Lógica Computacional

Duração: 1h

Época de 2019/ 20 – 4.º Teste de Avaliação (sem Consulta)

Nome:	**n.º:**

1. **(2.5 vals)** Considere o conjunto *S* de cláusulas Horn abaixo.

1. $(D \wedge H) \rightarrow \bot$	6. $(A \wedge G) \rightarrow E$
2. $(F \wedge H) \rightarrow \bot$	7. $\top \rightarrow G$
3. $(B \wedge G) \rightarrow C$	8. $(C \wedge G) \rightarrow A$
4. $(A \wedge B) \rightarrow G$	9. $(D \wedge E) \rightarrow \bot$
5. $\top \rightarrow B$	10. $(B \wedge E) \rightarrow A$

a) Indique uma interpretação dos átomos (A a H) que satisfaz as cláusulas de S.

A = T (8)	B = T (5)	C = T (3)	D = F
E = T (6)	F = F	G = T (7)	H = F

b) A interpretação que indicou é a única que satisfaz as cláusulas? Adicione uma cláusula com cabeça diferente de $\bot$, que torne o conjunto insatisfazível. Justifique.

A interpretação NÃO é única. Quer se o átomo **H** for falso, quer se ambos os átomos **D** e **F** o forem, nenhuma das cláusulas 1, 2 e 9 implica a contradição ($\bot$), tornando o sistema insatisfazível.

Acrescentando uma cláusula **X** $\rightarrow$ **D**, em que **X** pode ser qualquer dos átomos (**A, B, C, E** ou **G**), a claúsula 9 passaria a introduzir a contradição ($\bot$) e tornaria o sistema insatisfazível.

2. **(3.5 vals)** Mostre por resolução a validade do seguinte argumento em lógica proposicional.

P1	$B \leftrightarrow (A \wedge C)$
P2	$A \leftrightarrow \neg C$
Z	$\neg ((A \vee C) \rightarrow B)$

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão (Z) na forma clausal.

1. $A \vee \neg B$	de P1
2. $\neg B \vee C$	de P1
3. $\neg A \vee B \vee \neg C$	de P1
4. $\neg A \vee \neg C$	de P2
5. $A \vee C$	de P2
6. $\neg A \vee B$	de $\neg$Z
7. $B \vee \neg C$	de $\neg$Z

b) Mostre que as cláusulas obtidas em a) são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

8. $A \vee B$	Res 7, 5
9. A	Res 8, 1
10. B	Res 9, 6
11. C	Res 10, 2
12. $\neg$A	Res 11, 4
13. $\square$	Res 12, 9

3. **(2 vals)** Considerando os predicados da linguagem do Mundo de Tarski, traduza para essa linguagem as seguintes proposições:

a) Todos os cubos que não são grandes têm um dodecaedro ao seu lado.

$\forall x\ ((\mathrm{Cube}(x) \land \neg\ \mathrm{Large}(x)) \to \exists y(\ \mathrm{Dodec}(y) \land \mathrm{Adjoins}(x,y)))$

b) Alguns tetraedros não têm blocos à sua frente.

$\exists x\ (\mathrm{Tet}(x) \land \neg\ \exists y\ \mathrm{FrontOf}(y,x))$

c) Todos os blocos entre dois blocos são cubos ou tetraedros.

$\forall x\ \forall y\ \forall z\ (\mathrm{Between}(x,y,z) \to (\mathrm{Cube}(x) \lor \mathrm{Tet}(x)))$

d) Só há um cubo (Sugestão: Utilize o predicado de igualdade).

$\exists x\ (\mathrm{Cube}(x) \land \forall y\ (\mathrm{Cube}(y) \to x = y))$

e) Quaisquer blocos têm a mesma forma se e apenas se estiverem na mesma coluna.

$\forall x\ \forall y\ (\mathrm{SameShape}(x,y) \leftrightarrow \mathrm{SameCol}(x,y))$

4. **(1.5 vals)** Converta as fórmulas para a forma Prenex com a matriz na forma normal conjuntiva (CNF).

a) $\forall x\ (\forall y\ (x \neq y \land \mathrm{SameCol}(y,x)) \to \mathrm{Cube}(x))$

$\forall x\ \exists y\ (x = y \lor \neg\ \mathrm{SameCol}(y,x) \lor \mathrm{Cube}\ (x))$

b) $\neg\exists x\ (\mathrm{Cube}(x) \land \neg\exists y\ (\mathrm{Dodec}(y) \land \mathrm{SameCol}(x,y)))$

$\forall x\ \exists y\ ((\neg\ \mathrm{Cube}(x) \lor \mathrm{Dodec}(y)) \land (\neg\ \mathrm{Cube}(x) \lor \mathrm{SameCol}(x,y)))$

c) $\exists x\ (\mathrm{Dodec}(x) \land \neg\ \forall y\ ((\mathrm{Cube}(y) \land \mathrm{FrontOf}(x,y)) \to \mathrm{Large}(x)))$

$\exists x\ \exists y\ (\mathrm{Dodec}(x) \land \mathrm{Cube}(y) \land \mathrm{FrontOf}(x,y) \land \neg\ \mathrm{Large}(x))$

5. **(2 vals)** Coloque na forma clausal, incluindo a Skolemização, as seguintes fórmulas Prenex:

a) $\forall x\ \exists y\ \forall z\ (\ \mathrm{Cube}(x) \to (\ \mathrm{Tet}(y) \land (\mathrm{Dodec}(z) \to \mathrm{Between}(z,x,y))))$

1. $\neg\mathrm{Cube}(x1) \lor \mathrm{Tet}(f(x1))$
2. $\neg\mathrm{Cube}(x2) \lor \neg\mathrm{Dodec}(z2) \lor \mathrm{Between}(z2,x2,f(x2))$

b) $\exists x\ \forall y\ \exists z\ (\mathrm{Dodec}(x) \land (\mathrm{Cube}(y) \to (\mathrm{FrontOf}(z,x) \lor \mathrm{BackOf}(z,y))))$

1. $\neg\mathrm{Dodec}(a)$
2. $\neg\mathrm{Cube}(y2) \lor \mathrm{FrontOf}(g(y2),a) \lor \mathrm{BackOf}(g(y2),y2)$

6. **(1 val)** Obtenha a substituição mais geral σ que unifique os dois termos abaixo. Indique qual o termo obtido quando se aplica essa substituição a qualquer um dos termos unificados.

T1: $\mathrm{Between}(f(x),\ g(z,g(x,y)),z)$ T2: $\mathrm{Between}(u,\ v,\ h(u,w))$

substituição $\sigma = \{u/f(x),\ v/g(h(f(x),w),g(x,y)),\ z/h(f(x),w)\ \}$

$T1\ \sigma = T2\ \sigma = \mathrm{Between}(\ f(x),g(h(f(x),w)\ ,\ g(x,y)),\ h(f(x),w)\ )$

7. **(5 vals)** Mostre por resolução a validade do seguinte argumento de lógica de predicados de 1ª ordem.

```
1. | ∀x (Cube(x) → ∃y BackOf(x,y))
2. | ∀x (∃y BackOf(x,y) → (Small(x) ∧ ∃z LeftOf(z,x)))
3. | ∀x (¬Cube(x) → Tet(x))
   |----------------------------------------
C  | (¬∃x ∃y LeftOf(x,y)) →∀z Tet(z)
```

```
1.¬Cube(x1) ∨ BackOf(x1,f(x1))                 de P1
2.¬BackOf(x2,y2) ∨ Small(x2)                   de P2
3.¬BackOf(x3,y3) ∨ LeftOf(g(x3,y3), x3)        de P2
4 Cube(x4) ∨ Tet(x4)                           de P3
5.¬LeftOf(x5,y5)                               de ¬C
6.¬Tet(c)                                      de ¬C
```

a) Coloque as premissas e a negação da conclusão na forma clausal

b) Mostre que as cláusulas obtidas são inconsistentes, derivando por resolução a cláusula vazia.

```
 7. Cube(c)                   Res  6,4  {x4/c}
 8. BackOf(c,f(c))            Res  7,1  {x1/c }
 9. LeftOf(g(c,f(c)), c)      Res  8,3  {x3/c, y3/f(c)}
11. □                         Res  9,5  {x5 / g(c,f(c)), y5/c }
```

8. **(2.5 vals)** Prove por indução sobre os números naturais, que $n! > 2^n$ para qualquer $n \geq 4$.

Passo Base:

Para n = 4 confirmamos que $4! = 24 > 16 = 2^4$.

Passo de Indução: $n > 4 \Rightarrow (n! > 2^n \Rightarrow (n+1)! > 2^{n+1})$

$(n+1)!$	$= (n+1) * n!$	Definição de Fatorial
	$> (n+1) * 2^n$	Hipótese de indução
	$> 2 * 2^n$	$n > 4$ implica que $n + 1 > 2$
	$= 2^{n+1}$	Definição de Potência

q.e.d.