Lógica Computacional

Duração: 1h

Época de 2018/ 19 – 4.º Teste de Avaliação (sem Consulta)

Nome:	**n.º:**

1. **(2.5 vals)** Considere o conjunto *S* de cláusulas Horn abaixo.

1. $(A \wedge B) \rightarrow \bot$	7. $(A \wedge E) \rightarrow F$
2. $\top \rightarrow E$	8. $(G \wedge F) \rightarrow D$
3. $(C \wedge H) \rightarrow B$	9. $(D \wedge E) \rightarrow \bot$
4. $(A \wedge I) \rightarrow D$	10. $(A \wedge H) \rightarrow C$
5. $\top \rightarrow A$	11. $\top \rightarrow H$
6. $(A \wedge E) \rightarrow G$	

a) Mostre que o sistema é insatisfazível, indicando com = **T** os átomos que deveriam ser verdadeiros em qualquer interpretação que satisfaça as cláusulas de S (incluindo naturalmente o átomo $\bot$) .

A = T (5)	B = T (3)	C = T (10)	D = T (8)	E = T (2)
F = T (7)	G = T (6)	H = T (11)	I =	$\bot$ = T (1,9)

b) Mostre que retirando apenas uma das cláusulas acima o conjunto se tornaria satisfazível. Justifique.

Pela alínea anterior, se retirarmos a cláusula 5, o sistema restante torna-se satisfazível, Já que apenas **E** e **H** teriam de ser verdadeiras. Assim sendo, o sistema S \ {5} seria satisfeito, pelo menos, pela interpretação $\{\neg A, \neg B, \neg C, \neg D, E, \neg F, \neg G, H, \neg I\}$.

2. **(3.5 vals)** Mostre por resolução a validade do seguinte argumento em lógica proposicional.

P1	$\neg((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$
P2	$(A \wedge E) \rightarrow (C \vee D)$
P3	$\neg (B \wedge E)$
Z	$(\neg C \wedge \neg D) \rightarrow \neg E$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão (Z) na forma clausal.

1. $\neg A \vee \neg B$	de P1
2. $A \vee B$	de P1
3. $\neg A \vee \neg E \vee C \vee D$	de P2
4. $\neg B \vee \neg E$	de P3
5. $\neg C$	de $\neg Z$
6. $\neg D$	de $\neg Z$
7. E	de $\neg Z$

b) Mostre que as cláusulas obtidas em a) são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

8. $\neg B$	Res 7, 4
9. A	Res 8, 2
10. $\neg E \vee C \vee D$	Res 9, 3
11. $C \vee D$	Res 10, 7
12. D	Res 11, 5
13. $\square$	Res 12, 6

3. **(2 vals)** Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições:

a) Alguns cubos têm o mesmo tamanho de outros.

`∃x (Cube(x) ∧ ∃y (Cube(y) ∧ x ≠ y ∧ SameSize(x,y)))`

b) Nenhum bloco está entre outros dois, a menos que seja um cubo.

`∀x ∀y ∀z (Between(x,y,z) → Cube(x))`

c) Existem blocos pequenos, mas todos atrás de cubos.

`∃x Small(x) ∧ ∀y (Small(y) → ∃z (Cube(z) ∧ BackOf(y,z)))`

d) Todos os pares de dodecaedros têm blocos entre si.

`∀x ∀y ((Dodec(x) ∧ Dodec(y) ∧ x ≠ y) → ∃z Between(z,x,y))`

e) Só há um bloco atrás do bloco **a** (Sugestão: Utilize o predicado de igualdade).

`∃x (BackOf(x,a) ∧ ∀y (BackOf(y,a) → y = x))`

4. **(1.5 vals)** Converta as fórmulas para a forma Prenex com a matriz na forma normal conjuntiva (CNF).

a) `∀x (¬ ∃y SameCol(y,x) → Cube(x))`

`∀x ∃y ( SameCol(y,x) ∨ Cube(x))`

b) `∃x ¬ (Dodec(x) → ¬ ∃y Larger(x,y))`

`∃x ∃y (Dodec(x) ∧ Larger(x,y))`

c) `∃x Tet(x) → ∀y Medium(y)`

`∀x ∀y (¬Tet(x) ∨ Medium(y))`

5. **(2 vals)** Coloque na forma clausal, incluindo a Skolemização, as seguintes fórmulas Prenex:

a) `∃x ∃z ∀y ((LargerOf(y,x) → Tet(x)) ∧ SameCol(x,z))`

`1. ¬Larger(y,a) ∨ Tet(a)` `2. SameCol(a,b)`

b) `∀x ∃y ∃z (Dodec(x) → (Larger(y,x) ∧ Smaller(z,x)))`

`1. ¬Dodec(x1) ∨ Larger(f(x1), x1)` `2. ¬Dodec(x2) ∨ Smaller(g(x2), x2)`

6. **(1 val)** Obtenha a substituição mais geral σ que unifique os dois termos abaixo. Indique qual o termo obtido quando se aplica essa substituição a qualquer um dos termos unificados.

`T1: Between(f(h(x,y)), y, f(x))`   `T2: Between(f(z), g(a), w)`

`substituição σ = { z/ h(x, g(a)), y/g(a) , w / f(x) }` `T1 σ = T2 σ = Between(f(h(x,g(a))), g(a), f(x))`

7. **(5 vals)** Mostre por resolução a validade do seguinte argumento de lógica de predicados de 1ª ordem.

P1	∃x (Tet(x) ∧ ∀y (Cube(y) → BackOf(x,y)))
P2	¬ ∃x ∃y (Larger(x,y) ∧ Tet(y))
P3	∀x ∀y (BackOf(x,y) → (¬Tet(x) ∨ Larger(x,y)))
C	∃x ¬ (Cube(x) ∧ Medium(x))

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal

1.Tet(a)	de P1
2.¬Cube(x2) ∨ BackOf(a,x2)	de P1
3.¬Larger(x3,y3) ∨ ¬Tet(y3)	de P2
4.¬BackOf(x4,y4)∨ ¬Tet(x4) ∨ Larger(x4,y4))	de P3
5.Cube(x5)	de ¬C
6.Medium(x6)	de ¬C

b) Mostre que as cláusulas obtidas são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

7.	BackOf(a,x5)	Res 5,2	{x2/x5}
8.	¬ Tet(a) ∨ Larger(a,x5)	Res 7,4	{x4/a, y4/x5}
9.	Larger(a,x5)	Res 8,1	{}
10.	¬ Tet(x5)	Res 9,3	{x3/a, y3/x5}
11.	□	Res 10,1	{x5/a}

8. **(2.5 vals)** Notando que os números $2^0 = 2^1$-1, $2^0 + 2^1 = 2^2$-1, $2^0 + 2^1 + 2^2 = 2^3$-1, prove por indução sobre os números naturais, que $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$, para qualquer $n \geq 0$.

Passo Base:

Para n = 0 confirmamos que $2^0 = 1 = 2^{0+1}-1$

Passo de Indução: $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^{n+1} 2^i = 2^{n+2} - 1,$

$\sum_{i=0}^{n+1} 2^i$	$= 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n + 2^{n+1}$	Definição de Somatório
	$=(2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n) + 2^{n+1}$	Propriedade Associativa
	$= \sum_{i=0}^{n} 2^i + 2^{n+1}$	Definição de Somatório
	$= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1}$	Hipótese de Indução
	$= 2 \cdot 2^{n+1} - 1$	Propriedade Distributiva
	$= 2^{n+2} - 1$	Definição de Potência

q.e.d.