

Lógica Computacional

Duração: 3h

Ano de 2015 / 16 – Exame Final

Grupos para Avaliar

(Todos por Omissão)

G1

G2

G3

G4

Nome:

nº:

1.1. (5 valores) Considere as seguintes frases (assuma que uma pessoa só tem uma casa)

- O carro do Rui custa 50000 euros e é mais barato que o do Abel.
- O Rui vai participar no Rali, mas não o Abel.
- Se o Rui furar no Rali então ele não pode ganhar esse Rali.

a) Apresente uma assinatura $\Sigma = \langle NP, NF_0 \cup NF_1 \rangle$ de uma linguagem de 1ª ordem que lhe permita escrever fórmulas de 1ª ordem correspondentes

NF_0 : Constantes	NF_1 : Funções	NP : Predicados
rui abel rali 150	custoDe/1 carroDe/1	ParticiparEm/2 FurarEm/2 Ganhar/2

b) Traduza para fórmulas de 1ª ordem as frases acima indicadas:

i) O carro do Rui custa 50000 euros e é mais barato que o do Abel.

custoDe(carroDe(rui)) = 50000 $\wedge$ custoDe(carroDe(rui)) < custoDe(carroDe(abel))

ii) O Rui vai participar no Rali, mas não o Abel.

ParticiparEm(rui, rali) $\wedge$ $\neg$ ParticiparEm(abel, rali)

iii) Se o Rui furar no Rali então ele não pode ganhar esse Rali.

FurarEm(rui, rali) $\rightarrow$ $\neg$ Ganhar(rui, rali)

1.2. (2 valores) Classifique cada uma das fórmulas abaixo, indicando no quadro (com S e N, respectivamente) se são ou não

V-TT: Verdade Tautológica;

V-FO: Verdade Lógica

V-TW: Verdade Analítica (Tarski)

P-TT: Possibilidade Tautológica;

P-FO: Possibilidade Lógica;

P-TW: Possibilidade Analítica (Tarski)

(Cube(a) $\wedge$ a = b) $\rightarrow$ $\neg$ Tet(b)

(Tet(a) $\wedge$ Cube(b)) $\rightarrow$ a = b

a = b $\wedge$ Tet(a) $\wedge$ $\neg$ Tet(b)

V-TT	V-FO	V-TW	P-TT	P-FO	P-TW
N	N	S	S	S	S
N	N	N	S	S	N
N	N	N	S	N	N

1.3. (3 valores) Considerando os mundos e a linguagem de Tarski, indique se os seguintes argumentos são válidos tautologica (Val-TT), logica (Val-FO) e/ou analiticamente (nos mundos de Tarski Val-TW).

{Premissa 1, ..., Premissa n} $\models$ Conclusão

{ Cube(a) $\rightarrow$ Tet(b) } $\models$ Cube(a) $\wedge$ Tet(b)

{ LeftOf(a,b) } $\models$ $\neg$ SameCol(a,b)

{ Tet(a), $\neg$ Tet(b) } $\models$ a $\neq$ b

Val-TT	Val-FO	Val-TW
N	N	N
N	N	S
N	S	S

1.4. (5 valores) Considere as fórmulas **P1**: $(A \wedge C) \leftrightarrow \neg B$ e **P2**: $\neg C \rightarrow B$, bem como as fórmulas **C1**: $\neg A \vee B$ e **C2**: $B \rightarrow (\neg A \vee C)$.

a) Preencha a seguinte tabela de verdade relativa às fórmulas **P1**, **P2**, **C1** e **C2**.

A	B	C	$(A \wedge C) \leftrightarrow \neg B$				$\neg C \rightarrow B$			$\neg A \vee \neg B$			$B \rightarrow (\neg A \vee \neg C)$			
V	V	V	V	F	F	F	V	V	F	F	F	F	F	F	F	F
V	V	F	F	V	F	V	V	V	F	F	F	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V	F	V	V	F	V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	F	F	V	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F	V	V	V	V	F	V	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F	V	V	V	V	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V	F	F
F	F	F	F	F	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V

b) Por análise da tabela, indique justificando se as fórmulas **C1** e **C2** são ou não consequências tautológicas das premissas **P1** e **P2**.

Justificação:

A fórmula **C1** é falsa numa interpretação (em que **A = B = Verdade** e **C = Falso**) em que as premissas são verdadeiras. Assim sendo, **C1** não é consequência tautológica de **P1** e **P2**.

A fórmula **C2** é consequência tautológica das premissas **P1** e **P2** pois **C2** só é falsa numa interpretação (em que **A = B = C = Verdade**) em que uma das premissas (**C1**) é igualmente falsa.

1.5. (5 valores) Considere a fórmula $\neg((A \vee B) \rightarrow C) \wedge \neg(\neg B \vee (A \wedge \neg C))$. Converta-a para as formas normais conjuntiva (CNF) e disjuntiva (DNF), simplificando-as da forma mais conveniente.

$$\neg((A \vee B) \rightarrow C) \wedge \neg(\neg B \vee (A \wedge \neg C))$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \neg(\neg(A \vee B) \vee C) \wedge \neg(\neg B \vee (A \wedge \neg C)) && \text{Equivalência de } \rightarrow \\ &\Leftrightarrow (\neg\neg(A \vee B) \wedge \neg C) \wedge (\neg\neg B \wedge \neg(A \wedge \neg C)) && \text{Leis de de Morgan} \\ &\Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge \neg C) \wedge (B \wedge \neg(A \wedge \neg C)) && \text{Dupla Negação} \\ &\Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge \neg C) \wedge (B \wedge (\neg A \vee \neg\neg C)) && \text{Leis de de Morgan} \\ &\Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge \neg C) \wedge (B \wedge (\neg A \vee C)) && \text{Dupla Negação} \\ &\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge \neg C \wedge B \wedge (\neg A \vee C) && \text{Associatividade da } \wedge \end{aligned}$$

Esta fórmula já está em CNF mas pode ser simplificada

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge B \wedge \neg C \wedge (\neg A \vee C) && \text{Comutatividade da } \wedge \\ &\Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge B) \wedge (\neg C \wedge (\neg A \vee C)) && \text{Associatividade da } \wedge \\ &\Leftrightarrow B \wedge (\neg C \wedge (\neg A \vee C)) && \text{Simplificação} \\ &\Leftrightarrow B \wedge ((\neg C \wedge \neg A) \vee (\neg C \wedge C)) && \text{Distribuição da } \wedge \text{ e r.a. } \vee \\ &\Leftrightarrow B \wedge ((\neg C \wedge \neg A) \vee F) && \text{Tautologia} \\ &\Leftrightarrow B \wedge (\neg C \wedge \neg A) && \text{Elemento Neutro} \\ &\Leftrightarrow B \wedge \neg C \wedge \neg A && \text{Associatividade da } \wedge \\ &\Leftrightarrow \neg A \wedge B \wedge \neg C && \text{Comutatividade da } \wedge \end{aligned}$$

Esta fórmula está não só em DNF como também em CNF

Grupo 2

(corresponde ao 2º teste)

2.1. (4 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições

a) Um dos objectos **a** ou **b** é menor que o outro.

$\text{Smaller}(a,b) \vee \text{Smaller}(b,a)$

b) Os cubos **a** e **b** estão na mesma coluna mas em linhas diferentes.

$\text{Cube}(a) \wedge \text{Cube}(b) \wedge \text{SameCol}(a,b) \wedge \neg \text{SameRow}(a,b)$

c) Se o objecto **a** estiver atrás do **b**, então **b** é pequeno a menos que **a** e **b** sejam do mesmo tamanho.

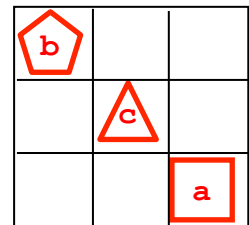
$(\text{BackOf}(a,b) \wedge \neg \text{SameSize}(a,b)) \rightarrow \text{Small}(b)$

d) O tetratedro **c** não está entre os blocos **a** e **b** se estes estiverem na mesma coluna.

$\text{Tet}(c) \wedge (\text{SameCol}(a,b) \rightarrow \neg \text{Between}(c,a,b))$

2.2. (4 valores) Considere os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiro de 3×3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições

1. $\neg (\text{SameShape}(b,c) \vee \neg \text{Dodec}(b))$
2. $\text{Between}(c,a,b)$
3. $\text{Cube}(a) \vee \text{Cube}(c)$
4. $\text{LeftOf}(b,a) \wedge \text{BackOf}(c,a)$
5. $\text{Cube}(c) \rightarrow a = b$



2.3. (3 valores) Considere o seguinte argumento na linguagem de Tarski, e a respectiva demonstração.

a) Verifique que a demonstração está *errada*, e indique o(s) passo(s) em que as regras do sistema de Dedução Natural não foram corretamente utilizadas

1.	$\text{Tet}(a) \rightarrow \neg(\text{Tet}(b) \vee \text{Tet}(c))$	
2.	$(\text{Tet}(b) \wedge \text{Tet}(c)) \rightarrow \text{Dodec}(d)$	
3.	$\text{Tet}(a)$	
4.	$\neg(\text{Tet}(b) \vee \text{Tet}(c))$	Elim $\rightarrow$: 1 , 3
5.	$\text{Tet}(b) \wedge \text{Tet}(c)$	Elim $\neg$: 4
6.	$\text{Dodec}(d)$	Elim $\rightarrow$: 2 , 5
7.	$\text{Tet}(a) \rightarrow \text{Dodec}(d)$	Intr $\rightarrow$: 3 - 6

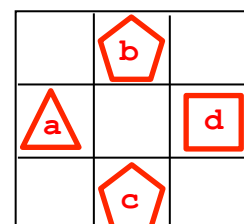
Erro(s):

No passo 5, a eliminação da negação não é aplicável. Mesmo que o fosse, a fórmula obtida seria

$\neg \text{Tet}(b) \wedge \neg \text{Tet}(c)$.

Assim sendo a conclusão não é válida, podendo **a** ser um tetraedro e **d** não ser um dodecaedro.

b) Indique no tabuleiro ao lado um contra-exemplo que mostre que o argumento não é válido



2.4. (4 valores) Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas

1.	$A \rightarrow (C \vee D)$	
2.	$\neg (\neg C \wedge \neg D) \leftrightarrow B$	
3.	$\neg B$	
4.	A	
5.	$C \vee D$	Elim $\rightarrow$: 1 , 4
6.	$\neg (\neg C \wedge \neg D)$	
7.	B	Elim $\leftrightarrow$: 2 , 6
8.	$\perp$	Intr $\perp$: 3 , 7
9.	$\neg \neg (\neg C \wedge \neg D)$	Intr $\neg$: 6 - 8
10.	$\neg C \wedge \neg D$	Elim $\neg$: 9
11.	C	
12.	$\neg C$	Elim $\wedge$: 10
13.	$\perp$	Intr $\perp$: 11 , 12
14.	D	
15.	$\neg D$	Elim $\wedge$: 10
16.	$\perp$	Intr $\perp$: 14 , 15
17.	$\perp$	Elim $\vee$: 5 , 11 - 13 , 14 - 16
18.	$\neg A$	Intr $\neg$: 4 - 17
19.	$\neg B \rightarrow \neg A$	Intr $\rightarrow$: 3 - 18

2.5. (5 valores) Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural

1.	$(A \vee B) \rightarrow C$	
2.	$D \rightarrow A$	
3.	$\neg (\neg D \vee C)$	
4.	D	
5.	A	Elim $\rightarrow$: 2 , 4
6.	$A \vee B$	Intr $\vee$: 5
7.	C	Elim $\rightarrow$: 1 , 6
8.	$\neg D \vee C$	Intr $\vee$: 7
9.	$\perp$	Intr $\perp$: 3 , 8
10.	$\neg D$	Intr $\neg$: 4 - 9
11.	$\neg D \vee C$	Intr $\vee$: 10
12.	$\perp$	Intr $\perp$: 3 , 11
13.	$\neg \neg (\neg D \vee C)$	Intr $\neg$: 3 - 12
14.	$\neg D \vee C$	Elim $\neg$: 13

Grupo 3

(corresponde ao 3º teste)

3.1. (5 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições

a) Objectos distintos com a mesma forma não têm o mesmo tamanho.

$\forall x \forall y ((\text{SameShape}(x,y) \wedge x \neq y) \rightarrow (\neg \text{SameSize}(x,y)))$

b) Não há cubos atrás de todos os tetraedros.

$\neg \exists x (\text{Cube}(x) \wedge \forall y (\text{Tet}(y) \rightarrow \text{BackOf}(x,y)))$

c) Cubos do mesmo tamanho estão em linhas diferentes.

$\forall x \forall y ((\text{Cube}(x) \wedge \text{Cube}(y) \wedge x \neq y \wedge \text{SameSize}(x,y)) \rightarrow \neg \text{SameRow}(x,y))$

d) Os únicos objectos grandes são tetraedros a menos que sejam cubos com objectos adjacentes.

$\forall x (\text{Large}(x) \rightarrow (\text{Tet}(x) \vee (\text{Cube}(x) \wedge \exists y (\text{Cube}(y) \wedge \text{Adjoins}(x,y)))))$

e) Os blocos entre a e b que não são grandes são todos cubos.

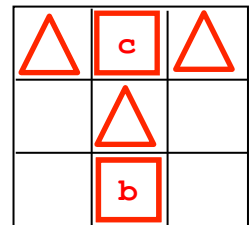
$\forall x ((\text{Between}(x,a,b) \wedge \neg \text{Large}(x)) \rightarrow \text{Cube}(x))$

f) Os blocos mais à frente (i.e. sem blocos à sua frente) que não são tetraedros são cubos.

$\forall x ((\neg \text{Tet}(x) \wedge \neg \exists y \text{FrontOf}(y,x)) \rightarrow \text{Cube}(x))$

3.2. (4 valores) Considere os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiro de 3×3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições

- $\exists x \exists y (\text{Tet}(x) \wedge \text{Tet}(y) \wedge \text{Between}(c,x,y))$
- $\forall x \neg \text{Dodec}(x)$
- $\exists x (\text{Tet}(x) \wedge \text{Between}(x,b,c))$
- $\forall x (\text{Cube}(x) \leftrightarrow (x = b \vee x = c))$
- $\text{SameCol}(b,c) \wedge \text{FrontOf}(b,c)$
- $\exists x (\text{Tet}(x) \wedge \forall y ((\text{Tet}(y) \wedge x \neq y) \rightarrow \text{FrontOf}(x,y)))$



3.3. (2 valores) O seguinte argumento é válido analiticamente nos Mundos de Tarski.

- | | |
|---|--|
| 1 | $\forall x (\text{Small}(x) \vee \text{Large}(x))$ |
| 2 | $\forall x (\text{Cube}(x) \rightarrow \text{Medium}(x))$ |
| 3 | $\forall x \neg \text{Tet}(x) \rightarrow \text{Dodec}(x)$ |

Assinale em baixo, quais os axiomas de Tarski que seria necessário colocar explicitamente como premissas para que o argumento fosse válido logicamente (válido-FO).

- ☐ $\forall x (\text{Large}(x) \vee \text{Medium}(x) \vee \text{Small}(x))$
- ☒ $\neg \exists x (\text{Large}(x) \wedge \text{Medium}(x))$
- ☐ $\neg \exists x (\text{Large}(x) \wedge \text{Small}(x))$
- ☒ $\neg \exists x (\text{Medium}(x) \wedge \text{Small}(x))$
- ☒ $\forall x (\text{Tet}(x) \vee \text{Cube}(x) \vee \text{Dodec}(x))$
- ☐ $\neg \exists x (\text{Tet}(x) \wedge \text{Cube}(x))$
- ☐ $\neg \exists x (\text{Tet}(x) \wedge \text{Dodec}(x))$
- ☐ $\neg \exists x (\text{Cube}(x) \wedge \text{Dodec}(x))$

3.4. (4 valores) Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas.

1.	$\forall x ((\text{Cube}(x) \vee \text{Tet}(x)) \rightarrow \exists y \exists z \text{Between}(x,y,z))$	
2.	$\forall x (\text{Cube}(x) \vee \text{Tet}(x) \vee \text{Dodec}(x))$	
3.	$\neg \exists x \exists y \exists z \text{Between}(z,x,y)$	
4.	a :	
5.	$\neg \text{Dodec}(a)$	
6.	$\text{Cube}(a) \vee \text{Tet}(a) \vee \text{Dodec}(a)$	Elim $\forall$: 2
7.	$\text{Cube}(a) \vee \text{Tet}(a)$	
8.	$(\text{Cube}(a) \vee \text{Tet}(a)) \rightarrow \exists y \exists z \text{Between}(a,y,z)$	Elim $\forall$: 1
9.	$\exists y \exists z \text{Between}(a,y,z)$	Elim $\rightarrow$: 7, 8
10.	$\exists x \exists y \exists z \text{Between}(x,y,z)$	Intr $\exists$: 9
11.	$\perp$	Intr $\perp$: 3, 10
12.	$\text{Dodec}(a)$	
13.	$\perp$	Intr $\perp$: 5, 12
14.	$\perp$	Elim $\vee$: 6, 7-11, 12-13
15.	$\neg \neg \text{Dodec}(a)$	Intr $\neg$: 5 - 14
16.	$\text{Dodec}(a)$	Elim $\neg$: 15
17.	$\forall x \text{Dodec}(x)$	Intr $\forall$: 4 - 16

3.5. (5 valores) Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural.

1.	$\forall x (\text{Cube}(x) \rightarrow \exists y (\text{Tet}(y) \wedge \text{Adjoins}(x,y)))$	
2.	$\forall x (\text{Tet}(x) \rightarrow \text{Large}(x))$	
3.	$\neg \exists x \exists y (\text{Cube}(x) \wedge \text{Large}(y) \wedge \text{Adjoins}(x,y))$	
4.	$\exists x \text{Cube}(x)$	
5.	a: $\text{Cube}(a)$	
6.	$\text{Cube}(a) \rightarrow \exists y (\text{Tet}(y) \wedge \text{Adjoins}(a,y))$	Elim $\forall$: 1
7.	$\exists y (\text{Tet}(y) \wedge \text{Adjoins}(a,y))$	Elim $\rightarrow$: 5, 6
8.	b: $(\text{Tet}(b) \wedge \text{Adjoins}(a,b))$	
9.	$\text{Tet}(b)$	Elim $\wedge$: 8
10.	$\text{Adjoins}(a,b)$	Elim $\wedge$: 8
11.	$\text{Tet}(b) \rightarrow \text{Large}(b)$	Elim $\forall$: 2
12.	$\text{Large}(b)$	Elim $\rightarrow$: 9, 11
13.	$\text{Cube}(a) \wedge \text{Large}(b)$	Intr $\wedge$: 5, 12
14.	$\text{Cube}(a) \wedge \text{Large}(b) \wedge \text{Adjoins}(a,b)$	Intr $\wedge$: 10, 13
15.	$\exists x \exists y (\text{Cube}(x) \wedge \text{Large}(y) \wedge \text{Adjoins}(x,y))$	Intr $\exists$: 14
16.	$\exists x \exists y (\text{Cube}(x) \wedge \text{Large}(y) \wedge \text{Adjoins}(x,y))$	Elim $\exists$: 7, 8 - 15
17.	$\exists x \exists y (\text{Cube}(x) \wedge \text{Large}(y) \wedge \text{Adjoins}(x,y))$	Elim $\exists$: 4, 5 - 16
18.	$\perp$	Intr $\perp$: 3, 17
19.	$\neg \exists x \text{Cube}(x)$	Intr $\neg$: 4 - 18

Grupo 4

(corresponde ao 4º teste)

4.1. (2 valores) Verifique se o conjunto S de cláusulas Horn abaixo indicado é satisfazível.

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| 1. $B \rightarrow E$ | 5. $(B \wedge D) \rightarrow F$ |
| 2. $(A \wedge E) \rightarrow B$ | 6. $A \rightarrow B$ |
| 3. $T \rightarrow A$ | 7. $(A \wedge E) \rightarrow C$ |
| 4. $(B \wedge F) \rightarrow G$ | 8. $D \rightarrow \perp$ |

Pela cláusula 3: $A = \text{True}$. Pela cláusula 6: $B = \text{True}$. Pela cláusula 1: $E = \text{True}$. Pela cláusula 7: $C = \text{True}$. Pela cláusula 8, $D = \text{False}$. Nenhuma das outras proposições, F e G , é implicada pelas cláusulas de Horn. Assim, a interpretação $A = B = C = E = \text{True}$ e ainda $D = F = G = \text{False}$ satisfaz todas as cláusulas independentemente do valor de verdade da proposição G .

4.2. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento em lógica proposicional.

P1	$(A \vee B)$
P2	$(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow D)$
X	$\neg C \rightarrow D$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal.

- | | |
|--------------------|--------------|
| 1. $A \vee B$ | (P1) |
| 2. $\neg A \vee C$ | (P2) |
| 3. $\neg B \vee D$ | (P2) |
| 4. $\neg C$ | ($\neg X$) |
| 5. $\neg D$ | |

b) Mostre que as cláusulas obtidas em a) são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

- | | |
|--------------|----------|
| 6. $\neg B$ | Res 5, 3 |
| 7. A | Res 6, 1 |
| 8. C | Res 7, 2 |
| 9. $\square$ | Res 8, 4 |

4.3. (2 valores) Converta as fórmulas abaixo para a forma Prenex, com a matriz na forma normal CNF.

a) $\exists x (Tet(x) \wedge \forall y (Cube(y) \rightarrow LeftOf(x, y)))$

$\exists x \forall y (Tet(x) \wedge \neg Cube(y) \vee LeftOf(x, y))$

b) $\forall x Cube(x) \rightarrow \exists y Large(y)$

$\exists x \exists y (\neg Cube(x) \vee Large(y))$

4.4. (1 valor) Coloque na forma clausal, incluindo a Skolemização, a seguinte fórmula:

$\exists x (Cube(x) \wedge \forall y (FrontOf(y, x) \rightarrow \exists z LeftOf(z, y)))$

- | |
|--|
| 1. $Cube(a)$ |
| 2. $\neg FrontOf(x_2, a) \vee LeftOf(f(x_2), x_2)$ |

4.5. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento de lógica de predicados de 1ª ordem.

P1	$\forall x (Cube(x) \rightarrow \exists y (Tet(y) \wedge Adjoins(x,y)))$
P2	$\forall x (Tet(x) \rightarrow Large(x))$
P3	$\neg \exists x \exists y (Cube(x) \wedge Large(y) \wedge Adjoins(x,y))$
C	$\neg \exists x Cube(x)$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal

- | | |
|--|-------------|
| 1. $\neg Cube(x1) \vee Tet(f(x1))$ | de P1 |
| 2. $\neg Cube(x2) \vee Adjoins(x2, f(x2))$ | de P1 |
| 3. $\neg Tet(x3) \vee Large(x3)$ | de P2 |
| 4. $\neg Cube(x4) \vee \neg Large(x5) \vee \neg Adjoins(x4, x5)$ | de P3 |
| 5. $Cube(a)$ | de $\neg C$ |

b) Mostre que as cláusulas obtidas são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

- | | |
|--|----------------------|
| 6. $Tet(f(a))$ | Res 5, 1 {x1 / a} |
| 7. $Large(f(a))$ | Res 6, 3 {x3 / f(a)} |
| 8. $\neg Cube(x4) \vee \neg Adjoins(x4, f(a))$ | Res 7, 4 {x5 / f(a)} |
| 9. $\neg Adjoins(a, f(a))$ | Res 8, 5 {x4 / a} |
| 10. $\neg Cube(a)$ | Res 9, 3 {x2 / a} |
| 11. $\square$ | Res 10, 5 {} |

4.6. (5 valores) Notando que

$S(1) = 3$	$= 3,$
$S(2) = S(1) + 1 \cdot 3$	$= 3 + 3 = 6,$
$S(3) = S(2) + 2 \cdot 3$	$= 6 + 6 = 12,$
$S(4) = S(3) + 3 \cdot 3$	$= 12 + 9 = 21,$
...	

a) Defina, por indução, o termo genérico S_n da sequência S.

Cláusula de Base (S_1):

Para $n = 1$ temos
 $S(1) = 3$

Cláusula de Indução (S_{n+1}):

Para n temos
 $S(n+1) = S(n) + n \cdot 3$

b) Prove que todos os termos da sequência S são divisíveis por 3 (isto é, $S_n \bmod 3 = 0$)

Cláusula de Base : $S_1 \bmod 3 = 0$

Para $n = 1$ temos
 $S(1) \bmod 3 = 3 \bmod 3 = 0$

Cláusula de Indução: $S_n \bmod 3 = 0 \Rightarrow S_{n+1} \bmod 3 = 0$

Para $n > 1$ temos
 $S(n+1) \bmod 3 = (S(n) + n \cdot 3) \bmod 3 =$
 $= (S(n) \bmod 3) + (n \cdot 3) \bmod 3$
 $= 0 + 0 = 0$

q.e.d.