Lógica Computacional

Duração: 1h

Época de 2014 / 15– 4º Teste de Avaliação (sem Consulta)

Nome:	**nº:**

1. **(2 vals)** Pretende-se verificar se o conjunto *S* de cláusulas Horn abaixo indicado é satisfazível,

1. (E ∧ G) → A	6. (C ∧ G) → B
2. (B ∧ F) → I	7. (A ∧ E) → G
3. (G ∧ H) → I	8. (A ∧ C ∧ E) → H
4. (D ∧ F) → ⊥	9. (A ∧ G) → C
5 ⊤ → G	10. G → E

a) Indique (com **=T**) os átomos que deverão ser verdadeiros em qualquer interpretação que satisfaça S.

A = T (1)	**B = T (6)**	**C = T (9)**	**D =**	**E = T (10)**
F =	**G = T (5)**	**H = T (8)**	**I = T (3)**	**⊥ =**

b) O conjunto S é satisfazível? Se sim, quais as interpretações que o satisfazem?

Pela alínea anterior, o átomo ⊥ **não** é inferido pelas cláusulas de Horn, e S é satisfeito por interpretações em que os átomos do conjunto {A, B, C, E, G, H, I} são verdadeiros. Adicionalmente nas interpretações que satisfazem S, pelo menos um dos átomos {D, F} deve ser falso (para satisfazer a cláusula 4).

2. **(3 vals)** Mostre por resolução a validade do seguinte argumento em lógica proposicional.

P1	D → (B ∧ C)
P2	C → D
P3	¬A → D
P4	B ↔ ¬C
Z	A ∧ B

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão (Z) na forma clausal.

b) Mostre que as cláusulas obtidas em a) são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

1. B ∨ ¬D	de P1
2. C ∨ ¬D	de P1
3. ¬C ∨ D	de P2
4. A ∨ D	de P3
5. ¬B ∨ ¬C	de P4
6. B ∨ C	de P4
7. ¬A ∨ ¬B	de ¬Z

8. ¬B ∨ D	Res 7, 4
9. C ∨ D	Res 8, 6
10. D	Res 9, 3
11. C	Res 10, 2
12. ¬B	Res 11, 5
13. ¬D	Res 12, 1
14. □	Res 13, 10

3. **(3 vals)** Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições

a) Todos os tetraedros são do mesmo tamanho que os cubos que estejam na mesma coluna.

∀x ∀y ((Tet(x) ∧ Cube(y) ∧ SameCol(x,y)) → SameSize(x,y))

b) Não há cubos que não estejam entre dois blocos, um dos quais é um dodecaedro.

∀x (Cube(x) → ∃y ∃z (Dodec(y) ∧ Between(x,y,z)))

c) Todos os dodecaedros estão na mesma linha de um cubo que está à frente do bloco c.

∃x (Cube(x) ∧ FrontOf(x,c) ∧ ∀y (Dodec(y) → SameRow(x,y)))

d) Todos os blocos são grandes excepto os tetraedros adjacentes a (ao lado de) um bloco.

∀x (¬(Tet(x) ∧ ∃y Adjoins(x,y)) → Large(x))

e) Todos os cubos são maiores que os tetraedros à sua direita.

∀x (Cube(x) → ∀y ((Tet(y) ∧ RightOf(y,x)) → Larger(x,y)))

4. **(1.5 vals)** Converta as fórmulas para a forma Prenex com a matriz na forma normal conjuntiva (CNF).

a) ∀x (Cube(x) → ∃y FrontOf(x,y))

∀x ∃y (¬Cube(x) ∨ FrontOf(x,y))

b) ∀x Tet(x) → ∃y Cube(y)

∃x ∃y (¬Tet(x) ∨ Cube(y))

c) ¬∀x (Small(x) → ∃y Adjoins(y,x))

∃x ∀y (Small(x) ∧ ¬Adjoins(y,x))

5. **(2 vals)** Coloque na forma clausal, incluindo a Skolemização, as seguintes fórmulas Prenex:

a) ∀x ∃y ¬(Cube(x) ∧ ¬(Large(y) ∧ SameCol(y,x)))

1. ¬Cube(x1) ∨ Large(f(x1)) 2. ¬Cube(x2) ∨ SameCol(f(x2),x2))

b) ∃x ∀y ∃z (Small(x) ∧ (Tet(y) → Between(z,y,x)))

1. Small(a) 2. ¬Tet(x2) ∨ Between (f(x2),x2, a)

6. **(1 val)** Obtenha uma substituição σ que unifique os dois termos abaixo. Indique qual o termo obtido quando se aplica essa substituição a qualquer um dos termos unificados

T1 : Larger(x, y, g(x,a))   T2 : Larger(z, f(z), g(b,w))

substituição σ = { x/ b, y/ f(b), z/ b, w/ a }
T1 σ = T2 σ = Larger(b, f(b), g(b,a))

7. **(5 vals)** Mostre por resolução a validade do seguinte argumento de lógica de predicados de 1ª ordem

P1	∀x (Cube(x) → ∃y Larger(y,x))
P2	∀x ∀y ((Medium(x) ∧ Larger(y,x)) → Tet(y))
P3	¬∃x Tet(x)
Z	∀x (Cube(x) → ¬ Medium(x))

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal

1.	¬Cube(x1) ∨ Larger(f(x1),x1)	de P1
2.	¬Medium(x2) ∨ ¬Larger(y2,x2) ∨ Tet(y2)	de P2
3.	¬Tet(x3)	de P3
4.	Cube(c)	de ¬Z
5.	Medium(c)	de ¬Z

b) Mostre que as cláusulas obtidas são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

6.	Larger(f(c),c)	Res 4, 1	{ x1/ c }
7.	¬Medium(c) ∨ Tet(f(c))	Res 6, 2	{ x2/ c, y2/ f(c) }
8.	Tet(f(c))	Res 7, 5	{ }
9.	□	Res 8, 3	{ x3/ f(c) }

8. **(2.5 vals)** Notando que

$$S(1) = (2^3-1^3) = 7 = 2^3 - 1$$
$$S(2) = (2^3-1^3)+(3^3-2^3) = 26 = 3^3 - 1$$
$$S(3) = (2^3-1^3)+(3^3-2^3)+(4^3-3^3) = 63 = 4^3 - 1 \ \ldots$$

prove por indução sobre os números naturais que $S(n) = \sum_{i=1}^{n}((i+1)^3 - i^3) = (n+1)^3 - 1$.

Passo Base: $S(1) = (1+1)^3-1$

Para n = 1 confirmamos que $2^3-1^3 = 2^3-1 = 7$

Passo de Indução: $S(n) = (n+1)^3-1 \Rightarrow S(n+1) = ((n+1)+1)^3-1 = (n+2)^3-1$

Seja **n** um inteiro arbitrário. Então

$S(n+1) = \Sigma_{i=1}^{n+1}((i+1)^3-i^3)$

$= \Sigma_{i=1}^{n}((i+1)^3-i^3) + ((n+1+1)^3-(n+1)^3)$ isolando o último termo

$= S(n) + ((n+1+1)^3-(n+1)^3)$ por definição de S(n)

$= ((n+1)^3 - 1) + (n+2)^3-(n+1)^3$ pela hipótese de indução

$= (n+2)^3 -1$ por simplificação

q.e.d.