Lógica Computacional

Duração: 3h

Ano de 2018 / 19 – Exame Final

Grupos para Avaliar (Todos por Omissão)

G1	G2	G3	G4

Nome:	**n.º:**

Grupo 1

(corresponde ao 1.º teste)

1.1. (5 valores) Considere as seguintes frases:

- O Rui frequenta a FCT com o número 62346.
- A Maria também frequenta a FCT e tem um número mais baixo que o do Rui.
- A Maria mora em Lisboa, e mora mais longe que o Rui da FCT.

a) Apresente uma assinatura $\Sigma = <NP, NF_0 \cup NF_{>0}>$ de uma linguagem de 1.ª ordem que lhe permita escrever fórmulas de 1ª ordem correspondentes

NF_0: Constantes	*$NF_{>0}$: Funções*	*NP: Predicados*
`maria, rui, fct, lisboa, 62346`	`numeroFCT/1 casaDe/1, distancia/2,`	`Frequenta/2, =/2, >/2, </2 MoraEm/2`

b) Traduza para fórmulas de 1ª ordem as frases acima indicadas:

i) O Rui frequenta a FCT com o número 62346.

`Frequenta(rui, fct) ∧ numeroFCT(rui) = 62346`

ii) A Maria também frequenta a FCT e tem um número mais baixo que o do Rui.

`Frequenta(maria, fct) ∧ numeroFCT(maria) < numeroFCT(rui)`

iii) A Maria mora em Lisboa, e mora mais longe que o Rui da FCT.

`MoraEm(maria,lisboa) ∧ distancia(casaDe(maria),fct) > distancia(casaDe(rui),FCT)`

1.2. (2 valores) Considerando os mundos e a linguagem de Tarski, classifique cada uma das fórmulas abaixo, indicando no quadro (com S e N, respectivamente) se são ou não

V-TT: Verdade Tautológica; V-FO: Verdade Lógica; V-TW: Verdade Analítica (Tarski);
P-TT: Possibilidade Tautológica; P-FO: Possibilidade Lógica; P-TW: Possibilidade Analítica (Tarski).

	V-TT	V-FO	V-TW	P-TT	P-FO	P-TW
`(Tet(a) ∧ ¬ Tet(b)) → a ≠ b`	N	S	S	S	S	S
`Cube(a) ∨ Tet(a) ∨ Dodec(a)`	N	N	S	S	S	S
`Small(a) ∧ (Small(a) → ¬ Small(a))`	N	N	N	N	N	N

1.3. (3 valores) Considerando os mundos e a linguagem de Tarski, indique (com S/N) se os seguintes argumentos são válidos tautologica (Val-TT), logica (Val-FO) e/ou analiticamente (nos mundos de Tarski: Val-TW).

{Premissa 1, ... , Premissa n } ⊨ Conclusão	Val-TT	Val-FO	Val-TW
`{ Cube(a), a ≠ b }  ⊨ ¬ Cube(b)`	N	N	N
`{ Tet(a), ¬Tet(a) }  ⊨ Dodec(b)`	S	S	S
`{ Large(a) ∨ Medium(a) }  ⊨ ¬ Small(a)`	N	N	S

1.4. (5 valores) Considere as fórmulas $\mathbf{P1}: B \rightarrow A$, $\mathbf{P2}: (A \wedge C) \rightarrow B$, e $\mathbf{Z}: C \rightarrow (A \leftrightarrow B)$.

a) Preencha a seguinte tabela de verdade relativa às fórmulas **P1**, **P2** e **Z**.

A	B	C	B → A	(A ∧ C) → B		C → (A ↔ B)	
V	V	V	**V**	V	**V**	**V**	V
V	V	F	**V**	F	**V**	**V**	V
V	F	V	~~**V**~~	~~V~~	~~**F**~~	~~**F**~~	F
V	F	F	**V**	F	**V**	**V**	F
F	V	V	**F**	F	~~**V**~~	~~**F**~~	F
F	V	F	**F**	F	**V**	**V**	F
F	F	V	**V**	F	**V**	**V**	V
F	F	F	**V**	F	**V**	**V**	V

b) Por análise da tabela, indique justificando se a fórmula **Z** é ou não consequência tautológica de cada uma das fórmulas **P1** ou **P2** (consideradas isoladamente). E de ambas as fórmulas **P1** e **P2**?

Justificação:

A fórmula **Z não é** consequência tautológica da premissa **P1** pois **C** é falsa na interpretação, $(A, \neg B, C)$, que satisfaz **P1**. **Z** também não é consequência tautológica de **P2** por ser falsa na interpretação $(\neg A, B, C)$, que satisfaz **P2.**

No entanto, a fórmula **Z é** consequência tautológica das premissas **P1** e **P2** pois nas interpretações acima referidas uma das premissas **P1** ou **P2** é falsa, pelo que não existem interpretações que tornem ambas as premissas verdadeiras e a conclusão falsa.

1.5. (5 valores) Considere a fórmula $\neg(A \rightarrow \neg C) \vee ((A \wedge B) \leftrightarrow C)$. Converta-a para as formas normais conjuntiva (CNF) e disjuntiva (DNF), simplificando-as da forma mais conveniente.

$\neg(A \rightarrow \neg C) \wedge ((A \wedge B) \leftrightarrow C)$

$\Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg C) \wedge ((A \wedge B) \leftrightarrow C)$	Equivalência de $\rightarrow$
$\Leftrightarrow (\neg\neg A \wedge \neg\neg C) \wedge ((A \wedge B) \leftrightarrow C)$	De Morgan
$\Leftrightarrow (A \wedge C) \wedge ((A \wedge B) \leftrightarrow C)$	Dupla Negação
$\Leftrightarrow (A \wedge C) \wedge ((A \wedge B \wedge C) \vee (\neg(A \wedge B) \wedge \neg C))$	Equivalência de $\leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ((A \wedge C) \wedge (A \wedge B \wedge C)) \vee ((A \wedge C) \wedge (\neg(A \wedge B) \wedge \neg C))$	Distribuição
$\Leftrightarrow (A \wedge B \wedge C) \vee ((A \wedge C) \wedge (\neg(A \wedge B) \wedge \neg C))$	Idempotência (e comutação)
$\Leftrightarrow (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge (C \wedge \neg C) \wedge \neg(A \wedge B))$	Comutação e Associação
$\Leftrightarrow (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge 0 \wedge \neg(A \wedge B))$	Contradição
$\Leftrightarrow (A \wedge B \wedge C) \vee 0$	Elemento Absorvente
$\Leftrightarrow (A \wedge B \wedge C)$	Elemento Neutro

Esta fórmula está simultaneamente em DNF e em CNF e não pode ser mais simplificada.

Grupo 2

(corresponde ao 2.º teste)

2.1. (4 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições:

a) Os blocos a, b e c estão todos em linhas diferentes.

`¬ SameRow(a,b) ∧ ¬ SameRow(a,c) ∧ ¬ SameRow(b,c)`

b) Os blocos a e b são o mesmo cubo.

`Cube(a) ∧ a = b`

c) O bloco a só é um cubo se um dos blocos b ou c o forem.

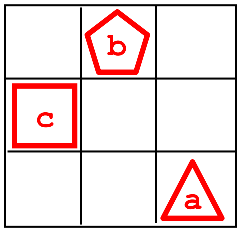
`Cube(a) → (Cube(b) ∨ Cube(c))`

d) O cubo c está entre os blocos a e b, a menos que estes estejam na mesma coluna.

`Cube(c) ∧ (¬ SameCol(a,b) → Between(c,a,b))`

2.2. (4 valores) Considerando os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiros de 3 × 3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições:

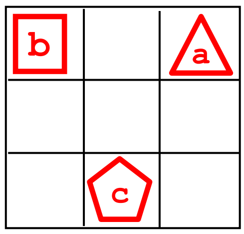
```
1. ¬(¬Dodec(b) ∨ SameCol(b,c))
2. Tet(a) ∧ RightOf(a,c)
3. Cube(c) ∧ FrontOf(a,c) ∧ BackOf(b,c)
4. ¬Between(c,a,b) ∧ ¬LeftOf(a,b)
5. SameCol(a,b) → FrontOf(b,c)
```



2.3. (3 valores) Considere o seguinte argumento na linguagem de Tarski, e a respectiva demonstração.

a) Verifique que a demonstração está *errada*, e indique o(s) passo(s) em que as regras do sistema de Dedução Natural não foram corretamente utilizadas.

```
1. | Tet(a) ∨ ¬Cube(b)
2. | ¬Tet(a) → Cube(b)
   |----------------------------
3. | | Cube(b)
   | |-----------
4. | | | Dodec(c)
   | | |-----------
5. | | | | Tet(a)
   | | | |-----------
6. | | | | ¬Cube(b)          Elim →: 2 , 5
7. | | | ¬Cube(b)            Elim ∨: 1 , 5 - 6
8. | | | ⊥                   Intr ⊥ : 3 , 7
9. | | ¬Dodec(c)             Intr ¬ : 4 - 8
10.| Cube(b) → ¬Dodec(c)     Intr →: 3 - 9
```



Erro(s):

No passo **6** não se poderia ter inferido que b não é um cubo, por eliminação da implicação, pois da negação do implicante não se infere a negação do implicado.

No passo **7,** a eliminação da disjunção 1 está incompleta, pois falta o caso em que a partir de **¬Cube(b)** se concluiria **¬Cube(b)**, por reiteração. Mas esta falta poderia ser eliminada com a inclusão deste caso.

b) Indique no tabuleiro ao lado um contra-exemplo que mostre que o argumento não é válido.

2.4. (4 val) Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas

1	$A \leftrightarrow (B \vee C)$	
2	$B \rightarrow \neg D$	
3.	D	
4.	B	
5.	$\neg D$	Elim $\rightarrow$: 2, 4
6.	$\perp$	Intr $\perp$: 3 , 5
7.	$\neg B$	Intr $\neg$: 4 - 6
8.	A	
9.	$B \vee C$	Elim $\leftrightarrow$: 1, 8
10.	B	
11.	$\perp$	Intr $\perp$: 7, 10
12.	C	Elim $\perp$: 11
13.	C	
14.	C	Reit : 13
15.	C	Elim $\vee$: 9, 10 - 12, 13-14
16.	C	
17.	$B \vee C$	Intr $\vee$: 16
18.	A	Elim $\leftrightarrow$: 1, 17
19.	$A \leftrightarrow C$	Intr $\leftrightarrow$: 8 - 15, 16 - 18
20.	$D \rightarrow (A \leftrightarrow C)$	Intr $\rightarrow$: 3 - 19

2.5. (5 valores) Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural

1.	$C \rightarrow (A \vee B)$	
2.	$A \rightarrow (B \wedge C)$	
3.	$\neg B$	
4.	C	
5.	$A \vee B$	Elim $\rightarrow$: 1 , 4
6.	A	
7.	$B \wedge C$	Elim $\rightarrow$: 2 , 6
8.	B	Elim $\wedge$: 7
9.	$\perp$	Intr $\perp$: 3 , 8
10.	B	
11.	$\perp$	Intr $\perp$: 3 , 10
12.	$\perp$	Elim $\vee$: 5, 6 - 9, 10 - 11
13.	$\neg C$	Intr $\neg$: 4 - 12
14.	$\neg B \rightarrow \neg C$	Intr $\rightarrow$: 3 - 13

Grupo 3

(corresponde ao 3.º teste)

3.1. (5 valores) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições:

a) Um bloco está entre dois outros, e tem a forma igual de um deles.

∃x ∃y ∃z (Between(x,y,z) ∧ (SameShape(x,y) ∨ SameShape(x,z)))

b) Todos os dodecaedros são maiores que um dos cubos.

∃x (Cube(x) ∧ ∀y (Dodec(y) → Larger(y,x)))

c) Nenhum par de tetraedros tem um objeto entre eles.

∀x ∀x ((Tet(x) ∧ Tet(y)) → ¬ ∃z Between(z,x,y))

d) Os blocos à esquerda de cubos são menores que eles a menos que estejam na mesma linha.

∀x ∀y ((Cube(y) ∧ LeftOf(x,y) ∧ ¬ SameRow(x,y))→ Smaller(x,y))

e) Os cubos são os únicos blocos que têm outros blocos à sua frente.

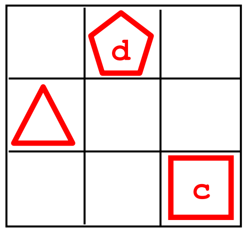
∀x (∃y FrontOf(y,x) → Cube(x))

f) Os blocos não têm todos a mesma forma nem o mesmo tamanho.

∃x ∃y ¬ SameShape(x,y) ∧ ∃x ∃y ¬ SameSize(x,y)

3.2. (4 valores) Considerando os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiros de 3 × 3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições:

1. ∃x (Cube(x) ∧ ¬ ∃y (x ≠ y ∧ ¬LeftOf(y,x)))
2. Cube(c) ∧ ∀x ∀y (Dodec(x)) → ¬SameCol(x,y))
3. ∃x (Tet(x) ∧ ∀y (x ≠ y → (FrontOf(y,x) ∨ BackOf(y,x))))
4. Dodec(d) ∧ ∀x ∀y (x ≠ y → ¬SameShape(x,y))
5. ∀x ∀y ((Cube(x) ∧ Dodec(y)) → FrontOf(x,y))
6. ∀x (∀y (x ≠ y → RigthOf(y,x))) → Tet(x))



3.3. (2 valores) O seguinte argumento é válido analiticamente nos Mundos de Tarski.

1	¬ ∃x (Cube(x) ∧ ¬ Small(x))
2	∀x (Large(x) ↔ Dodec(x))
3	∀x (Medium(x) → Tet(x))

Assinale em baixo, quais os axiomas de Tarski que seria necessário colocar explicitamente como premissas para que o argumento fosse válido logicamente (válido-FO).

- ☐ ∀x (Large(x) ∨ Medium(x) ∨ Small(x))
- ☒ ¬ ∃x (Large(x) ∧ Medium(x))
- ☐ ¬ ∃x (Large(x) ∧ Small (x))
- ☒ ¬ ∃x (Medium(x) ∧ Small(x))
- ☒ ∀x (Tet(x) ∨ Cube(x) ∨ Dodec(x))
- ☐ ¬ ∃x (Tet(x) ∧ Cube(x))
- ☐ ¬ ∃x (Tet(x) ∧ Dodec(x))
- ☐ ¬ ∃x (Cube(x) ∧ Dodec(x))

3.4. (4 valores) Complete a demonstração abaixo no sistema de Dedução Natural, preenchendo as caixas assinaladas.

1.	∀x (Tet(x) ↔ Large(x))	
2.	∃x (Large(x) ∧ ¬ ∃y ¬ SameCol(x,y))	
3.	a : Large(a) ∧ ¬ ∃y ¬ SameCol(a,y)	
4.	Large(a)	Elim ∧ : 3
5.	Tet(a) ↔ Large(a)	Elim ∀ : 1
6.	Tet(a)	Elim ↔: 4, 5
7.	b:	
8.	¬ SameCol(a,b)	
9.	∃y ¬ SameCol(a,y)	Intr ∃: 8
10.	¬ ∃y ¬ SameCol(a,y)	Elim ∧ : 3
11.	⊥	Intr ⊥: 9, 10
12.	¬ ¬ SameCol(a,b)	Intr ¬: 8 - 11
13.	SameCol(a,b)	Elim ¬: 12
14.	∀y SameCol(a,y)	Intr ∀ : 7 - 13
15.	Tet(a) ∧ ∀y SameCol(a,y)	Intr ∧: 6, 14
16.	∃x (Tet(x) ∧ ∀y SameCol(x,y))	Intr ∃: 15
17.	∃x (Tet(x) ∧ ∀y SameCol(x,y))	Elim ∃: 2, 3 - 16

3.5. (5 valores) Valide o argumento abaixo apresentando a respectiva demonstração no sistema de Dedução Natural.

1.	∀x (Cube(x) → ∃y FrontOf(y,x))	
2.	¬ ∃x ∃y (Medium(x) ∧ FrontOf(y,x))	
3.	∀x (Cube(x) ∧ Medium(x))	
4.	Cube(a) ∧ Medium(a)	Elim ∀ : 3
5.	Cube(a)	Elim ∧ : 4
6.	Cube(a) → ∃y FrontOf(y,a)	Elim ∀ : 1
7.	∃y FrontOf(y,a)	Elim →: 5, 6
8.	Medium(a)	Elim ∧ : 4
9.	Medium(a) ∧ FrontOf(b,a)	Intr ∧ : 7, 8
10.	∃x ∃y (Medium(x) ∧ FrontOf(y,x))	Intr ∃ : 9
11.	⊥	Intr ⊥ : 2, 10
12.	¬∀x (Cube(x) ∧ Medium(x))	Intr ¬: 3 - 11

Grupo 4

(corresponde ao 4.º teste)

4.1. (2 valores) Verifique se o conjunto S de cláusulas Horn abaixo indicado é satisfazível. Existe mais do que uma interpretação que satisfaça S ? Justifique.

1. $(B \land C) \to E$	5. $T \to A$
2. $(A \land D) \to \bot$	6. $A \to B$
3. $(A \land B) \to C$	7. $(B \land E) \to A$
4. $(A \land C) \to E$	8. $(D \land F) \to \bot$

Resposta: Pela cláusula **5**, `A = True` e, pela cláusula **6**, `B = True`. Pela cláusula **3**, deverá ser `C = True`. Logo por uma das cláusulas **1** ou **4** será `E = True`, e a cláusula **7** apenas confirma que `A = True`. Nenhuma das cláusulas impõe `D = True`, logo não é imposto que `⊥ = True` (nem pela cláusula **2** nem pela **8**). O sistema é pois satisfazível, quer pela interpretação `{A,B,C,¬D,E,F}` quer ainda pela interpretação `{A,B,C,¬D,E,¬F}`.

4.2. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento em lógica proposicional (já apresentado no problema 2.5)

P1	$C \to (A \lor B)$
P2	$A \to (B \land C)$
X	$\neg B \to \neg C$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal.

1.	$A \lor B \lor \neg C$	(P1)
2.	$\neg A \lor B$	(P2)
3.	$\neg A \lor C$	(P2)
4.	$\neg B$	(¬X)
5.	C	(¬X)

b) Mostre que as cláusulas obtidas em a) são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

6.	$A \lor B$	Res 5 , 1
7.	A	Res 6 , 4
8.	B	Res 7 , 2
9.	$\square$	Res 8 , 4

4.3. (2 valores) Converta as fórmulas abaixo para a forma Prenex, com a matriz na forma normal CNF.

a) `∃x (Cube(x) ∧ ∃y FrontOf(y,x)) → ∃z Between(z,a,b)`

`∀x ∀y ∃z (¬Cube(x) ∨ ¬FrontOf(y,x) ∨ Between(z,a,b))`

b) `∀x (Small(x) → ∃y (Cube(y) ∧ Between(y,a,x)))`

`∀x ∃y ((¬Small(x) ∨ Cube(y)) ∧ (¬Small(x) ∨ Between(y,a,x)))`

4.4. (1 valor) Coloque na forma clausal, incluindo a Skolemização, a seguinte fórmula:

`∀x ∃y ∀z (Large(x) → (Adjoins(x,y) ∧ SameRow(z,x)))`

1. `¬Large(x1) ∨ Adjoins(x1, f(x1))`
2. `¬Large(x2) ∨ SameRow (z2, x2)`

4.5. (5 valores) Mostre por resolução a validade do seguinte argumento de lógica de predicados de 1ª ordem (idêntico ao apresentado no problema 3.5)

P1.	∀x (Cube(x) → ∃y FrontOf(y,x))
P2.	¬ ∃x ∃y (Medium(x) ∧ FrontOf(y,x))
C.	¬ ∀x (Cube(x) ∧ Medium(x))

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal.

1.	¬ Cube(x1) ∨ FrontOf(f(x1),x1))	de P1
2.	¬ Medium(x2) ∨ ¬ FrontOf(y2,x2)	de P1
3.	Cube(x3)	de ¬C
4.	Medium(x4)	de ¬C

b) Mostre que as cláusulas obtidas são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

5.	¬ FrontOf(y2,x4)	Res 4, 2 {x2 / x4}
6.	¬ Cube(x4)	Res 5, 1 {y2 / f(x4), x1 / x4}
7.	□	Res 6, 3 {x3 / x4}

4.6. (5 valores) Tendo em atenção que 1!*1 = 1 = 2!-1, 1!*1 + 2!*2 = 1+4 = 5 = 3!-1, 1!*1 + 2!*2 + 3!*3 = 1+4+18 = 23 = 4!-1, ..., prove que $S(n) = \sum_{i=1}^{n} i!\,i = (n+1)! - 1$, para qualquer n ≥ 1.

Passo Base : S(1) = (1+1)! · 1

Para **n = 1** temos

S(1) = 1! · 1 = 1 = 2!-1.

Passo de Indução :

S(n) = $\sum_{i=1}^{n} i!\,i = (n+1)! - 1$ ⇒ S(n+1) = $\sum_{i=1}^{n+1} i!\,i = (n+1+1)! - 1$

De facto temos

S(n+1)	= $\sum_{i=1}^{n+1} i!\,i$	
	= $\sum_{i=1}^{n} i!\,i$ + (n+1)!·(n+1)	Propriedade Associativa da soma
	= (n+1)!-1 + (n+1)!·(n+1)	Hipótese de Indução
	= (n+1)! + (n+1)!·(n+1) - 1	Propriedade Comutativa
	= (n+1)! · (1+ n+1) - 1	Propriedade Distributiva
	= (n+2)·(n+1)! - 1	Soma e Comutatividade
	= (n+2)! - 1	Definição de fatorial

q.e.d