Lógica Computacional

Duração: 1h

Época de 2015/ 16 – 4º Teste de Avaliação (sem Consulta)

Nome:	**nº:**

1. **(2.5 vals)** Considere o conjunto *S* de cláusulas Horn abaixo.

1. (B ∧ C) → ⊥	6. T → G
2. G → A	7. (D ∧ I) → H
3. E → B	8. G → E
4. (A ∧ G) → F	9. (A ∧ F) → H
5 (C ∧ H) → ⊥	10. (B ∧ G) → C

a) Mostre que o sistema é insatisfazível, indicando com =**T** os átomos que deveriam ser verdadeiros em qualquer interpretação que satisfaça as cláusulas de S (incluindo naturalmente o átomo ⊥).

A = T (2)	B = T (3)	C = T (10)	D =	E = T (8)
F = T (4)	G = T (6)	H = T (9)	I =	⊥ = T (1,5)

b) Mostre que retirando uma das cláusulas acima o conjunto se tornaria satisfazível. Justifique.

Pela alínea anterior, se retirarmos a cláusula 6, o sistema restante torna-se satisfazível, já que nenhum átomo tem de ser verdadeiro (igualmente retirando-se a cláusula 10, o átomo C poderia ser falso e assim não se inferir ⊥). Uma interpretação que satisfaria S \{6} seria **{¬A,¬B,¬C,¬D,¬E,¬F,¬G,¬H,¬I}** embora não seja única (poderíamos ter **D**).

2. **(3.5 vals)** Mostre por resolução a validade do seguinte argumento em lógica proposicional.

P1	A ↔ (B ∨ C)
P2	D → B
P3	¬(C ∧ ¬D)
P4	A ∨ D
Z	A ∧ B

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão (Z) na forma clausal.

1. ¬A ∨ B ∨ C	de P1
2. A ∨ ¬B	de P1
3. A ∨ ¬C	de P1
4. B ∨ ¬D	de P2
5. ¬C ∨ D	de P3
6. A ∨ B	de P4
7. ¬A ∨ ¬B	de ¬Z

b) Mostre que as cláusulas obtidas em a) são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

8. ¬B	Res	7, 2
9. A	Res	8, 6
10. B ∨ C	Res	9, 1
11. C	Res	10, 8
12. D	Res	11, 5
13. B	Res	12, 4
14. □	Res	13, 8

3. **(2 vals)** Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições

   a) Os cubos que estejam na mesma linha de algum objecto grande também são grandes.

   `∀x ((Cube(y) ∧ ∃y Large(y) ∧ SameRow(x,y)) → Large(x))`

   b) Nenhum dodecaedro é maior que todos os cubos que lhe sejam adjacentes (*adjoins*).

   `¬∃x (Dodec(x) ∧ ∀y ((Cube(y) ∧ Adjoins(x,y)) → Larger(x,y))`

   c) Um bloco que esteja entre outros dois têm a forma de um deles.

   `∀x ∀y ∀z (Between(x,y,z) → (SameShape(x,y) ∨ SameShape(x,z))`

   d) Num mundo sem tetraedros, todos os cubos estão em linha.

   `¬∃z Tet(z) → ∀x ∀y ((Cube(x) ∧ Cube(y)) → (SameRow(x,y) ∨ SameCol(x,y)))`

   e) O único tetraedro é o objecto a (ou seja, qualquer tetraedro tem de ser o objecto a)

   `Tet(a) ∧ ∀x (Tet(x) → x = a)`

4. **(1.5 vals)** Converta as fórmulas para a forma Prenex com a matriz na forma normal conjuntiva (CNF).

   a) `∀x ((Cube(x) ∧ ∃y BackOf(y,x)) → Large(x))`

   `∀x ∀y (¬Cube(x) ∨ ¬BackOf(y,x) ∨ Large(x))`

   b) `∃x (Cube(x) ∧ ∀y (Large(y) → BackOf(y,x))`

   `∃x ∀y (Cube(x) ∧ (¬Large(y) ∨ BackOf(y,x))`

   c) `¬(∀x Small(x) → ∀y Cube(y))`

   `∀x ∃y (Small(x) ∧ ¬Cube(y))`

5. **(2 vals)** Coloque na forma clausal, incluindo a Skolemização, as seguintes fórmulas Prenex:

   a) `∀x ((Cube(x) ∨ Tet(x)) → ∃y FrontOf(y,x))`

   ```
   1. ¬Cube(x1) ∨ FrontOf(f(x1),x1)
   2. ¬Tet(x2)  ∨ FrontOf(f(x2),x2)
   ```

   b) `∀x ((Small(x) ∧ ∀y FrontOf(x,y)) → (Dodec(x) ∧ Adjoins(x,a)))`

   ```
   1. ¬Small(x1) ∨ ¬FrontOf(x1,f(x1)) ∨ Dodec(x1)
   2. ¬Small(x2) ∨ ¬FrontOf(x2,f(x2)) ∨ Adjoins(x2,a)
   ```

6. **(1 val)** Obtenha uma substituição σ que unifique os dois termos abaixo. Indique qual o termo obtido quando se aplica essa substituição a qualquer um dos termos unificados

   `T1 : Adjoins(z, g(y,a))`   `T2 : Adjoins(f(x,y), g(b,x))`

   ```
   substituição σ = { z/ f(a,b), x/a, y/b }
   T1 σ = T2 σ = Adjoins(f(a,b), g(b,a))
   ```

7. **(5 vals)** Mostre por resolução a validade do seguinte argumento de lógica de predicados de 1ª ordem

P1	∀x (Cube(x) → ∃y (Tet(y) ∧ BackOf(y,x)))
P2	∀x (Tet(x) → (¬Medium(x)))
P3	∀x (Large(x) ∨ Medium(x))
C	(¬ ∃x Large(x)) → (¬ ∃x Cube(x))

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal

1.	¬Cube(x1) ∨ Tet(f(x1))	de P1
2.	¬Cube(x2) ∨ BackOf(f(x2), x2)	de P1
3.	¬Tet(x3) ∨ ¬Medium(x3)	de P2
4.	Large(x4) ∨ Medium(x4)	de P3
5.	¬Large(x5)	de ¬C
6.	Cube(a)	

b) Mostre que as cláusulas obtidas são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

7.	Tet(f(a))	Res 6, 1 { x1/ a }
8.	¬Medium(f(a))	Res 7, 3 { x3/ f(a) }
9.	Large(f(a))	Res 8, 4 { x4/ f(a) }
9.	□	Res 9,

8. **(2.5 vals)** Notando que

$$S(0) = 3^0 = 1 = (3-1)/2$$
$$S(1) = 3^0 + 3^1 = 4 = (9-1)/2$$
$$S(2) = 3^0 + 3^1 + 3^2 = 13 = (27-1)/2$$

prove por indução sobre os números naturais que $S(n) = \sum_{i=0}^{n} 3^i = \frac{3^{n+1}-1}{2}$

Passo Base: $S(0) = (3^1-1)/2$

Para n = 0 confirmamos que $3^0 = (3^1-1)/2 = 1$

Passo de Indução: $S(n) = (3^{n+1}-1)/2 \Rightarrow S(n+1) = (3^{n+2}-1)/2$

Seja **n** um inteiro arbitrário. Então

$S(n+1) = \Sigma_{i=0}^{n+1} 3^i$	
$= \Sigma_{i=0}^{n} 3^i + 3^{n+1}$	isolando o último termo
$= S(n) + 3^{n+1}$	por definição de S(n)
$= (3^{n+1}-1)/2 + 3^{n+1}$	pela hipótese de indução
$= (3^{n+1}-1)/2 + 2*3^{n+1}/2$	para obter o mesmo denominador
$= (3^{n+1} - 1 + 2*3^{n+1})/2$	por soma dos numeradores
$= ((1+2)*3^{n+1} - 1)/2$	colocando 3^{n+1} em evidência
$= (3*3^{n+1} - 1)/2$	simplificando
$= (3^{n+2} - 1)/2$	simplificando

q.e.d.