

Lógica Computacional

Duração: 3h

Ano de 2018 / 19 – Exame Final

Grupos para Avaliar
(Todos por Omissão)

G1

G2

G3

G4

Nome:

n.º:

Grupo 1

(corresponde ao 1.º teste)

1.1. (5 valores) Considere as seguintes frases:

- O Rui frequenta a FCT com o número 62346.
- A Maria também frequenta a FCT e tem um número mais baixo que o do Rui.
- A Maria mora em Lisboa, e mora mais longe que o Rui da FCT.

a) Apresente uma assinatura $\Sigma = \langle NP, NF_0 \cup NF_{>0} \rangle$ de uma linguagem de 1.^a ordem que lhe permita escrever fórmulas de 1.^a ordem correspondentes

NF_0 : Constantes	$NF_{>0}$: Funções	NP: Predicados

b) Traduza para fórmulas de 1.^a ordem as frases acima indicadas:

i) O Rui frequenta a FCT com o número 62346.

--

ii) A Maria também frequenta a FCT e tem um número mais baixo que o do Rui.

--

iii) A Maria mora em Lisboa, e mora mais longe que o Rui da FCT.

--

1.2. (2 valores) Considerando os mundos e a linguagem de Tarski, classifique cada uma das fórmulas abaixo, indicando no quadro (com S e N, respectivamente) se são ou não

V-TT: Verdade Tautológica;

V-FO: Verdade Lógica;

V-TW: Verdade Analítica (Tarski);

P-TT: Possibilidade Tautológica;

P-FO: Possibilidade Lógica;

P-TW: Possibilidade Analítica (Tarski).

$(\text{Tet}(a) \wedge \neg \text{Tet}(b)) \rightarrow a \neq b$

$\text{Cube}(a) \vee \text{Tet}(a) \vee \text{Dodec}(a)$

$\text{Small}(a) \wedge (\text{Small}(a) \rightarrow \neg \text{Small}(a))$

V-TT	V-FO	V-TW	P-TT	P-FO	P-TW

1.3. (3 valores) Considerando os mundos e a linguagem de Tarski, indique (com S/N) se os seguintes argumentos são válidos tautologica (Val-TT), logica (Val-FO) e/ou analiticamente (nos mundos de Tarski: Val-TW).

{Premissa 1, ..., Premissa n} $\models$ Conclusão

{ $\text{Cube}(a)$, $a \neq b$ } $\models \neg \text{Cube}(b)$

{ $\text{Tet}(a)$, $\neg \text{Tet}(a)$ } $\models \text{Dodec}(b)$

{ $\text{Large}(a) \vee \text{Medium}(a)$ } $\models \neg \text{Small}(a)$

Val-TT	Val-FO	Val-TW

1.4. (5 valores) Considere as fórmulas **P1**: $B \rightarrow A$, **P2**: $(A \wedge C) \rightarrow B$, e **Z**: $C \rightarrow (A \leftrightarrow B)$.

a) Preencha a seguinte tabela de verdade relativa às fórmulas **P1**, **P2** e **Z**.

A	B	C	$B \rightarrow A$	$(A \wedge C) \rightarrow B$	$C \rightarrow (A \leftrightarrow B)$
V	V	V			
V	V	F			
V	F	V			
V	F	F			
F	V	V			
F	V	F			
F	F	V			
F	F	F			

b) Por análise da tabela, indique justificando se a fórmula **Z** é ou não consequência tautológica de cada uma das fórmulas **P1** ou **P2** (consideradas isoladamente). E de ambas as fórmulas **P1** e **P2**?

Justificação:

1.5. (5 valores) Considere a fórmula $\neg(A \rightarrow \neg C) \vee ((A \wedge B) \leftrightarrow C)$. Converta-a para as formas normais conjuntiva (CNF) e disjuntiva (DNF), simplificando-as da forma mais conveniente.

Grupo 2

(corresponde ao 2.º teste)

2.1. (4 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições:

a) Os blocos a, b e c estão todos em linhas diferentes.

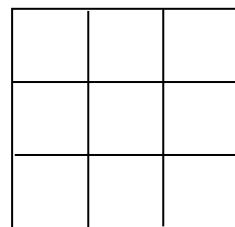
b) Os blocos a e b são o mesmo cubo.

c) O bloco a só é um cubo se um dos blocos b ou c o forem.

d) O cubo c está entre os blocos a e b, a menos que estes estejam na mesma coluna.

2.2. (4 valores) Considerando os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiros de 3×3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições:

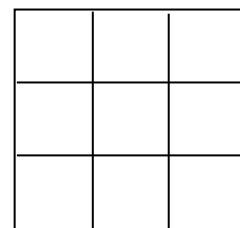
1. $\neg(\neg\text{Dodec}(b) \vee \text{SameCol}(b, c))$
2. $\text{Tet}(a) \wedge \text{RightOf}(a, c)$
3. $\text{Cube}(c) \wedge \text{FrontOf}(a, c) \wedge \text{BackOf}(b, c)$
4. $\neg\text{Between}(c, a, b) \wedge \neg\text{LeftOf}(a, b)$
5. $\text{SameCol}(a, b) \rightarrow \text{FrontOf}(b, c)$



2.3. (3 valores) Considere o seguinte argumento na linguagem de Tarski, e a respectiva demonstração.

a) Verifique que a demonstração está *errada*, e indique o(s) passo(s) em que as regras do sistema de Dedução Natural não foram corretamente utilizadas.

- | | |
|--|---|
| <ol style="list-style-type: none"> 1. $\text{Tet}(a) \vee \neg\text{Cube}(b)$ 2. $\neg\text{Tet}(a) \rightarrow \text{Cube}(b)$ 3. $\text{Cube}(b)$ 4. $\text{Dodec}(c)$ 5. $\text{Tet}(a)$ 6. $\neg\text{Cube}(b)$ 7. $\neg\text{Cube}(b)$ 8. $\perp$ 9. $\neg\text{Dodec}(c)$ 10. $\text{Cube}(b) \rightarrow \neg\text{Dodec}(c)$ | <p>Elim $\rightarrow$: 2 , 5</p> <p>Elim $\vee$: 1 , 5 - 6</p> <p>Intr $\perp$: 3 , 7</p> <p>Intr $\neg$: 4 - 8</p> <p>Intr $\rightarrow$: 3 - 9</p> |
|--|---|



Erro(s):

b) Indique no tabuleiro ao lado um contra-exemplo que mostre que o argumento não é válido.

2.4. (4 val) Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas

1	$A \leftrightarrow (B \vee C)$				
2	$B \rightarrow \neg D$				
3.	D				
4.	B				
5.	$\neg D$			$\text{Elim } \rightarrow : 2, 4$	
6.	$\bot$			$\text{Intr } \bot : 3, 5$	
7.				$\text{Intr } \neg : 4 - 6$	
8.	A				
9.	$B \vee C$				
10.	B				
11.	$\bot$			$\text{Intr } \bot : 7, 10$	
12.	C				
13.	C				
14.	C			$\text{Reit} : 13$	
15.					
16.	C				
17.				$\text{Intr } \vee : 16$	
18.	A			$\text{Elim } \leftrightarrow : 1, 17$	
19.					
20.	$D \rightarrow (A \leftrightarrow C)$			$\text{Intr } \rightarrow : 3 - 19$	

2.5. (5 valores) Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural

1.	$C \rightarrow (A \vee B)$				
2.	$A \rightarrow (B \wedge C)$				
$\neg B \rightarrow \neg C$					

Grupo 3

(corresponde ao 3.º teste)

3.1. (5 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições:

a) Um bloco está entre dois outros, e tem a forma igual de um deles.

b) Todos os dodecaedros são maiores que um dos cubos.

c) Nenhum par de tetraedros tem um objeto entre eles.

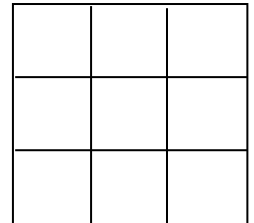
d) Os blocos à esquerda de cubos são menores que eles a menos que estejam na mesma linha.

e) Os cubos são os únicos blocos que têm outros blocos à sua frente.

f) Os blocos não têm todos a mesma forma nem o mesmo tamanho.

3.2. (4 valores) Considerando os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiros de 3×3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições:

1. $\exists x (Cube(x) \wedge \neg \exists y (x \neq y \wedge \neg LeftOf(y, x)))$
2. $Cube(c) \wedge \forall x \forall y (Dodec(x)) \rightarrow \neg SameCol(x, y)$
3. $\exists x (Tet(x) \wedge \forall y (x \neq y \rightarrow (FrontOf(y, x) \vee BackOf(y, x))))$
4. $Dodec(d) \wedge \forall x \forall y (x \neq y \rightarrow \neg SameShape(x, y))$
5. $\forall x \forall y ((Cube(x) \wedge Dodec(y)) \rightarrow FrontOf(x, y))$
6. $\forall x (\forall y (x \neq y \rightarrow RightOf(y, x)) \rightarrow Tet(x))$



3.3. (2 valores) O seguinte argumento é válido analiticamente nos Mundos de Tarski.

1	$\neg \exists x (Cube(x) \wedge \neg Small(x))$
2	$\forall x (Large(x) \leftrightarrow Dodec(x))$
3	$\forall x (Medium(x) \rightarrow Tet(x))$

Assinale em baixo, quais os axiomas de Tarski que seria necessário colocar explicitamente como premissas para que o argumento fosse válido logicamente (válido-FO).

- ☐ $\forall x (Large(x) \vee Medium(x) \vee Small(x))$
- ☐ $\neg \exists x (Large(x) \wedge Medium(x))$
- ☐ $\neg \exists x (Large(x) \wedge Small(x))$
- ☐ $\neg \exists x (Medium(x) \wedge Small(x))$
- ☐ $\forall x (Tet(x) \vee Cube(x) \vee Dodec(x))$
- ☐ $\neg \exists x (Tet(x) \wedge Cube(x))$
- ☐ $\neg \exists x (Tet(x) \wedge Dodec(x))$
- ☐ $\neg \exists x (Cube(x) \wedge Dodec(x))$

3.4. (4 valores) Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas.

1.	$\forall x (Tet(x) \leftrightarrow Large(x))$	
2.	$\exists x (Large(x) \wedge \neg \exists y \neg SameCol(x,y))$	
3.		
4.	Large(a)	Elim $\wedge$: 3
5.	$Tet(a) \leftrightarrow Large(a)$	
6.	Tet(a)	Elim $\leftrightarrow$: 4, 5
7.	b:	
8.	$\neg SameCol(a,b)$	
9.	$\exists y \neg SameCol(a,y)$	
10.		Elim $\wedge$: 3
11.	$\perp$	Intr $\perp$: 9, 10
12.	$\neg \neg SameCol(a,b)$	Intr $\neg$: 8 - 11
13.	SameCol(a,b)	Elim $\neg$: 12
14.		
15.	$Tet(a) \wedge \forall y SameCol(a,y)$	Intr $\wedge$: 6, 14
16.		Intr $\exists$: 15
17.	$\exists x (Tet(x) \wedge \forall y SameCol(x,y))$	

3.5. (5 valores) Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural.

1. $\forall x \text{ (Cube}(x) \rightarrow \exists y \text{ FrontOf}(y, x))$
2. $\neg \exists x \exists y \text{ (Medium}(x) \wedge \text{FrontOf}(y, x))$

$\neg \forall x \text{ (Cube}(x) \wedge \text{Medium}(x))$

Grupo 4

(corresponde ao 4.º teste)

4.1. (2 valores) Verifique se o conjunto S de cláusulas Horn abaixo indicado é satisfazível. Existe mais do que uma interpretação que satisfaça S ? Justifique.

$$1. (B \wedge C) \rightarrow E$$

$$2. (A \wedge D) \rightarrow \perp$$

$$3. (A \wedge B) \rightarrow C$$

$$4. (A \wedge C) \rightarrow E$$

$$5. T \rightarrow A$$

$$6. A \rightarrow B$$

$$7. (B \wedge E) \rightarrow A$$

$$8. (D \wedge F) \rightarrow \perp$$

Resposta:

4.2. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento em lógica proposicional (já apresentado no problema 2.5)

P1	$C \rightarrow (A \vee B)$
P2	$A \rightarrow (B \wedge C)$
X	$\neg B \rightarrow \neg C$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal.

b) Mostre que as cláusulas obtidas em a) são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

4.3. (2 valores) Converta as fórmulas abaixo para a forma Prenex, com a matriz na forma normal CNF.

a) $\exists x (Cube(x) \wedge \exists y FrontOf(y, x)) \rightarrow \exists z Between(z, a, b)$

b) $\forall x (Small(x) \rightarrow \exists y (Cube(y) \wedge Between(y, a, x)))$

4.4. (1 valor) Coloque na forma clausal, incluindo a Skolemização, a seguinte fórmula:

$$\forall x \exists y \forall z (Large(x) \rightarrow (Adjoins(x, y) \wedge SameRow(z, x)))$$

4.5. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento de lógica de predicados de 1ª ordem (idêntico ao apresentado no problema 3.5)

P1.	$\forall x \text{ (Cube}(x) \rightarrow \exists y \text{ FrontOf}(y, x) \text{)}$
P2.	$\neg \exists x \exists y \text{ (Medium}(x) \wedge \text{FrontOf}(y, x) \text{)}$
C.	$\neg \forall x \text{ (Cube}(x) \wedge \text{Medium}(x) \text{)}$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal.

b) Mostre que as cláusulas obtidas são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

4.6. (5 valores) Tendo em atenção que $1! \cdot 1 = 1 = 2! - 1$, $1! \cdot 1 + 2! \cdot 2 = 1 + 4 = 5 = 3! - 1$, $1! \cdot 1 + 2! \cdot 2 + 3! \cdot 3 = 1 + 4 + 18 = 23 = 4! - 1$, ..., prove que $S(n) = \sum_{i=1}^n i! \cdot i = (n + 1)! - 1$, para qualquer $n \geq 1$.

Passo Base :

Passo de Indução :