

Lógica Computacional

Duração: 3h

Ano de 2015 / 16 – Exame Final

Grupos para Avaliar

(Todos por Omissão)

G1

G2

G3

G4

Nome:

nº:

1.1. (5 valores) Considere as seguintes frases (assuma que uma pessoa só tem uma casa)

- O carro do Rui custa 50000 euros e é mais barato que o do Abel.
- O Rui vai participar no Rali, mas não o Abel.
- Se o Rui furar no Rali então ele não pode ganhar esse Rali.

a) Apresente uma assinatura $\Sigma = \langle NP, NF_0 \cup NF_1 \rangle$ de uma linguagem de 1ª ordem que lhe permita escrever fórmulas de 1ª ordem correspondentes

NF_0 : Constantes	NF_1 : Funções	NP : Predicados

b) Traduza para fórmulas de 1ª ordem as frases acima indicadas:

i) O carro do Rui custa 50000 euros e é mais barato que o do Abel.

ii) O Rui vai participar no Rali, mas não o Abel.

iii) Se o Rui furar no Rali então ele não pode ganhar esse Rali.

1.2. (2 valores) Classifique cada uma das fórmulas abaixo, indicando no quadro (com S e N, respectivamente) se são ou não

V-TT: Verdade Tautológica;

V-FO: Verdade Lógica

V-TW: Verdade Analítica (Tarski)

P-TT: Possibilidade Tautológica;

P-FO: Possibilidade Lógica;

P-TW: Possibilidade Analítica (Tarski)

$(\text{Cube}(a) \wedge a = b) \rightarrow \neg \text{Tet}(b)$

$(\text{Tet}(a) \wedge \text{Cube}(b)) \rightarrow a = b$

$a = b \wedge \text{Tet}(a) \wedge \neg \text{Tet}(b)$

V-TT	V-FO	V-TW	P-TT	P-FO	P-TW

1.3. (3 valores) Considerando os mundos e a linguagem de Tarski, indique se os seguintes argumentos são válidos tautologica (Val-TT), logica (Val-FO) e/ou analiticamente (nos mundos de Tarski Val-TW).

{Premissa 1, ..., Premissa n} |= Conclusão

{ Cube(a) $\rightarrow$ Tet(b) } |= Cube(a) $\wedge$ Tet(b)

{ LeftOf(a,b) } |= $\neg$ SameCol(a,b)

{ Tet(a), $\neg$ Tet(b) } |= $a \neq b$

Val-TT	Val-FO	Val-TW

1.4. (5 valores) Considere as fórmulas **P1**: $(A \wedge C) \leftrightarrow \neg B$ e **P2**: $\neg C \rightarrow B$, bem como as fórmulas **C1**: $\neg A \vee B$ e **C2**: $B \rightarrow (\neg A \vee C)$.

a) Preencha a seguinte tabela de verdade relativa às fórmulas **P1**, **P2**, **C1** e **C2**.

A	B	C	$(A \wedge C) \leftrightarrow \neg B$	$\neg C \rightarrow B$	$\neg A \vee \neg B$	$B \rightarrow (\neg A \vee \neg C)$
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

b) Por análise da tabela, indique justificando se as fórmulas **C1** e **C2** são ou não consequências tautológicas das premissas P1 e P2.

Justificação:

1.5. (5 valores) Considere a fórmula $\neg((A \vee B) \rightarrow C) \wedge \neg(\neg B \vee (A \wedge \neg C))$. Converta-a para as formas normais conjuntiva (CNF) e disjuntiva (DNF), simplificando-as da forma mais conveniente.

Grupo 2

(corresponde ao 2º teste)

2.1. (4 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições

a) Um dos objectos **a** ou **b** é menor que o outro.

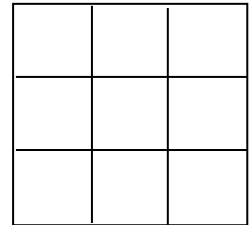
b) Os cubos **a** e **b** estão na mesma coluna mas em linhas diferentes.

c) Se o objecto **a** estiver atrás do **b**, então **b** é pequeno a menos que **a** e **b** sejam do mesmo tamanho.

d) O tetratedro **c** não está entre os blocos **a** e **b** se estes estiverem na mesma coluna.

2.2. (4 valores) Considere os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiro de 3×3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições

1. $\neg (\text{SameShape}(b, c) \vee \neg \text{Dodec}(b))$
2. $\text{Between}(c, a, b)$
3. $\text{Cube}(a) \vee \text{Cube}(c)$
4. $\text{LeftOf}(b, a) \wedge \text{BackOf}(c, a)$
5. $\text{Cube}(c) \rightarrow a = b$



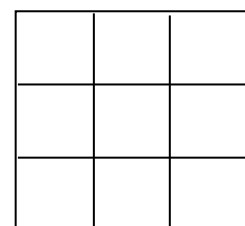
2.3. (3 valores) Considere o seguinte argumento na linguagem de Tarski, e a respectiva demonstração.

a) Verifique que a demonstração está *errada*, e indique o(s) passo(s) em que as regras do sistema de Dedução Natural não foram corretamente utilizadas

1.	$\text{Tet}(a) \rightarrow \neg(\text{Tet}(b) \vee \text{Tet}(c))$	
2.	$(\text{Tet}(b) \wedge \text{Tet}(c)) \rightarrow \text{Dodec}(d)$	
3.	$\text{Tet}(a)$	
4.	$\neg(\text{Tet}(b) \vee \text{Tet}(c))$	Elim $\rightarrow$: 1 , 3
5.	$\text{Tet}(b) \wedge \text{Tet}(c)$	Elim $\neg$: 4
6.	$\text{Dodec}(d)$	Elim $\rightarrow$: 2 , 5
7.	$\text{Tet}(a) \rightarrow \text{Dodec}(d)$	Intr $\rightarrow$: 3 - 6

Erro(s):

b) Indique no tabuleiro ao lado um contra-exemplo que mostre que o argumento não é válido



1	$A \rightarrow (C \vee D)$	
2	$\neg(\neg C \wedge \neg D) \leftrightarrow B$	
3.	$\neg B$	
4.	A	
5.		Elim $\rightarrow$: 1 , 4
6.	$\neg(\neg C \wedge \neg D)$	
7.	B	Elim $\leftrightarrow$: 2 , 6
8.	$\perp$	
9.		Intr $\neg$: 6 - 8
10.	$\neg C \wedge \neg D$	Elim $\neg$: 9
11.	C	
12.		Elim $\wedge$: 10
13.	$\perp$	Intr $\perp$: 11 , 12
14.	D	
15.	$\neg D$	
16.	$\perp$	Intr $\perp$: 14 , 15
17.	$\perp$	
18.		Intr $\neg$: 4 - 17
19.	$\neg B \rightarrow \neg A$	

[illegible]

Grupo 3

(corresponde ao 3º teste)

3.1. (5 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições

a) Objectos distintos com a mesma forma não têm o mesmo tamanho.

b) Não há cubos atrás de todos os tetraedros.

c) Cubos do mesmo tamanho estão em linhas diferentes.

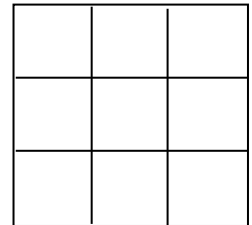
d) Os únicos objectos grandes são tetraedros a menos que sejam cubos com objectos adjacentes.

e) Os blocos entre a e b que não são grandes são todos cubos.

f) Os blocos mais à frente (i.e. sem blocos à sua frente) que não são tetraedros são cubos.

3.2. (4 valores) Considere os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiro de 3×3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições

1. $\exists x \exists y (Tet(x) \wedge Tet(y) \wedge Between(c, x, y))$
2. $\forall x \neg Dodec(x)$
3. $\exists x (Tet(x) \wedge Between(x, b, c))$
4. $\forall x (Cube(x) \leftrightarrow (x = b \vee x = c))$
5. $SameCol(b, c) \wedge FrontOf(b, c)$
6. $\exists x (Tet(x) \wedge \forall y ((Tet(y) \wedge x \neq y) \rightarrow FrontOf(x, y)))$



3.3. (2 valores) O seguinte argumento é válido analiticamente nos Mundos de Tarski.

- | | |
|---|--|
| 1 | $\forall x (Small(x) \vee Large(x))$ |
| 2 | $\forall x (Cube(x) \rightarrow Medium(x))$ |
| 3 | $\forall x \neg Tet(x) \rightarrow Dodec(x)$ |

Assinale em baixo, quais os axiomas de Tarski que seria necessário colocar explicitamente como premissas para que o argumento fosse válido logicamente (válido-FO).

- ☐ $\forall x (Large(x) \vee Medium(x) \vee Small(x))$
- ☐ $\neg \exists x (Large(x) \wedge Medium(x))$
- ☐ $\neg \exists x (Large(x) \wedge Small(x))$
- ☐ $\neg \exists x (Medium(x) \wedge Small(x))$
- ☐ $\forall x (Tet(x) \vee Cube(x) \vee Dodec(x))$
- ☐ $\neg \exists x (Tet(x) \wedge Cube(x))$
- ☐ $\neg \exists x (Tet(x) \wedge Dodec(x))$
- ☐ $\neg \exists x (Cube(x) \wedge Dodec(x))$

3.4. (4 valores) Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas.

1.	$\forall x ((\text{Cube}(x) \vee \text{Tet}(x)) \rightarrow \exists y \exists z \text{Between}(x,y,z))$	
2.	$\forall x (\text{Cube}(x) \vee \text{Tet}(x) \vee \text{Dodec}(x))$	
3.	$\neg \exists x \exists y \exists z \text{Between}(z,x,y)$	
4.	a :	
5.	$\neg \text{Dodec}(a)$	
6.	$\text{Cube}(a) \vee \text{Tet}(a) \vee \text{Dodec}(a)$	Elim $\forall$: 2
7.		
8.	$(\text{Cube}(a) \vee \text{Tet}(a)) \rightarrow \exists y \exists z \text{Between}(a,y,z)$	
9.	$\exists y \exists z \text{Between}(a,y,z)$	Elim $\rightarrow$: 7, 8
10.		
11.	$\perp$	Intr $\perp$: 3, 10
12.	$\text{Dodec}(a)$	
13.	$\perp$	Intr $\perp$: 5, 12
14.		
15.		Intr $\neg$: 5 - 14
16.	$\text{Dodec}(a)$	Elim $\neg$: 15
17.	$\forall x \text{Dodec}(x)$	

3.5. (5 valores) Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural.

1. $\forall x \text{ (Cube}(x) \rightarrow \exists y \text{ (Tet}(y) \wedge \text{Adjoins}(x,y))})$
2. $\forall x \text{ (Tet}(x) \rightarrow \text{Large}(x))$
3. $\neg \exists x \exists y \text{ (Cube}(x) \wedge \text{Large}(y) \wedge \text{Adjoins}(x,y))$

$\neg \exists x \text{ Cube}(x)$

Grupo 4

(corresponde ao 4º teste)

4.1. (2 valores) Verifique se o conjunto S de cláusulas Horn abaixo indicado é satisfazível.

$$1. B \rightarrow E$$

$$2. (A \wedge E) \rightarrow B$$

$$3. T \rightarrow A$$

$$4. (B \wedge F) \rightarrow G$$

$$5. (B \wedge D) \rightarrow F$$

$$6. A \rightarrow B$$

$$7. (A \wedge E) \rightarrow C$$

$$8. D \rightarrow \perp$$

4.2. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento em lógica proposicional.

P1	$(A \vee B)$
P2	$(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow D)$
X	$\neg C \rightarrow D$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal.

b) Mostre que as cláusulas obtidas em a) são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

4.3. (2 valores) Converta as fórmulas abaixo para a forma Prenex, com a matriz na forma normal CNF.

a) $\exists x (Tet(x) \wedge \forall y (Cube(y) \rightarrow LeftOf(x, y)))$

b) $\forall x Cube(x) \rightarrow \exists y Large(y)$

4.4. (1 valor) Coloque na forma clausal, incluindo a Skolemização, a seguinte fórmula:

$$\exists x (Cube(x) \wedge \forall y (FrontOf(y, x) \rightarrow \exists z LeftOf(z, y)))$$

4.5. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento de lógica de predicados de 1ª ordem.

P1	$\forall x \text{ (Cube}(x) \rightarrow \exists y \text{ (Tet}(y) \wedge \text{Adjoins}(x,y))})$
P2	$\forall x \text{ (Tet}(x) \rightarrow \text{Large}(x))$
P3	$\neg \exists x \exists y \text{ (Cube}(x) \wedge \text{Large}(y) \wedge \text{Adjoins}(x,y))}$
C	$\neg \exists x \text{ Cube}(x)$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal

b) Mostre que as cláusulas obtidas são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

4.6. (5 valores) Notando que

$S(1) = 3$	$= 3,$
$S(2) = S(1) + 1 \cdot 3$	$= 3 + 3 = 6,$
$S(3) = S(2) + 2 \cdot 3$	$= 6 + 6 = 12,$
$S(4) = S(3) + 3 \cdot 3$	$= 12 + 9 = 21,$
...	

a) Defina, por indução, o termo genérico S_n da sequência S.

Cláusula de Base (S_1):

Cláusula de Indução (S_{n+1}):

b) Prove que todos os termos da sequência S são divisíveis por 3 (isto é, $S_n \bmod 3 = 0$)

Cláusula de Base :

Cláusula de Indução: