

Nome completo: _____ N° de aluno: _____

- Nos grupos 1 a 5, assinale com uma cruz sobre V para verdadeiro ou sobre F para falso, o valor lógico de cada uma das afirmações.
- Uma resposta correcta vale 1 valor, uma resposta incorrecta desconta 0.4 valores e uma não resposta nada desconta.
- O grupo 6 deve ser respondido no enunciado.

1. Sejam A , B e C três acontecimentos:

(3.0)

☐ V ☐ F $P(\overline{A} - B) = P(\overline{B} - A)$.

R: $P(\overline{A} - B) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{B} \cap \overline{A}) = P(\overline{B} - A)$.

☐ V ☐ F Se $P(A) = 0.3$ e $P(A \cup B) = 0.5$ então $P(B \cap \overline{A}) = 0.2$.

R: $P(B \cap \overline{A}) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$ e $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow 0.5 - 0.3 = P(B) - P(A \cap B)$, pelo que $P(B \cap \overline{A}) = 0.2$.

☐ V ☐ F Se $P(A) = P(B) = P(C) = 0.2$, $P(A \cap B) = P(A \cap C) = 0$ e $P(B \cap C) = 0.1$ então $P(A \cup B \cup C) = 0.6$.

R: $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) = 0.6 - 0.1$.
pois $P(A \cap B \cap C) \leq P(A \cap B) = 0$.

2. Um programa de computador opera usando uma de duas subrotinas A e B , consoante o problema. Sabe-se que as subrotinas A e B são utilizadas 40% e 60% das vezes, respectivamente. Quando é utilizada a subrotina A o programa funciona com êxito 95% das vezes, se é utilizada a subrotina B essa percentagem desce para 80%.

(3.0)

Considere os acontecimentos: A -é utilizada a subrotina A ; B -é utilizada a subrotina B e E -o programa funciona com êxito. Temos então que: $P(A) = 0.4$; $P(B) = 0.6$; $P(E|A) = 0.95$; $P(E|B) = 0.8$.

☐ V ☐ F Tendo sido utilizada a subrotina B , a probabilidade do programa não funcionar com êxito é 0.2.

R: Queremos $P(\overline{E}|B) = 1 - P(E|B) = 0.2$.

☐ V ☐ F Numa utilização ao acaso do programa a probabilidade de o mesmo terminar com êxito é 0.48.

R: $P(E) = P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) = 0.95 \times 0.4 + 0.8 \times 0.6 = 0.86$.

☐ V ☐ F Sabendo que o programa funcionou com êxito, a probabilidade de ter sido utilizada a subrotina B é $\frac{24}{43}$.

R: $P(B|E) = \frac{P(E|B)P(B)}{P(E)} = \frac{0.48}{0.86} = \frac{24}{43}$.

3. Considere o par aleatório (X, Y) com a seguinte função de probabilidade conjunta:

$X \setminus Y$	0	1	
0	0.4		
1		0.3	0.5
		0.4	

(3.0)

A função de probabilidade conjunta será:

$X \setminus Y$	0	1	
0	0.4	0.1	0.5
1	0.2	0.3	0.5
	0.6	0.4	

☐ V ☐ F $P(|X - Y| = 1) = 0.7$.

R: $P(|X - Y| = 1) = P(X = 0; Y = 1) + P(X = 1; Y = 0) = 0.3$

☐ V ☐ F As variáveis aleatórias X e Y são independentes.

R: X e Y serão independentes se, e só se, $\forall x_i, y_j, P(X = x_i; Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$ como $P(X = 0; Y = 0) = 0.4 \neq 0.3 = 0.5 \times 0.6 = P(X = 0)P(Y = 0)$, as v.a. não serão independentes.

☐ V ☐ F $Cov(X, Y) = 0.1$.

R: $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 1 \times 1 \times 0.3 - (1 \times 0.5) \times (1 \times 0.4) = 0.1$

4. O número de pontos de acesso wireless à internet por km^2 é uma variável aleatória de Poisson de parâmetro $\lambda = 10$.

(3.0)

Seja X -o número de pontos de acesso wireless à internet por km^2 , então $X \sim P(10)$.

☐ V ☐ F A probabilidade de em $1km^2$ não haver pontos de acesso wireless é e^{-10} .

R: $P(X = 0) = \frac{e^{-10}10^0}{0!} = e^{-10}$.

☐ V ☐ F A probabilidade de em $2km^2$ haver exatamente 18 pontos de acesso wireless é 0.08439 (aproximado a 5 casas decimais).

R: Seja Y -o número de pontos de acesso wireless à internet em $2km^2$, então $Y \sim P(20)$. Queremos $P(Y = 18) = \frac{e^{-20}20^{18}}{18!} = 0.08439$.

☐ V ☐ F O número médio de pontos de acesso wireless em cada $2km^2$ é 10.

R: $Y \sim P(20) \Rightarrow E(Y) = 20$.

5. Seja X uma variável aleatória com a seguinte função densidade probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x^2, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4}, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.0)$$

☐ V ☐ F A função distribuição de $X, \forall x \in [1, 2]$ é $F(x) = \frac{3}{4}(x - 1)$.

R:

$$\forall x \in [1, 2], F(x) = \int_{-\infty}^x f(u)du = \int_0^1 \frac{3}{4}u^2 du + \int_1^x \frac{3}{4} du = \frac{1}{4} [u^3]_0^1 + \frac{3}{4}(x - 1) = \frac{3}{4}(x - 1) + \frac{1}{4}.$$

☐ V ☐ F $E[X] = 35/16$.

R:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^1 \frac{3}{4}x^3 du + \int_1^2 \frac{3}{4}x dx = \frac{3}{16} [x^4]_0^1 + \frac{3}{8} [x^2]_1^2 = \frac{21}{16}.$$

☐ V ☐ F Utilizando-se o método da transformação inversa para gerar N.P.A. da v.a. X , se gerámos o N.P.A. $U[0, 1]$, $u = 0.125$, o valor gerado para a v.a. X é $x = 0.79370$ (aproximado a 5 casas decimais).

R: Como para $\forall x \in [0, 1], F(x) = \frac{x^3}{4}$ e $F(1) = 0.25$ então para $u = 0.125$ geraremos x invertendo $F(x) = \frac{x^3}{4}$, ou seja, $\frac{x^3}{4} = u \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{4u}$ pelo que teremos $u = 0.125 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4 \times 0.125} = 0.79370$.

Nome completo: _____ N° de aluno: _____

Justifique detalhadamente as suas respostas

6. O peso de um disco de 1 Terabyte (TB) de uma determinada marca segue uma distribuição normal de média 330g e desvio padrão 10g. (5.0)

Seja X -peso de um disco de 1 Terabyte (TB) da marca referida.

Sabe-se que $X \sim N(330; 100)$ e portanto $Z = \frac{X-330}{10} \sim N(0, 1)$.

- (a) Qual a probabilidade de um disco escolhido ao acaso dessa marca ter um peso inferior a 320g?

R: Queremos, $P(X < 320) = P\left(\frac{X-330}{10} < \frac{320-330}{10}\right) = P(Z < -1) = \phi(-1) = 1 - \phi(1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$, com $\phi(\cdot)$ a função distribuição de $Z \sim N(0, 1)$.

- (b) Qual o peso máximo que os discos dessa marca atingem com uma probabilidade de 90%?

R: Queremos determinar x tal que $P(X \leq x) = 0.9 \Leftrightarrow P\left(\frac{X-330}{10} \leq \frac{x-330}{10}\right) = 0.9 \Leftrightarrow \phi\left(\frac{x-330}{10}\right) = 0.9 \Leftrightarrow \frac{x-330}{10} = \phi^{-1}(0.9) \Leftrightarrow \frac{x-330}{10} \approx 1.28 \Leftrightarrow x \approx 330 + 10 \times 1.28 \Leftrightarrow x = 342.8$.

- (c) Um lote de 3 discos serão enviados por correio, assumindo que o peso da embalagem é desprezável, qual a probabilidade do peso total do lote ser superior a 1Kg?

R: Seja X_i -o peso do i -ésimo disco de 1 Terabyte (TB) da marca referida, com $i=1,2,3$.

Sabe-se que para, $i = 1, 2, 3$, $X_i \sim N(330, 100)$, e o peso do lote pode então ser definido por $S_3 = X_1 + X_2 + X_3$. Também é conhecido o seguinte teorema.

Teorema:

Se $X_1, \dots, X_n$ são v.a. independentes tais que $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ e $a_1, \dots, a_n$ são constantes reais, então $a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n \sim N(a_1\mu_1 + \dots + a_n\mu_n, a_1^2\sigma_1^2 + \dots + a_n^2\sigma_n^2)$.

Pelo que aplicado ao nosso caso

$$S_3 \sim N(990, 300) \text{ e portanto, } Z = \frac{S_3 - 990}{\sqrt{300}} \sim N(0, 1).$$

Queremos, $P(S_3 > 1000) = 1 - P(S_3 \leq 1000) = 1 - P\left(\frac{S_3 - 990}{\sqrt{300}} \leq \frac{1000 - 990}{\sqrt{300}}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{10}{10\sqrt{3}}\right) = 1 - \phi(\sqrt{3}/3) = 0.2819$.