Lógica Computacional

Duração: 3h

Ano de 2015 / 16 – Exame Final

Grupos para Avaliar (Todos por Omissão)

G1	G2	G3	G4

Nome:	**nº:**

1.1. (5 valores) Considere as seguintes frases (assuma que uma pessoa só tem uma casa)

- O carro do Rui custa 50000 euros e é mais barato que o do Abel.
- O Rui vai participar no Rali, mas não o Abel.
- Se o Rui furar no Rali então ele não pode ganhar esse Rali.

a) Apresente uma assinatura Σ = <NP, $NF_0 \cup NF_1$> de uma linguagem de 1ª ordem que lhe permita escrever fórmulas de 1ª ordem correspondentes

NF_0: Constantes	*NF_1: Funções*	*NP: Predicados*

b) Traduza para fórmulas de 1ª ordem as frases acima indicadas:

i) O carro do Rui custa 50000 euros e é mais barato que o do Abel.

ii) O Rui vai participar no Rali, mas não o Abel.

iii) Se o Rui furar no Rali então ele não pode ganhar esse Rali.

1.2. (2 valores) Classifique cada uma das fórmulas abaixo, indicando no quadro (com S e N, respectivamente) se são ou não

V-TT: Verdade Tautológica; V-FO: Verdade Lógica V-TW: Verdade Analítica (Tarski)
P-TT: Possibilidade Tautológica; P-FO: Possibilidade Lógica; P-TW: Possibilidade Analítica (Tarski)

	V-TT	V-FO	V-TW	P-TT	P-FO	P-TW
(Cube(a) ∧ a = b) → ¬ Tet(b)						
(Tet(a) ∧ Cube(b)) → a = b						
a = b ∧ Tet(a) ∧ ¬ Tet(b)						

1.3. (3 valores) Considerando os mundos e a linguagem de Tarski, indique se os seguintes argumentos são válidos tautologica (Val-TT), logica (Val-FO) e/ou analiticamente (nos mundos de Tarski Val-TW).

{Premissa 1, ... , Premissa n } |= Conclusão		Val-TT	Val-FO	Val-TW
{ Cube(a) → Tet(b)}	**|= Cube(a) ∧ Tet(b)**			
{ LeftOf(a,b)}	**|= ¬ SameCol(a,b)**			
{ Tet(a), ¬ Tet(b) }	**|= a ≠ b**			

1.4. (5 valores) Considere as fórmulas **P1:** $(A \land C) \leftrightarrow \neg B$ e **P2:** $\neg C \rightarrow B$, bem como as fórmulas **C1:** $\neg A \lor B$ e **C2:** $B \rightarrow (\neg A \lor C)$.

a) Preencha a seguinte tabela de verdade relativa às fórmulas **P1**, **P2**, **C1** e **C2**.

A	B	C	$(A \land C) \leftrightarrow \neg B$	$\neg C \rightarrow B$	$\neg A \lor \neg B$	$B \rightarrow (\neg A \lor \neg C)$
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

b) Por análise da tabela, indique justificando se as fórmulas **C1** e **C2** são ou não consequências tautológicas das premissas P1 e P2.

Justificação:

1.5. **(5 valores)** Considere a fórmula $\neg((A \lor B) \rightarrow C) \land \neg(\neg B \lor (A \land \neg C))$. Converta-a para as formas normais conjuntiva (CNF) e disjuntiva (DNF), simplificando-as da forma mais conveniente.

Grupo 2

(corresponde ao 2º teste)

2.1. (4 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições

a) Um dos objectos **a** ou **b** é menor que o outro.

b) Os cubos **a** e **b** estão na mesma coluna mas em linhas diferentes.

c) Se o objecto **a** estiver atrás do **b**, então **b** é pequeno a menos que **a** e **b** sejam do mesmo tamanho.

d) O tetratedro **c** não está entre os blocos **a** e **b** se estes estiverem na mesma coluna.

2.2. (4 valores) Considere os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiro de 3 × 3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições

1. **¬(SameShape(b,c) ∨ ¬Dodec(b))**
2. **Between(c,a,b)**
3. **Cube(a) ∨ Cube(c)**
4. **LeftOf(b,a) ∧ BackOf(c,a)**
5. **Cube(c) → a = b**

2.3. (3 valores) Considere o seguinte argumento na linguagem de Tarski, e a respectiva demonstração.

a) Verifique que a demonstração está *errada*, e indique o(s) passo(s) em que as regras do sistema de Dedução Natural não foram corretamente utilizadas

```
1. | Tet(a) → ¬(Tet(b) ∨ Tet(c))
2. | (Tet(b) ∧ Tet(c))→ Dodec(d)
   |-----------------------------
3. | | Tet(a)
   | |--------
4. | | ¬(Tet(b) ∨ Tet(c))     Elim →: 1 , 3
5. | | Tet(b) ∧ Tet(c)        Elim ¬: 4
6. | | Dodec(d)               Elim →: 2 , 5
7. | Tet(a) → Dodec(d)        Intr →: 3 - 6
```

Erro(s):

b) Indique no tabuleiro ao lado um contra-exemplo que mostre que o argumento não é válido

2.4. (4 valores) Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas

1	A → (C ∨ D)	
2	¬(¬C ∧ ¬D) ↔ B	
3.	¬B	
4.	A	
5.		Elim → : 1 , 4
6.	¬(¬C ∧ ¬D)	
7.	B	Elim ↔ : 2 , 6
8.	⊥	
9.		Intr ¬ : 6 - 8
10.	¬C ∧ ¬D	Elim ¬ : 9
11.	C	
12.		Elim ∧ : 10
13.	⊥	Intr ⊥ : 11 , 12
14.	D	
15.	¬D	
16.	⊥	Intr ⊥ : 14 , 15
17.	⊥	
18.		Intr ¬ : 4 - 17
19.	¬B → ¬A	

2.5. **(5 valores)** Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural

1.	(A ∨ B) → C
2.	D → A
	¬ D ∨ C

Grupo 3

(corresponde ao 3º teste)

3.1. (5 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições

a) Objectos distintos com a mesma forma não têm o mesmo tamanho.

b) Não há cubos atrás de todos os tetraedros.

c) Cubos do mesmo tamanho estão em linhas diferentes.

d) Os únicos objectos grandes são tetraedros a menos que sejam cubos com objectos adjacentes.

e) Os blocos entre a e b que não são grandes são todos cubos.

f) Os blocos mais à frente (i.e. sem blocos à sua frente) que não são tetraedros são cubos.

3.2. (4 valores) Considere os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiro de 3 × 3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições

1. `∃x ∃y (Tet(x) ∧ Tet(y) ∧ Between(c,x,y))`
2. `∀x ¬Dodec(x)`
3. `∃x (Tet(x) ∧ Between(x,b,c))`
4. `∀x (Cube(x) ↔ (x = b ∨ x = c))`
5. `SameCol(b,c) ∧ FrontOf(b,c)`
6. `∃x (Tet(x) ∧ ∀y ((Tet(y) ∧ x ≠ y)) → FrontOf(x,y)))`

3.3. (2 valores) O seguinte argumento é válido analiticamente nos Mundos de Tarski.

```
1 | ∀x (Small(x) ∨ Large(x))
2 | ∀x (Cube(x) → Medium(x))
  |---------------------------
3 | ∀x ¬ Tet(x) → Dodec(x)
```

Assinale em baixo, quais os axiomas de Tarski que seria necessário colocar explicitamente como premissas para que o argumento fosse válido logicamente (válido-FO).

- ☐ `∀x (Large(x) ∨ Medium(x) ∨ Small(x))`
- ☐ `¬ ∃x (Large(x) ∧ Medium(x))`
- ☐ `¬ ∃x (Large(x) ∧ Small (x))`
- ☐ `¬ ∃x (Medium(x) ∧ Small(x))`
- ☐ `∀x (Tet(x) ∨ Cube(x) ∨ Dodec(x))`
- ☐ `¬ ∃x (Tet(x) ∧ Cube(x))`
- ☐ `¬ ∃x (Tet(x) ∧ Dodec(x))`
- ☐ `¬ ∃x (Cube(x) ∧ Dodec(x))`

3.4. (4 valores) Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas.

1.	∀x ((Cube(x) ∨ Tet(x)) → ∃y ∃z Between(x,y,z))	
2.	∀x (Cube(x) ∨ Tet(x) ∨ Dodec(x))	
3.	¬ ∃x ∃y ∃z Between(z,x,y)	
4.	a :	
5.	¬Dodec(a)	
6.	Cube(a) ∨ Tet(a) ∨ Dodec(a)	Elim ∀: 2
7.		
8.	(Cube(a)∨Tet(a)) → ∃y ∃z Between(a,y,z)	
9.	∃y ∃z Between(a,y,z)	Elim →: 7, 8
10.		
11.	⊥	Intr ⊥: 3 , 10
12.	Dodec(a)	
13.	⊥	Intr ⊥: 5 , 12
14.		
15.		Intr ¬: 5 - 14
16.	Dodec(a)	Elim ¬: 15
17.	∀x Dodec(x)	

3.5. (5 valores) Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural.

1.	∀x (Cube(x) → ∃y (Tet(y) ∧ Adjoins(x,y)))
2.	∀x (Tet(x) → Large(x))
3.	¬∃x ∃y (Cube(x) ∧ Large(y) ∧ Adjoins(x,y))
	¬∃x Cube(x)

Grupo 4

(corresponde ao 4º teste)

4.1. (2 valores) Verifique se o conjunto S de cláusulas Horn abaixo indicado é satisfazível.

1. $B \rightarrow E$	5. $(B \land D) \rightarrow F$
2. $(A \land E) \rightarrow B$	6. $A \rightarrow B$
3. $T \rightarrow A$	7. $(A \land E) \rightarrow C$
4. $(B \land F) \rightarrow G$	8. $D \rightarrow \bot$

4.2. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento em lógica proposicional.

P1	$(A \lor B)$
P2	$(A \rightarrow C) \land (B \rightarrow D)$
X	$\neg C \rightarrow D$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal.

b) Mostre que as cláusulas obtidas em a) são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

4.3. (2 valores) Converta as fórmulas abaixo para a forma Prenex, com a matriz na forma normal CNF.

a) `∃x (Tet(x) ∧ ∀y (Cube(y) → LeftOf(x,y)))`

b) `∀x Cube(x) → ∃y Large(y)`

4.4. (1 valor) Coloque na forma clausal, incluindo a Skolemização, a seguinte fórmula:

`∃x (Cube(x) ∧ ∀y (FrontOf(y,x) → ∃z LeftOf(z,y)))`

4.5. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento de lógica de predicados de 1ª ordem.

P1	**∀x (Cube(x) → ∃y (Tet(y) ∧ Adjoins(x,y)))**
P2	**∀x (Tet(x) → Large(x))**
P3	**¬∃x ∃y (Cube(x) ∧ Large(y) ∧ Adjoins(x,y))**
C	**¬∃x Cube(x)**

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal

b) Mostre que as cláusulas obtidas são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

4.6. (5 valores) Notando que

```
S(1) = 3                =  3,
S(2) = S(1) + 1*3       = 3 + 3 = 6,
S(3) = S(2) + 2*3       = 6 + 6 = 12,
S(4) = S(3) + 3*3       = 12 + 9 = 21,
...
```

a) Defina, por indução, o termo genérico S_n da sequência S.

Cláusula de Base (S_1):

Cláusula de Indução (S_{n+1}):

b) Prove que todos os termos da sequência S são divisíveis por 3 (isto é, S_n mod 3 = 0)

Cláusula de Base :

Cláusula de Indução: