

Lógica Computacional

Duração: 1h

Época de 2015 / 16 – 3º Teste de Avaliação (sem Consulta)

Nome:

nº:

1. (3 val) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições

- a) Não existem blocos entre quaisquer dois cubos.

$\neg \exists x \exists y \exists z (Cube(x) \wedge Cube(y) \wedge Between(z, x, y))$; ou
 $\forall x \forall y ((Cube(x) \wedge Cube(y)) \rightarrow \neg \exists z Between(z, x, y))$

- b) Os dodecaedros que sejam maiores que um tetraedro estão à sua esquerda (do tetraedro).

$\forall x (Dodec(x) \rightarrow \forall y (Tet(y) \rightarrow (Larger(x, y) \rightarrow LeftOf(x, y))))$; ou
 $\forall x \forall y ((Dodec(x) \wedge Tet(y) \wedge Larger(x, y)) \rightarrow LeftOf(x, y))$

- c) Todos os cubos estão na mesma linha do que pelo menos um dos tetraedros.

$\forall x (Cube(x) \rightarrow \exists y (Tet(y) \wedge SameRow(x, y)))$

- d) Se existirem cubos então não existem objectos pequenos.

$\exists x Cube(x) \rightarrow \neg \exists y Small(y)$

- e) Os blocos estão todos alinhados (i.e. na mesma linha ou na mesma coluna).

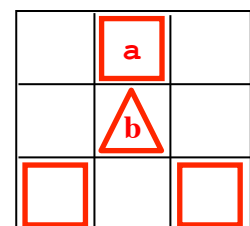
$\forall x \forall y SameRow(x, y) \vee \forall x \forall y SameCol(x, y)$

- f) Não existem dois blocos com o mesmo tamanho ou a mesma forma.

$\neg \exists x \exists y (SameSize(x, y) \vee SameShape(x, y))$; ou
 $\forall x \forall y (\neg SameSize(x, y) \wedge \neg SameShape(x, y))$

2. (3 val) Considerando os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiro de 3×3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições

- $\forall x (Tet(x) \rightarrow (x = b \wedge x \neq a))$
- $\forall x (Dodec(x) \rightarrow \exists y \exists z Between(x, y, z))$
- $\forall x \neg \exists y \exists z Between(x, y, z)$
- $\exists x RightOf(x, b) \wedge \exists x LeftOf(x, b) \wedge \exists x BackOf(x, b)$
- $\exists x \exists y (x \neq y \wedge SameRow(x, y) \wedge FrontOf(x, b))$
- $Cube(a) \wedge \forall x (x \neq a \rightarrow FrontOf(x, a))$



3. (4 val) Complete a demonstração abaixo, preenchendo as caixas assinaladas.

1	$\forall x \forall y ((\text{Cube}(x) \wedge \text{Tet}(y)) \rightarrow \text{FrontOf}(x,y))$	
2	$\exists x (\text{Cube}(x) \wedge \neg \exists y \text{FrontOf}(x,y))$	
3	$\forall x (\neg \text{Tet}(x) \rightarrow \text{Cube}(x))$	
4	a:	
5	$\text{Tet}(a)$	
6	b: $\text{Cube}(b) \wedge \neg \exists y \text{FrontOf}(b,y)$	
7	$\text{Cube}(b)$	Elim $\wedge$: 6
8	$\text{Cube}(b) \wedge \text{Tet}(a)$	Intr $\wedge$: 5 , 7
9	$(\text{Cube}(b) \wedge \text{Tet}(a)) \rightarrow \text{FrontOf}(b,a)$	Elim $\forall$: 1
10	$\text{FrontOf}(b,a)$	Elim $\rightarrow$: 8 , 9
11	$\exists y \text{FrontOf}(b,y)$	Intr $\exists$: 10
12	$\neg \exists y \text{FrontOf}(b,y)$	Elim $\wedge$: 6
13	$\perp$	Intr $\perp$: 11 , 12
14	$\perp$	Elim $\exists$: 2 , 6 - 13
15	$\neg \text{Tet}(a)$	Intr $\neg$: 5 - 14
16	$\neg \text{Tet}(a) \rightarrow \text{Cube}(a)$	Elim $\forall$: 3 - 15
17	$\text{Cube}(a)$	Elim $\rightarrow$: 15 , 16
18	$\forall x \text{Cube}(x)$	Intr $\forall$: 4 - 17

4. (3 val) Considere o seguinte argumento usando a linguagem de Tarski, e a respectiva demonstração.

1	$\exists x \text{Cube}(x) \wedge \exists x \text{Small}(x)$	
2	$\exists x (\text{Cube}(x) \wedge \text{Small}(x)) \rightarrow \forall x \text{BackOf}(x,c)$	
3	a:	
4	b: $\text{Cube}(b) \wedge \text{Small}(b)$	
5	$\exists x (\text{Cube}(x) \wedge \text{Small}(x))$	Intr $\exists$: 4
6	$\forall x \text{BackOf}(x,c)$	Elim $\rightarrow$: 2 , 5
7	$\text{BackOf}(a,c)$	Elim $\forall$: 6
8	$\text{BackOf}(a,c)$	Elim $\exists$: 1 , 4 - 7
9	$\forall x \text{BackOf}(x,c)$	Intr $\forall$: 3 - 8

a) Indique todos os erros da demonstração acima, e se introduzem fórmulas que não são consequências válidas no contexto em que ocorrem.

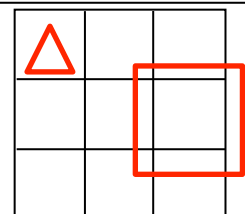
Erros:

Erro 1. Na linha 4, a fórmula introduzida na hipótese está errada pois “agrega” os dois quantificadores da premissa da linha 1 num só.

De facto, a hipótese assume a existência de um cubo pequeno, que denomina por **b**, enquanto que a premissa apenas declara que existe um cubo (que pode não ser pequeno) e existe um objecto pequeno (que pode não ser cubo).

Assim sendo, este contexto introduz fórmulas que não são consequências válidas, nomeadamente a partir da linha 5.

b) Apresente no quadro ao lado um contra exemplo que mostre que o argumento não é válido.



5. (2 val) O seguinte argumento é válido analiticamente nos Mundos de Tarski.

1	$\forall x (\text{Large}(x) \rightarrow \text{Cube}(x))$
2	$\forall x (\text{Medium}(x) \rightarrow \text{Dodec}(x))$
3	$\exists x \text{Tet}(x) \rightarrow \exists x \text{Small}(x)$

Assinale em baixo, quais os axiomas de Tarski que seria necessário utilizar explicitamente como premissas para que o argumento fosse válido logicamente (válido-FO).

Nota: 2 respostas erradas cancelam uma resposta certa, mas a classificação da questão nunca será negativa.

- ☒ $\forall x (\text{Large}(x) \vee \text{Medium}(x) \vee \text{Small}(x))$
- ☐ $\neg \exists x (\text{Large}(x) \wedge \text{Medium}(x))$
- ☐ $\neg \exists x (\text{Large}(x) \wedge \text{Small}(x))$
- ☐ $\neg \exists x (\text{Medium}(x) \wedge \text{Small}(x))$
- ☐ $\forall x (\text{Tet}(x) \vee \text{Cube}(x) \vee \text{Dodec}(x))$
- ☒ $\neg \exists x (\text{Tet}(x) \wedge \text{Cube}(x))$
- ☒ $\neg \exists x (\text{Tet}(x) \wedge \text{Dodec}(x))$
- ☐ $\neg \exists x (\text{Cube}(x) \wedge \text{Dodec}(x))$

6. (5 val) Valide o seguinte argumento apresentando a respectiva demonstração.

1	$\forall x (\text{Cube}(x) \rightarrow \exists y (\text{Dodec}(y) \wedge \text{FrontOf}(x,y)))$	
2	$\exists x \forall y \neg \text{FrontOf}(x,y)$	
3	$a: \forall y \neg \text{FrontOf}(a,y)$	
4	$\text{Cube}(a)$	
5	$\text{Cube}(a) \rightarrow \exists y (\text{Dodec}(y) \wedge \text{FrontOf}(a,y))$	Elim $\forall$: 1
6	$\exists y (\text{Dodec}(y) \wedge \text{FrontOf}(a,y))$	Elim $\rightarrow$: 4 , 5
7	$b: \text{Dodec}(b) \wedge \text{FrontOf}(a,b)$	
8	$\text{FrontOf}(a,b)$	Elim $\wedge$: 7
9	$\neg \text{FrontOf}(a,b)$	Elim $\forall$: 3
11	$\perp$	Intr $\perp$: 8 , 9
12	$\perp$	Elim $\exists$: 6 , 7 - 11
13	$\neg \text{Cube}(a)$	Intr $\neg$: 4 - 12
14	$\exists x \neg \text{Cube}(x)$	Intr $\exists$: 13
15	$\exists x \neg \text{Cube}(x)$	Elim $\exists$: 2 , 3 - 14