

Lógica Computacional

Duração: 1h

Época de 2018 / 19 – 3.º Teste de Avaliação (sem Consulta)

Nome:

n.º:

1. (3 val) Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições

a) Alguns blocos, que não são tetraedros, estão à frente de todos os cubos.

$$\exists x (\neg \text{Tet}(x) \wedge \forall y (\text{Cube}(y) \rightarrow \text{FrontOf}(x, y)))$$

b) Um cubo que não esteja ao lado de um bloco não pode ser grande.

$$\forall x ((\text{Cube}(x) \wedge \neg \exists y \text{ Adjoins}(x, y)) \rightarrow \neg \text{Large}(x))$$

c) Não há cubos na mesma coluna.

$$\forall x \forall y (\text{Cube}(x) \wedge \text{Cube}(y) \wedge x \neq y \rightarrow \neg \text{SameCol}(x, y))$$

d) Apenas cubos estão atrás dos dodecaedros grandes.

$$\forall x \forall y ((\text{Dodec}(y) \wedge \text{Large}(y) \wedge \text{BackOf}(x, y)) \rightarrow \text{Cube}(x))$$

e) Um dodecaedro que esteja à frente do bloco **a** não está à frente de nenhum cubo.

$$\forall x ((\text{Dodec}(x) \wedge \text{FrontOf}(x, a)) \rightarrow \neg \exists y (\text{Cube}(y) \wedge \text{FrontOf}(x, y)))$$

f) Um tetraedro está à frente de alguns cubos, mas não dos que estão à frente do bloco **a**.

$$\exists x (\text{Tet}(x) \wedge \exists y (\text{Cube}(y) \wedge \text{FrontOf}(x, y) \wedge \neg \text{FrontOf}(y, a)))$$

2. (3 val) Considerando os mundos e a linguagem do Mundo de Tarski (com tabuleiro de 3 × 3 casas), desenhe um mundo (em 2D) em que sejam verdadeiras as seguintes proposições:

1. $\text{Tet}(a) \wedge \exists x \exists y (\text{FrontOf}(x, a) \wedge \text{FrontOf}(a, y))$

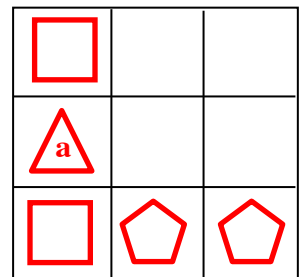
2. $\exists x \exists y (\text{Dodec}(x) \wedge \text{Dodec}(y) \wedge x \neq y \wedge \text{SameRow}(x, y))$

3. $\forall x (\text{Dodec}(x) \rightarrow \forall y (\neg \text{Dodec}(y) \rightarrow \text{LeftOf}(y, x)))$

4. $\forall x \neg (\exists y \text{Dodec}(y) \wedge \text{FrontOf}(x, y))$

5. $\exists x (\text{Dodec}(x) \wedge \exists y \exists z \text{Between}(x, y, z))$

6. $\exists x \exists y (\text{Cube}(x) \wedge \text{Cube}(y) \wedge \exists z \text{Between}(z, x, y))$



3. (4 val) Preencha as caixas assinaladas para completar a demonstração no sistema de Dedução Natural

1	$\forall x (Cube(x) \rightarrow \forall y (Tet(y) \rightarrow BackOf(x,y)))$	
2	$\forall x (Tet(x) \rightarrow \neg \exists y (Cube(y) \wedge BackOf(y,x)))$	
3	$\exists x Tet(x)$	
4	$a: Tet(a)$	
5	$b:$	
6	$Cube(b)$	
7	$Cube(b) \rightarrow \forall y (Tet(y) \rightarrow BackOf(b,y))$	Elim $\forall$: 1
8	$\forall y (Tet(y) \rightarrow BackOf(b,y))$	Elim $\rightarrow$: 6 , 7
9	$Tet(a) \rightarrow BackOf(b,a)$	Elim $\forall$: 8
10	$BackOf(b,a)$	Elim $\rightarrow$: 4 , 9
11	$Tet(a) \rightarrow \neg \exists y (Cube(y) \wedge BackOf(y,a))$	Elim $\forall$: 2
12	$\neg \exists y (Cube(y) \wedge BackOf(y,a))$	Elim $\rightarrow$: 4, 11
13	$Cube(b) \wedge BackOf(b,a)$	Intr $\wedge$: 6, 10
14	$\exists y (Cube(y) \wedge BackOf(y,a))$	Intr $\exists$: 13
15	$\perp$	Intr $\perp$: 12, 14
16	$\neg Cube(b)$	Intr $\neg$: 6 - 15
17	$\forall y \neg Cube(y)$	Intr $\forall$: 5 - 16
18	$\forall y \neg Cube(y)$	Elim $\exists$: 3, 4 - 17
19	$\exists x Tet(x) \rightarrow \forall y \neg Cube(y)$	Intr $\rightarrow$: 3 - 18

4. (3 val) Considere o seguinte argumento usando a linguagem de Tarski, e a respetiva demonstração.

1.	$\forall x \forall y ((Cube(x) \wedge Tet(y)) \rightarrow \neg SameRow(x,y))$	
2.	$\neg \exists x \exists y \neg SameRow(x,y)$	
3.	$Cube(a) \wedge Tet(b)$	
4.	$(Cube(a) \wedge Tet(b)) \rightarrow \neg SameRow(a,b)$	Elim $\forall$: 1
5.	$\neg SameRow(b,a)$	Elim $\rightarrow$: 3 , 4
6.	$\exists x \exists y \neg SameRow(x,y)$	Intr $\exists$: 5
7.	$\perp$	Intr $\perp$: 2 , 6
8.	$\neg Tet(b)$	Intr $\neg$: 4 - 7
9.	$\exists x \neg Tet(x)$	Intr $\exists$: 8

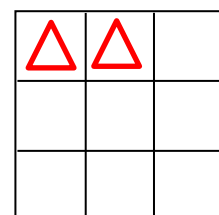
a) Indique todos os erros da demonstração acima, justificando.

Erros:

Erro 1. Na linha 5, a eliminação da implicação deveria conduzir a $\neg SameRow(a,b)$ e não a $\neg SameRow(b,a)$. No entanto este erro não influencia a validade da demonstração, pois a fórmula da linha 6 poderia ser obtida por introdução dos quantificadores existenciais em qualquer das fórmulas.

Erro 2. O erro principal ocorre na linha 8, já que a introdução da negação conduziria à negação $\neg (Cube(a) \wedge Tet(b))$ e não à negação $\neg Tet(b)$ (de facto apenas se poderia inferir $\neg Cube(a) \vee \neg Tet(b)$).

b) Apresente no quadro em baixo um contraexemplo que mostre que o argumento não é válido.



5. (2 val) O seguinte argumento é válido analiticamente nos Mundos de Tarski.

1	$\exists x (Cube(x) \wedge \neg Medium(x))$
2	$\forall x (Large(x) \rightarrow Tet(x))$
3	$\exists x (Small(x) \wedge \neg Dodec(x))$

Assinale em baixo, quais os axiomas de Tarski que seria necessário utilizar explicitamente como premissas para que o argumento fosse válido logicamente (válido-FO).

Nota: 2 respostas erradas cancelam uma resposta certa, mas a classificação da questão nunca será negativa.

- ☒ $\forall x (Large(x) \vee Medium(x) \vee Small(x))$
- ☐ $\neg \exists x (Large(x) \wedge Medium(x))$
- ☐ $\neg \exists x (Large(x) \wedge Small(x))$
- ☐ $\neg \exists x (Medium(x) \wedge Small(x))$
- ☐ $\forall x (Tet(x) \vee Cube(x) \vee Dodec(x))$
- ☒ $\neg \exists x (Tet(x) \wedge Cube(x))$
- ☐ $\neg \exists x (Tet(x) \wedge Dodec(x))$
- ☒ $\neg \exists x (Cube(x) \wedge Dodec(x))$

6. (5 val) Valide o seguinte argumento apresentando a respetiva demonstração.

1	$\exists x \forall y SameCol(x,y)$	
2	$\forall x (Tet(x) \rightarrow \neg \exists y SameCol(y,x))$	
3	a:	
4	Tet(a)	
5	$Tet(a) \rightarrow \neg \exists y SameCol(y,a)$	Elim $\forall$: 2
6	$\neg \exists y SameCol(y,a)$	Elim $\rightarrow$: 4, 5
7	b: $\forall y SameCol(b,x)$	
8	$SameCol(b,a)$	Elim $\forall$: 7
9	$\exists y SameCol(y,a)$	Intr $\exists$: 8
10	$\perp$	Intr $\perp$: 6, 9
11	$\perp$	Elim $\exists$: 1, 7 - 10
12	$\neg Tet(a)$	Intr $\neg$: 4 - 11
13	$\forall x \neg Tet(x)$	Intr $\forall$: 3 - 12