

Justifique adequadamente todas as respostas;
Resolva as questões em folhas separadas.

- (4,5) 1. Num servidor FTP, o número de acessos, por minuto, é uma variável aleatória com distribuição de Poisson com variância igual a 4.
- Calcule a probabilidade de ocorrerem 3 acessos num minuto.
 - Calcule a probabilidade de ocorrerem 6 acessos em dois minutos.
 - Seja Y a variável aleatória que conta o número de períodos, de 1 minuto de duração, em que se regista pelo menos um acesso ao servidor FTP, durante um intervalo de tempo de 5 minutos. Determine o valor médio, a variância e o coeficiente de variação de Y .
 - Considere a variável aleatória W com distribuição Geométrica de valor médio igual a $4/3$. Admitindo que $Cov(Y, W) = -1/6$, determine o valor médio e a variância de $3Y - W$. Se não resolveu a alínea anterior, considere $E(Y) = V(Y) = 1$.
- (4,5) 2. Na maternidade Caparica, os números de nascimentos diários de meninas, X , e de meninos, Y , são variáveis aleatórias com função de probabilidade conjunta dada por

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$2/45$	$9/45$	$4/45$
1	$7/45$	$5/45$	$3/45$
2	$6/45$	$1/45$	$8/45$

- Qual a probabilidade de, num qualquer dia, nascerem mais meninos do que meninas?
 - Sabendo que num dia nasceram três bebés, qual a probabilidade de terem nascido duas meninas?
 - Determine a covariância entre X e Y .
 - As variáveis X e Y são independentes? Justifique a resposta.
- (4,0) 3. Uma loja de informática vende componentes de informática e computadores de secretária, feitos a partir desses componentes. O preço de venda de um computador, depende dos componentes usados, e tem aproximadamente distribuição Normal de valor médio 469,90€ e variância 484€^2 .
- Determine a proporção de computadores vendidos, com preço superior a 498€.
 - Hoje a loja já vendeu 5 computadores, a 5 clientes diferentes. Qual a probabilidade da loja ter uma receita inferior a 2380€, com a venda desses computadores?
 - Uma empresa encomendou 50 computadores, todos com os mesmos componentes. Qual a probabilidade da loja ter uma receita inferior a 23800€, com a venda desses computadores?

- (3,5) 4. Num *datacenter*, há uma grande preocupação com uma possível perda de dados. Por esta razão, todos os discos rígidos são substituídos por uma unidade nova, caso atinjam os 5 anos de vida. Com base em informação recolhida nos últimos meses, sabemos que o tempo de vida de um disco rígido é uma variável aleatória X , com função densidade

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^4, & 0 \leq x \leq 5, \\ 0, & \text{outros valores de } x, \end{cases}$$

- (a) Verifique que se $\alpha = \frac{1}{625}$, então f é uma função densidade de probabilidade.
- (b) Determine a função de distribuição de X .
- (c) Qual a percentagem de discos rígidos que avariaram dentro do período de garantia do fabricante de 3 anos?
- (d) Sejam $u_1 = 0,2517$ e $u_2 = 0,6403$ dois números pseudo-aleatórios da distribuição $U(0,1)$. Determine dois números pseudo-aleatórios da variável aleatória X .
- (3,5) 5. Considere dois clubes rivais, clube A e clube B, cujas equipas de futebol jogam todos os anos no mesmo campeonato. A probabilidade do presidente do clube A despedir o seu treinador, entre jogos consecutivos entre as duas equipas rivais, é 0,15. Se o treinador da equipa do clube A foi despedido, no próximo jogo, a equipa A ganha, empata ou perde, com a equipa do clube B, com probabilidades 0,2, 0,2, 0,6, respectivamente. Se o treinador não foi despedido, então a equipa do clube A ganha, empata ou perde o próximo jogo, com a equipa do clube B, com probabilidades 0,4, 0,2, 0,4, respectivamente.
- (a) Indique, justificando, dois acontecimentos disjuntos.
- (b) Se escolhermos, ao acaso, um jogo entre as duas equipas rivais, qual a probabilidade da equipa A ganhar ou empatar?
- (c) Terminou neste momento um jogo entre as duas equipas rivais e a equipa do clube A perdeu o jogo. Qual a probabilidade de no próximo jogo, entre estas equipas, a equipa do clube A ter outro treinador?

Formulário

Distribuições discretas				
Distribuição	$P(X = k)$	Suporte	Valor médio	Variância
$H(N, M, n)$	$\binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k} / \binom{N}{n}$	$\max(0, M + n - N) \leq k \leq \min(M, n), k \in \mathbb{N}_0$	nM/N	$\frac{nM(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$
$B(n, p)$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$0 \leq k \leq n, k \in \mathbb{N}_0$	np	$np(1-p)$
$P(\lambda)$	$e^{-\lambda} \lambda^k / k!$	$k \in \mathbb{N}_0$	λ	λ
$G(p)$	$p(1-p)^{k-1}$	$k \in \mathbb{N}$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
Distribuições absolutamente contínuas				
Distribuição	$f(x)$	Suporte	Valor médio	Variância
$U(a, b)$	$\frac{1}{b-a}$	$a < x < b, x \in \mathbb{R}$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
$E(\lambda, \delta)$	$\frac{1}{\delta} e^{-(x-\lambda)/\delta}$	$x > \lambda, x \in \mathbb{R}$	$\lambda + \delta$	δ^2
$N(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$	$x \in \mathbb{R}$	μ	σ^2

**Justifique adequadamente todas as respostas;
Resolva as questões em folhas separadas.**

- (6.5) 1. De forma a avaliar a velocidade (de leitura sequencial) duma unidade de memória flash USB 2.0 de certo fabricante, seleccionaram-se aleatoriamente 51 unidades e mediu-se, em cada unidade, a respectiva velocidade. Estas medições resultaram numa velocidade média de 31 MB/s e num desvio padrão de 3 MB/s.
- (a) Estime pontualmente a velocidade média da população de memórias flash USB 2.0.
 - (b) Indique, sem demonstrar, duas propriedades do estimador que usou na alínea anterior.
 - (c) Construa e calcule um intervalo de confiança a 95% para a velocidade média. Justifique todos os passos empregues.
 - (d) Qual deveria ser o tamanho de amostra a usar, de forma a que a amplitude do intervalo de confiança determinado em (c) diminua para um quarto do seu valor (assumindo que o valor do desvio padrão amostral não se altera)?
 - (e) Assumindo a normalidade da velocidade das memórias flash deste fabricante, teste a hipótese do seu desvio padrão não ser superior a 2.8 MB/s. Use o nível de significância de 5%.
- (6.0) 2. Numa estação de serviço, os abastecimentos de gasolina (em litros) realizados por 40 clientes escolhidos aleatoriamente, aparecem apresentados abaixo.

41	30	28	41	28	26	28	41	30	34
40	36	30	20	43	36	36	20	42	43
42	40	32	26	28	41	34	24	42	40
28	41	34	46	48	21	24	22	44	41

$$\sum x_i = 1371, \quad \sum x_i^2 = 49461$$

- (a) Poderemos considerar que é uma amostra aleatória? Responda à questão, recorrendo ao **valor-p** de um teste de hipóteses adequado. Use o nível de significância de 5%.
- (b) Independentemente do resultado da alínea anterior, será que poderemos considerar, com nível de significância de 10%, que os clientes desta estação de serviço abastecem de acordo com uma distribuição $N(35, 64)$? Use as 6 classes: $]-\infty, 25]$, $]25, 30]$, $]30, 35]$, $]35, 40]$, $]40, 45]$, $]45, +\infty[$.

Sugestão: Use a simetria do modelo normal em torno do seu valor médio ($p_4 = p_3, \dots$) e a amostra ordenada:

20 20 21 22 24 24 26 26 28 28 28 28 28 30 30 30 32 34 34 34
36 36 36 40 40 40 41 41 41 41 41 41 42 42 42 43 43 44 46 48

- (3.5) 3. Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória duma população com distribuição exponencial de parâmetros $(\lambda, 1)$. Considere os estimadores:

$$\hat{\lambda}_A = \min(X_1, X_2, \dots, X_n), \quad \hat{\lambda}_B = \bar{X} - 1,$$

e a seguinte informação: $\hat{\lambda}_A \sim E\left(\lambda, \frac{1}{n}\right)$.

- (a) Os estimadores $\hat{\lambda}_A$ e $\hat{\lambda}_B$ são centrados? Justifique.
 (b) Calcule os Erros Quadráticos Médios dos estimadores $\hat{\lambda}_A$ e $\hat{\lambda}_B$ e indique qual o mais eficiente.
 (c) Para uma amostra, recolhida desta população, obtemos $\sum_{i=1}^{100} x_i = 286.247$. Com base na variável *pivot*,

$$E = \sqrt{n}(\hat{\lambda}_B - \lambda) \stackrel{a}{\sim} N(0, 1),$$

deduza e calcule o intervalo de 90% de confiança para o parâmetro λ .

- (4.0) 4. Pretende-se modelar o peso de pintos, criados na empresa *Homestead Organics Ltd*, em função da sua idade. A empresa disponibiliza os dados da seguinte tabela:

x : idade (em semanas)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y : peso (em kg)	0.15	0.36	0.65	1.03	1.46	1.91	2.36	2.79	3.20

Dados retirados do URL: <http://www.homesteadorganics.ca/meat-chickens.aspx>

$$\sum x_i = 45 \quad \sum x_i^2 = 285 \quad \sum y_i = 13.91 \quad \sum y_i^2 = 31.0089$$

- (a) Estime os parâmetros do modelo de regressão linear simples e a variância dos erros, σ^2 .
 (b) Teste a hipótese do declive da recta de regressão ser positivo, a 1% de significância. Comente o resultado.
 (c) Estime o peso médio dum pinto com 6.5 semanas de vida, e dum pinto à nascença (0 semanas de vida).

Justifique adequadamente todas as respostas;
Resolva as questões em folhas separadas.

- (4.0) 1. Uma empresa tem produção constante de 90 toneladas/mês de um determinado produto. A procura mensal desse produto é uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio igual a 80 toneladas, desvio padrão igual a 10 toneladas e é independente de mês para mês.
- (a) Calcule:
- A probabilidade da procura mensal, num qualquer mês, exceder a produção.
 - A probabilidade da procura mensal, num qualquer mês, se situar entre as 75 e as 90 toneladas.
 - Se se quiser garantir que só em 1% dos meses a procura excede a produção, qual a produção mensal que a empresa terá de garantir.
 - A probabilidade da procura total nos próximos 3 anos ser superior a 2950 toneladas.
- (b) Seja Y a v.a. que representa o número de meses, num ano, onde a procura foi inferior a 75 toneladas. Indique, justificando, qual a distribuição de Y e qual o seu valor esperado.
- (5.0) 2. Na loja *PC-Repair* reparam-se computadores. O número de computadores que chegam por dia para serem reparados, W , segue uma distribuição de Poisson com valor médio 1. **Neste exercício arredonde o resultado final dos cálculos a 2 casas decimais.**
- (a) Calcule a probabilidade de, num dia,
- não chegar nenhum computador para reparar;
 - chegar 1 computador para reparar;
 - chegarem 2 ou mais computadores para reparar.
- (b) Admita que o número de computadores que chegam à loja é independente de dia para dia. Qual a probabilidade de ontem ter chegado à loja um computador, sabendo que nos últimos 3 dias chegaram 4 computadores.
- (c) A loja só tem capacidade de receber no máximo 2 computadores por dia para serem reparados. O excedente não é recebido. Seja X a variável aleatória que representa o número de computadores que são recebidos, por dia, na loja. Determine a função de probabilidade de X , o seu valor médio, a sua variância e a sua moda. **Nota:** aproveite os cálculos da alínea (a).
- (d) O número de computadores que são reparados com sucesso, por dia, na loja é dado pela variável aleatória Y . Determine agora a função de probabilidade conjunta do par aleatório X e Y , sabendo que:
- Os computadores são reparados (com sucesso ou não) e entregues no próprio dia que são recebidos na loja.
 - $P(X = 2, Y = 2) = 0.1$ e $P(X = 2, Y = 0) = P(X = 2, Y = 1)$;
 - $E(XY) = 0.56$

- (6.0) 3. Seja X o tempo, em semanas, que uma equipa de 3 trabalhadores da Empresa *Comp1* demora a instalar um sistema de cluster de computação, composto por 200 processadores. Durante o ano de 2014, a empresa vendeu 30 desses sistemas. Os tempos de instalação aparecem na tabela abaixo.

Tempo de instalação em semanas, para vendas em 2014.

3	7	5	3	5	6	10	5	6	3	6	4	9	8	4
3	6	5	9	8	5	3	5	3	7	5	4	5	6	9

$$\sum_{i=1}^{30} x_i = 167, \quad \sum_{i=1}^{30} x_i^2 = 1051$$

- (a) Poderemos considerar que a amostra é aleatória? Responda à questão, através de um teste de hipóteses adequado. Use o nível de significância de 10%.
- (b) Estime, pontualmente, o valor médio populacional e a variância populacional.
- (c) Teste, ao nível de significância de 10% a hipótese do tempo médio de instalação de um sistema de cluster de computação, composto por 200 processadores, ser superior a 5 semanas.
- (d) Determine o valor-p do teste de hipóteses usado na alínea anterior.
- (e) Cada semana de trabalho da equipa de 3 trabalhadores, com material incluído, custa 200000 Euros e o sistema tem um preço de venda de 6000 Euros por processador, sendo composto por 200 processadores. Determine uma estimativa do lucro esperado na venda de cada sistema com 200 processadores, recorrendo a um estimador centrado e consistente.
- (4.0) 4. Usou-se o modelo de regressão Linear Simples para estudar o peso de pintos, criados na empresa *Homestead Organics Ltd*, em função da sua idade. Os dados disponibilizado pela empresa encontram-se na tabela seguinte.

x : idade (em semanas)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y : peso (em kg)	0.15	0.36	0.65	1.03	1.46	1.91	2.36	2.79	3.20

Dados retirados do URL: <http://www.homesteadorganics.ca/meat-chickens.aspx>

$$\sum x_i = 45 \quad \sum x_i^2 = 285 \quad \sum y_i = 13.91 \quad S_{yy} = 9.5102 \quad \hat{\beta}_1 = 0.3965$$

- (a) Comente a qualidade do modelo de regressão linear simples, com base no coeficiente de determinação.
- (b) Deduza e calcule um intervalo de 95% de confiança para β_1 .
- (c) Verifique se $\hat{\beta}_1$ é um estimador centrado para o parâmetro β_1 .
- (1.0) 5. Sejam A e B dois acontecimentos, tais que $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.8$ e $P(A - B) + P(B - A) = 0.05$. Determine a probabilidade de se realizarem (simultaneamente) ambos os acontecimentos.