
10. ¬SameShape(x4, f(x4))	Res 9, 3 {x3 / x4, y3 / f(x3)}
11. □	Res 10, 5 {x5 / x4, y5 /f(x4)}

4.6. (5 valores) Notando que

S(1) = (1+2) = 3 = 2^2 - 1,
S(2) = (1+2) + (2+3) = 8 = 3^2 - 1,
S(3) = (1+2) + (2+3) + (3+4) = 15 = 4^2 - 1,

prove por indução sobre os números naturais que $S(n) = \sum_{i=1}^{n}[i + (i+1)] = (n+1)^2 - 1$.

Passo Base: $S(1) = (1+1)^2-1 = 2^2-1$

Para n = 1 temos S(1) = 1+2 = 3 = 4-1 = 2^2-1

Passo de Indução: $S(n) = (n+1)^2-1 \Rightarrow S(n+1) = (n+2)^2-1$

$$\begin{aligned} S(n+1) &= S(n) + (n+1+n+2) \\ &= (n+1)^2-1 + (2n+3) \\ &= n^2 + 2n + 1 - 1 + 2n + 3 \\ &= n^2 + 4n + 3 \\ &= n^2 + 4n + 4 - 1 \\ &= (n+2)^2 - 1 \end{aligned}$$

q.e.d.