Caderno: ________________

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA E

27 de abril de 2016

1º teste (A) – Duração: 2h00

Nome completo: ____

N.º aluno: ______________ Curso: ______________________________

Nas alíneas das perguntas 1–5 apenas uma das respostas está correta. Assinale a resposta com uma cruz no quadrado correspondente. Uma resposta incorreta desconta 0,2 valores e uma não resposta vale 0 valores.

1.
(a) A B C D E
(b) A B C D E
(c) A B C D E

2.
(a) A B C D E
(b) A B C D E

3.
(a) A B C D E
(b) A B C D E

4.
(a) A B C D E
(b) A B C D E
(c) A B C D E

5.
(a) A B C D E
(b) A B C D E

1. Determinado algoritmo de classificação tem uma probabilidade de 0,8 de classificar corretamente uma ação. Há apenas 2 fatores que, se ocorrerem, podem alterar esta probabilidade: os fatores A e B, que nunca ocorrem em simultâneo. As probabilidades de ocorrência de A e de B são 0,4 e 0,6, respetivamente. Se A ocorrer, a probabilidade do algoritmo classificar corretamente uma ação é igual a 0,6.

(1,0) (a) Se A ocorrer, a probabilidade do algoritmo não classificar corretamente uma ação é:
(A) 0,3 (B) 0,4 (C) 0,5 (D) 0,6 (E) Nenhuma das outras opções

(1,0) (b) Sabendo que uma ação foi corretamente classificada, a probabilidade de o fator A ter ocorrido é:
(A) 0,3 (B) 0,4 (C) 0,5 (D) 0,6 (E) Nenhuma das outras opções

(1,0) (c) Se B ocorrer, a probabilidade do algoritmo classificar corretamente uma ação é:
(A) $\frac{14}{15}$ (B) $\frac{4}{10}$ (C) $\frac{12}{15}$ (D) $\frac{6}{10}$ (E) Nenhuma das outras opções

2. O número de acessos ao *website* de um jornal electrónico é uma variável aleatória que segue uma distribuição de Poisson de taxa $\lambda = 0{,}2$ acessos/segundo.

(1,0) (a) A probabilidade de em 5 segundos acederem ao site mais de 2 utilizadores é:
(A) 0,001 (B) 0,080 (C) 0,184 (D) 0,016 (E) Nenhuma das outras opções

(1,0) (b) Seja W a variável aleatória contínua que indica o tempo de espera, em segundos, entre dois acessos consecutivos. Então a $P(W \leq 1)$ é
(A) 0,819 (B) 0,200 (C) 0,181 (D) 0,982 (E) Nenhuma das outras opções

3. Numa determinada cidade de Portugal, a probabilidade de chover no dia de ANO NOVO, obtida com base em registos históricos, é de 0,2. Assuma ainda a independência do comportamento do estado do tempo, entre dias de ANO NOVO de anos distintos.

(1,0) (a) a probabilidade de nos próximos 15 anos chover exatamente em 3 dias de ANO NOVO é
(A) 0,200 (B) 0,008 (C) 0,250 (D) 0,001 (E) Nenhuma das outras opções

(1,0) (b) o número médio de dias de ANO NOVO com chuva, dos próximos 15 anos, é
(A) 3 (B) 12 (C) 10 (D) 0,2 (E) Nenhuma das outras opções

Total de folhas entregues: ____________ Folha nº 1

4. Os acertos finais para a obtenção da cor desejada para uma tinta são feitos, em primeiro lugar, por um computador, sendo completados manualmente por um operário especializado. O número X de afinações de cor, levadas a efeito pelo computador, varia entre uma e três. O operário examina o trabalho e procede ou não a uma última afinação manual, consoante julgar necessário. Seja Y o número de afinações manuais (que varia entre 0 e 1). Da experiência passada sabe-se que:

   - em 60% dos casos não é necessária qualquer afinação manual;
   - em 30% dos casos o computador leva a efeito uma única afinação de cor, e, em 40% destes, já não é necessário proceder a qualquer afinação manual;
   - em 60% dos casos o computador leva a efeito duas afinações de cor;
   - quando o computador realiza três afinações de cor é sempre necessário afinação manual.

(1,0) (a) Indique o valor da $P(X = 1, Y = 1)$
(A) 0,1 (B) 0,12 (C) 0,18 (D) 0,3 (E) Nenhuma das outras opções

(1,0) (b) Indique o valor de $E(Y|X = 1)$
(A) 0,4 (B) 1,0 (C) 0,3 (D) 0,8 (E) Nenhuma das outras opções

(1,0) (c) Indique o valor de $Cov(2X + 3, Y)$
(A) 1,8 (B) 0 (C) 0,4 (D) 0,72 (E) Nenhuma das outras opções

5. Seja X a nota do exame de época especial de Probabilidades e Estatística, de um aluno que fez esse exame. Admita que X tem distribuição Normal de média 10 e variância 2,25.

(1,0) (a) A probabilidade de um aluno ter uma classificação compreendida entre 8 e 11,5 é:
(A) 0,0520 (B) 0,1750 (C) 0,5619 (D) 0,7495 (E) Nenhuma das outras opções

(1,0) (b) Sabendo que a classificação de um aluno foi superior ao valor médio de X, qual a probabilidade de ser inferior a 11,5?
(A) 0,7486 (B) 0,3413 (C) 0,9889 (D) 0,6826 (E) Nenhuma das outras opções

---

6. Admite-se que, após uma reparação, o tempo, em dias, até ao surgimento da 1ª avaria que implica paragem da máquina M_1 para nova intervenção, tem distribuição Exponencial com parâmetros 3 e 9.

(1,0) (a) Qual o tempo esperado e o desvio padrão entre paragens consecutivas deste equipamento.

(2,0) (b) Determine a probabilidade aproximada de o total dos próximos 100 tempos de funcionamento da máquina M_1, entre paragens para reparação, estar entre 1200 e 1250 dias.

7. A mota do João, nas deslocações, tem um consumo de combustível, em litros, com uma distribuição definida pela seguinte função densidade de probabilidade,

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ mx, & 1 < x \leq 4, \\ 0, & \text{outros valores de } x. \end{cases}$$

(1,0) (a) Verifique que $m = 1/15$.

(1,0) (b) Determine o valor esperado do consumo de combustível da mota.

(1,0) (c) Sabendo que $E(X^2) = 9/2$, determine $E(X(X-1))$ e $V(X)$.

(1,5) (d) Determine a função de distribuição do consumo de combustível da mota.

(0,5) (e) Determine a probabilidade de, numa qualquer deslocação, o consumo ser superior a 1 litro.

Caderno: ______________

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA E
27 de abril de 2016
1º teste (B) – Duração: 2h00

Nome completo: ____

N.º aluno: ______________ Curso: ______________________________

Nas alíneas das perguntas 1–5 apenas uma das respostas está correta. Assinale a resposta com uma cruz no quadrado correspondente. Uma resposta incorreta desconta 0,2 valores e uma não resposta vale 0 valores.

1.
(a) A B C D E
(b) A B C D E
(c) A B C D E

2.
(a) A B C D E
(b) A B C D E

3.
(a) A B C D E
(b) A B C D E

4.
(a) A B C D E
(b) A B C D E
(c) A B C D E

5.
(a) A B C D E
(b) A B C D E

1. Determinado algoritmo de classificação tem uma probabilidade de 0,6 de classificar corretamente uma ação. Há apenas 2 fatores que, se ocorrerem, podem alterar esta probabilidade: os fatores A e B, que nunca ocorrem em simultâneo. As probabilidades de ocorrência de A e de B são 0,6 e 0,4, respetivamente. Se A ocorrer, a probabilidade do algoritmo classificar corretamente uma ação é igual a 0,4.

(1,0) (a) Se A ocorrer, a probabilidade do algoritmo não classificar corretamente uma ação é:
(A) 0,3 (B) 0,4 (C) 0,5 (D) 0,6 (E) Nenhuma das outras opções

(1,0) (b) Sabendo que uma ação foi corretamente classificada, a probabilidade de o fator A ter ocorrido é:
(A) 0,3 (B) 0,4 (C) 0,5 (D) 0,6 (E) Nenhuma das outras opções

(1,0) (c) Se B ocorrer, a probabilidade do algoritmo classificar corretamente uma ação é:
(A) 0,4 (B) 0,6 (C) 0,7 (D) 0,9 (E) Nenhuma das outras opções

2. O número de acessos ao *website* de um jornal electrónico é uma variável aleatória que segue uma distribuição de Poisson de taxa $\lambda = 0{,}2$ acessos/segundo.

(1,0) (a) A probabilidade de em 5 segundos aceder ao site mais de 1 utilizador é:
(A) 0,164 (B) 0,368 (C) 0,018 (D) 0,264 (E) Nenhuma das outras opções

(1,0) (b) Seja W a variável aleatória contínua que indica o tempo de espera, em segundos, entre dois acessos consecutivos. Então a $P(W \leq 2)$ é
(A) 0,330 (B) 0,865 (C) 0,670 (D) 0,268 (E) Nenhuma das outras opções

3. Numa determinada cidade de Portugal, a probabilidade de chover no dia de ANO NOVO, obtida com base em registos históricos, é de 0,4. Assuma ainda a independência do comportamento do estado do tempo, entre dias de ANO NOVO de anos distintos.

(1,0) (a) a probabilidade de nos próximos 15 anos chover exatamente em 3 dias de ANO NOVO é
(A) 0,200 (B) 0,063 (C) <0,001 (D) 0,008 (E) Nenhuma das outras opções

(1,0) (b) o número médio de dias de ANO NOVO com chuva, dos próximos 15 anos, é
(A) 6 (B) 7 (C) 9 (D) 10 (E) Nenhuma das outras opções

Total de folhas entregues: ____________ Folha nº 1

4. Os acertos finais para a obtenção da cor desejada para uma tinta são feitos, em primeiro lugar, por um computador, sendo completados manualmente por um operário especializado. O número X de afinações de cor, levadas a efeito pelo computador, varia entre uma e três. O operário examina o trabalho e procede ou não a uma última afinação manual, consoante julgar necessário. Seja Y o número de afinações manuais (que varia entre 0 e 1). Da experiência passada sabe-se que:

- em 60% dos casos não é necessária qualquer afinação manual;
- em 30% dos casos o computador leva a efeito uma única afinação de cor, e, em 40% destes, já não é necessário proceder a qualquer afinação manual;
- em 60% dos casos o computador leva a efeito duas afinações de cor;
- quando o computador realiza três afinações de cor é sempre necessário afinação manual.

(1,0) (a) Indique o valor da $P(X = 1, Y = 0)$
(A) 0,1 (B) 0,12 (C) 0,18 (D) 0,3 (E) Nenhuma das outras opções

(1,0) (b) Indique o valor de $E(Y|X = 1)$
(A) 0,4 (B) 1,0 (C) 0,3 (D) 0,8 (E) Nenhuma das outras opções

(1,0) (c) Indique o valor de $Cov(2X + 3, Y)$
(A) 1,8 (B) 0 (C) 0,4 (D) 0,72 (E) Nenhuma das outras opções

5. Seja X a nota do exame de época especial de Probabilidades e Estatística, de um aluno que fez esse exame. Admita que X tem distribuição Normal de média 10 e variância 2,25.

(1,0) (a) A probabilidade de um aluno ter uma classificação compreendida entre 8 e 11,5 é:
(A) 0,5619 (B) 0,7495 (C) 0,0520 (D) 0,1750 (E) Nenhuma das outras opções

(1,0) (b) Sabendo que a classificação de um aluno foi superior ao valor médio de X, qual a probabilidade de ser inferior a 11,5?
(A) 0,3980 (B) 0,3628 (C) 0,6826 (D) 0,1671 (E) Nenhuma das outras opções

---

6. Admite-se que, após uma reparação, o tempo, em dias, até ao surgimento da 1ª avaria que implica paragem da máquina M_1 para nova intervenção, tem distribuição Exponencial com parâmetros 3 e 9.

(1,0) (a) Qual o tempo esperado e o desvio padrão entre paragens consecutivas deste equipamento.

(2,0) (b) Determine a probabilidade aproximada de o total dos próximos 100 tempos de funcionamento da máquina M_1, entre paragens para reparação, estar entre 1200 e 1250 dias.

7. A mota do João, nas deslocações, tem um consumo de combustível, em litros, com uma distribuição definida pela seguinte função densidade de probabilidade,

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ mx, & 1 < x \leq 4, \\ 0, & \text{outros valores de } x. \end{cases}$$

(1,0) (a) Verifique que $m = 1/15$.

(1,0) (b) Determine o valor esperado do consumo de combustível da mota.

(1,0) (c) Sabendo que $E(X^2) = 9/2$, determine $E(X(X - 1))$ e $V(X)$.

(1,5) (d) Determine a função de distribuição do consumo de combustível da mota.

(0,5) (e) Determine a probabilidade de, numa qualquer deslocação, o consumo ser superior a 1 litro.

Caderno: ______________

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA E
18 de maio de 2016
2º teste (A) – Duração: 2h00

Nome completo: ______________________________

N.º aluno: ______________ Curso: ______________________________

Nas alíneas das perguntas 1–4 apenas uma das respostas está correta. Assinale a resposta com uma cruz no quadrado correspondente. Uma resposta incorreta desconta 0,2 valores e uma não resposta vale 0 valores.

1.
(a) A B C D E
(b) A B C D E
(c) A B C D E

2.
(a) A B C D E
(b) A B C D E
(c) A B C D E

3.
A B C D E

4.
(a) V F
(b) V F
(c) V F
(d) V F
(e) V F
(f) V F

1. O tempo de acesso ao portal das finanças, em segundos, é uma variável aleatória que segue uma distribuição normal com variância $1s^2$. De forma a poder estimar-se o seu valor médio, selecionou-se uma amostra aleatória de 40 acessos a esse portal, tendo-se registado um tempo médio de acesso de $4s$.

(1,2) (a) Para se estimar a média do tempo de acesso ao portal das finanças, através de um intervalo de confiança, a variável pivot a usar é:
(A) $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ (B) $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ (C) $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$
(D) $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ (E) Nenhuma das outras opções

(1,5) (b) Com base nos dados obtidos, o intervalo de confiança a 98% para a média do tempo de acesso ao portal das finanças é dado por (arredondamentos a 2 casas decimais):
(A) [4,63 ; 5,37] (B) [2,63 ; 5,37] (C) [3,63 ; 4,37]
(D) [1,63 ; 4,37] (E) Nenhuma das outras opções

(1,5) (c) De forma a reduzir para 0,5s, a amplitude do intervalo de confiança a 98% para a média do tempo de acesso ao portal das finanças, o tamanho amostral a considerar deverá ser de:
(A) 136 (B) 87 (C) 76 (D) 59 (E) Nenhuma das outras opções

2. Suponha que se realizou um teste de hipóteses para testar H_0: $\mu = 0$ *versus* H_1: $\mu \neq 0$, sendo μ a média de uma população normal, ao nível de significância α =0,05. Suponha ainda que a probabilidade de ocorrer o erro do tipo II é igual a 0,1.

(1,0) (a) A probabilidade de ocorrer o erro do tipo I, associado a este teste é,
(A) 0,05 (B) 0,1 (C) 0,9 (D) 0,95 (E) Nenhuma das outras opções

(1,0) (b) A potência do teste é
(A) 0,05 (B) 0,1 (C) 0,9 (D) 0,95 (E) Nenhuma das outras opções

(1,5) (c) Considerando que se observou a amostra $(x_1, \ldots, x_{25})$, a região crítica deste teste é
(A) $]-\infty\,;\,-1{,}64[\,\cup\,]1{,}64\,;\,+\infty[$ (B) $]-\infty\,;\,-1{,}71[\,\cup\,]1{,}71\,;\,+\infty[$
(C) $]-\infty\,;\,-1{,}96[\,\cup\,]1{,}96\,;\,+\infty[$ (D) $]-\infty\,;\,-2{,}06[\,\cup\,]2{,}06\,;\,+\infty[$
(E) Nenhuma das outras opções

(1,5) 3. O responsável da linha de empacotamento de uma determinada ração para cavalos recolheu uma amostra aleatória de 30 sacos de ração, tendo obtido um desvio padrão amostral, dos correspondentes pesos, de 1,70 kg. Supondo que o peso dos sacos de ração segue uma distribuição normal, o intervalo de 95% de confiança para o desvio padrão populacional é

(A) [1,40 ; 2,18] (B) [1,83 ; 5,24] (C) [1,97 ; 4,74]
(D) [1,35 ; 2,29] (E) Nenhuma das outras opções

4. Seja $X_1, \ldots, X_{10}$ uma amostra aleatória (a.a) de uma população de média μ e variância σ^2. Admita que a população não tem distribuição normal. Seja ainda $(x_1, \ldots, x_{10})$ uma concretização da a.a. e considere os seguintes estimadores de μ:

$$\widehat{\mu}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{10} \qquad \widehat{\mu}_2 = \frac{4X_1 - X_3 + 2X_7}{5}$$

Indique o valor lógico das seguintes alíneas.

(0,5) (a) $\widehat{\mu}_1$ é um estimador de μ obtido pelo método dos momentos.

(0,5) (b) $\widehat{\mu}_1$ é um estimador centrado de μ e $\widehat{\mu}_2$ é um estimador não centrado de μ.

(0,5) (c) $EQM(\widehat{\mu}_1) \geq EQM(\widehat{\mu}_2)$.

(0,5) (d) $\overline{x}$ é uma estimativa pontual de μ.

(0,5) (e) $\widehat{\mu}_1 \sim N(\mu, \sigma^2/10)$.

(0,5) (f) Suponha que a a.a. provém de uma população com distribuição de Poisson de taxa λ. Então $\widehat{\mu}_1$ é um estimador centrado de σ.

5. Admita que a pluviosidade anual (em milímetros), em determinada localidade, tem distribuição normal. Nos últimos oito anos a precipitação anual foi:

$$787 \quad 783 \quad 777 \quad 783 \quad 781 \quad 785 \quad 778 \quad 782$$

(1,0) (a) Estime pontualmente o valor médio e o desvio padrão populacionais.

(2,5) (b) Os anos recentes parecem evidenciar alterações climáticas. Lança-se a hipótese da pluviosidade anual média ser superior a 780mm. Confirma esta hipótese? Utilize o nível de significância de 10%.

(0,8) (c) Determine, aproximadamente, o valor-p do teste que realizou da alínea anterior.

6. Seja $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de uma população com distribuição dada por $P(X \leq x) = 1 - \left(\frac{\delta}{x}\right)^3,\ x > \delta\ (\delta > 0)$. Então, temos que $E(X) = \frac{3\delta}{2}$ e $V(X) = \frac{3\delta^2}{4}$.

(1,5) (a) Determine o estimador dos momentos de δ e calcule o seu erro quadrático médio.

(0,5) (b) Para uma amostra aleatória, recolhida desta população, obtemos $\sum_{i=1}^{100} x_i = 180$. Com base no estimador dos momentos, estime o valor de δ. [Se não resolveu (a), considere $\hat{\delta} = (\bar{X}^2 - 1)^{1/2}$]

(1,5) (c) Com base na amostra de dimensão $n = 100$, referida em (b), e na variável pivot

$$\frac{\bar{X} - \frac{3\delta}{2}}{\frac{\sqrt{3}\delta}{2\sqrt{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1),$$

deduza e calcule o intervalo de 95% de confiança para δ.

Caderno: ______________

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA E
18 de maio de 2016
2º teste (B) – Duração: 2h00

Nome completo: ____

N.º aluno: ______________ Curso: ______________________________

Nas alíneas das perguntas 1–4 apenas uma das respostas está correta. Assinale a resposta com uma cruz no quadrado correspondente. Uma resposta incorreta desconta 0,2 valores e uma não resposta vale 0 valores.

1.
(a) A B C D E
(b) A B C D E
(c) A B C D E

2.
(a) A B C D E
(b) A B C D E
(c) A B C D E

3.
A B C D E

4.
(a) V F
(b) V F
(c) V F
(d) V F
(e) V F
(f) V F

1. Suponha que se realizou um teste de hipóteses para testar H_0: $\mu = 0$ *versus* H_1: $\mu \neq 0$, sendo μ a média de uma população normal, ao nível de significância $\alpha =$0,1. Suponha ainda que a probabilidade de ocorrer o erro do tipo II é igual a 0,05.

(1,0) (a) A probabilidade de ocorrer o erro do tipo I, associado a este teste é,
(A) 0,05 (B) 0,1 (C) 0,9 (D) 0,95 (E) Nenhuma das outras opções

(1,0) (b) A potência do teste é
(A) 0,05 (B) 0,1 (C) 0,9 (D) 0,95 (E) Nenhuma das outras opções

(1,5) (c) Considerando que se observou a amostra $(x_1, \ldots, x_{25})$, a região crítica deste teste é
(A) $]-\infty\,;\,-1{,}64[\;\cup\;]1{,}64\,;\,+\infty[$
(B) $]-\infty\,;\,-1{,}71[\;\cup\;]1{,}71\,;\,+\infty[$
(C) $]-\infty\,;\,-1{,}96[\;\cup\;]1{,}96\,;\,+\infty[$
(D) $]-\infty\,;\,-2{,}06[\;\cup\;]2{,}06\,;\,+\infty[$
(E) Nenhuma das outras opções

2. O tempo de acesso ao portal das finanças, em segundos, é uma variável aleatória que segue uma distribuição normal com variância $1s^2$. De forma a poder estimar-se o seu valor médio, selecionou-se uma amostra aleatória de 40 acessos a esse portal, tendo-se registado um tempo médio de acesso de $4s$.

(1,2) (a) Para se estimar a média do tempo de acesso ao portal das finanças, através de um intervalo de confiança, a variável pivot a usar é:
(A) $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$
(B) $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$
(C) $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$
(D) $X^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$
(E) Nenhuma das outras opções

(1,5) (b) Com base nos dados obtidos, o intervalo de confiança a 98% para a média do tempo de acesso ao portal das finanças é dado por (arredondamentos a 2 casas decimais):
(A) [4,63 ; 5,37] (B) [2,63 ; 5,37] (C) [3,63 ; 4,37]
(D) [1,63 ; 4,37] (E) Nenhuma das outras opções

(1,5) (c) De forma a reduzir para 0,4s, a amplitude do intervalo de confiança a 98% para a média do tempo de acesso ao portal das finanças, o tamanho amostral a considerar deverá ser de:
(A) 136 (B) 87 (C) 76 (D) 59 (E) Nenhuma das outras opções

(1,5) 3. O responsável da linha de empacotamento de uma determinada ração para cavalos recolheu uma amostra aleatória de 30 sacos de ração, tendo obtido um desvio padrão amostral, dos correspondentes pesos, de 1,70 kg. Supondo que o peso dos sacos de ração segue uma distribuição normal, o intervalo de 90% de confiança para o desvio padrão populacional é

(A) [1,40 ; 2,18] (B) [1,83 ; 5,24] (C) [1,97 ; 4,74]
(D) [1,35 ; 2,29] (E) Nenhuma das outras opções

4. Seja $X_1, \ldots, X_{10}$ uma amostra aleatória (a.a) de uma população de média μ e variância σ^2. Admita que a população não tem distribuição normal. Seja ainda $(x_1, \ldots, x_{10})$ uma concretização da a.a. e considere os seguintes estimadores de μ:

$$\widehat{\mu}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{10} \qquad \widehat{\mu}_2 = \frac{4X_1 - X_3 + 2X_7}{5}$$

Indique o valor lógico das seguintes alíneas.

(0,5) (a) $\widehat{\mu}_1$ é um estimador de μ obtido pelo método dos momentos.

(0,5) (b) $\widehat{\mu}_1$ é um estimador centrado de μ e $\widehat{\mu}_2$ é um estimador não centrado de μ.

(0,5) (c) $EQM(\widehat{\mu}_1) \leq EQM(\widehat{\mu}_2)$.

(0,5) (d) $\widehat{\mu}_1 \sim N(\mu, \sigma^2/10)$.

(0,5) (e) $\overline{x}$ é uma estimativa pontual de μ.

(0,5) (f) Suponha que a a.a. provém de uma população com distribuição de Poisson de taxa λ. Então $\widehat{\mu}_1$ é um estimador centrado de σ^2.

5. Admita que a pluviosidade anual (em milímetros), em determinada localidade, tem distribuição normal. Nos últimos oito anos a precipitação anual foi:

$$787 \quad 783 \quad 777 \quad 783 \quad 781 \quad 785 \quad 778 \quad 782$$

(1,0) (a) Estime pontualmente o valor médio e o desvio padrão populacionais.

(2,5) (b) Os anos recentes parecem evidenciar alterações climáticas. Lança-se a hipótese da pluviosidade anual média ser superior a 780mm. Confirma esta hipótese? Utilize o nível de significância de 10%.

(0,8) (c) Determine, aproximadamente, o valor-p do teste que realizou da alínea anterior.

6. Seja $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de uma população com distribuição dada por $P(X \leq x) = 1 - \left(\frac{\delta}{x}\right)^3, \ x > \delta$ ($\delta > 0$). Então, temos que $E(X) = \frac{3\delta}{2}$ e $V(X) = \frac{3\delta^2}{4}$.

(1,5) (a) Determine o estimador dos momentos de δ e calcule o seu erro quadrático médio.

(0,5) (b) Para uma amostra aleatória, recolhida desta população, obtemos $\sum_{i=1}^{100} x_i = 180$. Com base no estimador dos momentos, estime o valor de δ. [Se não resolveu (a), considere $\hat{\delta} = (\bar{X}^2 - 1)^{1/2}$]

(1,5) (c) Com base na amostra de dimensão $n = 100$, referida em (b), e na variável pivot

$$\frac{\bar{X} - \frac{3\delta}{2}}{\frac{\sqrt{3}\delta}{2\sqrt{n}}} \overset{a}{\sim} N(0,1),$$

deduza e calcule o intervalo de 95% de confiança para δ.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA E
7 de junho de 2016
3º teste (A) – Duração: 1h30

Nome completo: ______________________________

N.º aluno: ____________ Curso: ______________________________

Nas alíneas das perguntas 1–2 apenas uma das respostas está correta. Assinale a resposta com uma cruz no quadrado correspondente. Uma resposta incorreta desconta 0,2 valores e uma não resposta vale 0 valores.

1.
(a) A B C D E
(b) A B C D E F
(c) A B C D E
(d) A B C D E
(e) A B C D E
(f) A B C D E

2.
(a) A B C D E
(b) A B C D E
(c) A B C D E

1. O consumo de combustível Y (em toneladas), de um determinado modelo de avião, depende do número de passageiros x, que transporta. No manifesto de carga, das últimas 10 viagens de um avião deste modelo, aparecem os valores relativos a estas variáveis conforme a tabela abaixo.

x_i	150	125	175	189	225	78	112	155	99	111
Y_i	37	40	41	48	55	28	37	43	32	32

$$\sum x_i = 1419, \quad \sum x_i^2 = 219871, \quad \sum y_i = 393, \quad \sum Y_i^2 = 16029, \quad \sum x_i Y_i = 58885$$

Considere o modelo de regressão linear simples $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$. Utilize 4 casas decimais nos seus cálculos.

(1,5) (a) β_1 é
(A) um estimador (B) um parâmetro (C) uma reta
(D) uma estimativa (E) Nenhuma das outras opções

(1,5) (b) A equação da reta de regressão, estimada, é
(A) $\beta_0 + \beta_1 x$ (B) $0{,}1684 + 15{,}4040x + \varepsilon$ (C) $0{,}1684 + 15{,}4040x$
(D) $15{,}4040 + 0{,}1684x$ (E) $15{,}4040 + 0{,}1684x + \varepsilon$ (F) Nenhuma das outras opções

(1,5) (c) O valor do coeficiente de determinação, com 2 casas decimais, é
(A) 0,81 (B) 0,90 (C) 0,95 (D) 0,99 (E) Nenhuma das outras opções

(1,5) (d) Suponha que o avião irá transportar 111 passageiros na próxima viagem. O consumo de combustível esperado, em toneladas, é aproximadamente igual a
(A) 32 (B) 111 (C) 34 (D) 1710 (E) Nenhuma das outras opções

(1,5) (e) O intervalo de confiança com nível 95% para β_1 é,
(A) [7,76 ; 23,04] (B) [1,83 ; 5,20] (C) [5,76 ; 21,04]
(D) [0,12 ; 0,21] (E) Nenhuma das outras opções

(1,5) (f) $\hat{\sigma}$ é aproximadamente igual a
(A) 7,38 (B) 39,03 (C) 54,47 (D) 59,04 (E) Nenhuma das outras opções

2. Considere uma linha de produção em série, programada para fabricar 50 artigos por hora. Ao longo de um período laboral de 30 horas, foi-se registando, de hora em hora, o número de artigos produzidos:

47	51	55	47	50	50	52	49	56	50	51	53	49	47	55
43	53	50	53	51	56	46	55	56	50	43	51	48	52	51

Um técnico de controlo de qualidade pretende testar a hipótese de aleatoriedade da amostra usando o teste das sequências ascendentes e descendentes.

(1,5) (a) O valor observado da estatística de teste (calculada com base no número de sequências) é
(A) 1,36 (B) 1,04 (C) 0,91 (D) 1,82 (E) Nenhuma das outras opções

(1,5) (b) Para um nível de significância de 5%, a região de rejeição do teste é:
(A) $]-\infty\,;\,-2{,}05[\,\cup\,]2{,}05\,;\,+\infty[$ (B) $]-\infty\,;\,-1{,}96[\,\cup\,]1{,}96\,;\,+\infty[$ (C) $]1{,}64\,;\,+\infty[$
(D) $]1{,}70\,;\,+\infty[$ (E) Nenhuma das outras opções

(1,5) (c) Outra amostra, de dimensão elevada, forneceu um valor observado da estatística de teste igual a 0,59. O valor-p do teste de aleatoriedade das sequências ascendentes e descendentes é:
(A) 0,7224 (B) 0,05 (C) 0,5552 (D) 0,10 (E) Nenhuma das outras opções

3. Considere o enunciado do exercício anterior. Apresente todos os cálculos e justificações convenientes na resolução das seguintes alíneas.

(5,0) (a) O gestor, observando os valores registados, suspeita que o "output" da linha de produção segue uma distribuição normal de valor médio 50 e variância 12,25. Esclareça o gestor, usando para o efeito um teste de hipóteses com $\alpha = 5\%$.

Notas: Considere na resolução as classes $]-\infty; 47]$, $]47; 49]$, $]49; 51]$, $]51; 53]$, $]53; +\infty[$ e a amostra ordenada

43	43	46	47	47	47	48	49	49	50	50	50	50	50	51
51	51	51	51	52	52	53	53	53	55	55	55	56	56	56

Admitindo válida a hipótese nula, temos:

$P(X \leq 43) = 0{,}0228$ $P(X \leq 44) = 0{,}0436$ $P(X \leq 45) = 0{,}0764$ $P(X \leq 46) = 0{,}1271$
$P(X \leq 47) = 0{,}1949$ $P(X \leq 48) = 0{,}2843$ $P(X \leq 49) = 0{,}3859$ $P(X \leq 50) = 0{,}5000$
$P(X \leq 51) = 0{,}6141$ $P(X \leq 52) = 0{,}7157$ $P(X \leq 53) = 0{,}8051$ $P(X \leq 54) = 0{,}8729$
$P(X \leq 55) = 0{,}9236$ $P(X \leq 56) = 0{,}9564$

(1,5) (b) Determine aproximadamente o valor-p do teste de hipóteses realizado na alínea anterior.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA E
7 de junho de 2016
3º teste (B) – Duração: 1h30

Nome completo: ______________________________

N.º aluno: ____________ Curso: ______________________________

Nas alíneas das perguntas 1–2 apenas uma das respostas está correta. Assinale a resposta com uma cruz no quadrado correspondente. Uma resposta incorreta desconta 0,2 valores e uma não resposta vale 0 valores.

1.
(a) A B C D E
(b) A B C D E F
(c) A B C D E
(d) A B C D E
(e) A B C D E
(f) A B C D E

2.
(a) A B C D E
(b) A B C D E
(c) A B C D E

1. O consumo de combustível Y (em toneladas), de um determinado modelo de avião, depende do número de passageiros x, que transporta. No manifesto de carga, das últimas 10 viagens de um avião deste modelo, aparecem os valores relativos a estas variáveis conforme a tabela abaixo.

x_i	150	125	175	189	225	78	112	155	99	111
Y_i	35	38	39	46	53	26	35	41	30	30

$$\sum x_i = 1419, \quad \sum x_i^2 = 219871, \quad \sum y_i = 373, \quad \sum Y_i^2 = 14497, \quad \sum x_i Y_i = 56047$$

Considere o modelo de regressão linear simples $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$. Utilize 4 casas decimais nos seus cálculos.

(1,5) (a) β_0 é
(A) um estimador (B) um parâmetro (C) uma reta
(D) uma estimativa (E) Nenhuma das outras opções

(1,5) (b) A equação da reta de regressão, estimada, é
(A) $0{,}1684 + 13{,}4040x + \varepsilon$ (B) $\beta_0 + \beta_1 x$ (C) $0{,}1684 + 13{,}4040x$
(D) $13{,}4040 + 0{,}1684x + \varepsilon$ (E) $13{,}4040 + 0{,}1684x$ (F) Nenhuma das outras opções

(1,5) (c) O valor do coeficiente de determinação, com 2 casas decimais, é
(A) 0,90 (B) 0,95 (C) 0,81 (D) 0,99 (E) Nenhuma das outras opções

(1,5) (d) Suponha que o avião irá transportar 111 passageiros na próxima viagem. O consumo de combustível esperado, em toneladas, é aproximadamente igual a
(A) 32 (B) 111 (C) 34 (D) 1710 (E) Nenhuma das outras opções

(1,5) (e) O intervalo de confiança com nível 95% para β_1 é,
(A) [7,76 ; 23,04] (B) [1,83 ; 5,20] (C) [5,76 ; 21,04]
(D) [0,12 ; 0,21] (E) Nenhuma das outras opções

(1,5) (f) $\hat{\sigma}$ é aproximadamente igual a
(A) 7,38 (B) 39,03 (C) 54,47 (D) 59,04 (E) Nenhuma das outras opções

2. Considere uma linha de produção em série, programada para fabricar 50 artigos por hora. Ao longo de um período laboral de 30 horas, foi-se registando, de hora em hora, o número de artigos produzidos:

47	51	55	47	50	50	52	49	56	50	51	53	49	47	51
43	53	50	53	51	56	46	55	56	50	43	51	48	52	55

Um técnico de controlo de qualidade pretende testar a hipótese de aleatoriedade da amostra usando o teste das sequências ascendentes e descendentes.

(1,5) (a) O valor observado da estatística de teste (calculada com base no número de sequências) é
(A) 1,36 (B) 1,04 (C) 0,91 (D) 1,82 (E) Nenhuma das outras opções

(1,5) (b) Para um nível de significância de 5%, a região de rejeição do teste é:
(A) $]-\infty\,;\,-1{,}96[\,\cup\,]1{,}96\,;\,+\infty[$ (B) $]-\infty\,;\,-2{,}05[\,\cup\,]2{,}05\,;\,+\infty[$ (C) $]1{,}70\,;\,+\infty[$
(D) $]1{,}64\,;\,+\infty[$ (E) Nenhuma das outras opções

(1,5) (c) Outra amostra, de dimensão elevada, forneceu um valor observado da estatística de teste igual a 0,49. O valor-p do teste de aleatoriedade das sequências ascendentes e descendentes é:
(A) 0,6242 (B) 0,05 (C) 0,6879 (D) 0,10 (E) Nenhuma das outras opções

3. Considere o enunciado do exercício anterior. Apresente todos os cálculos e justificações convenientes na resolução das seguintes alíneas.

(5,0) (a) O gestor, observando os valores registados, suspeita que o "output" da linha de produção segue uma distribuição normal de valor médio 50 e variância 12,25. Esclareça o gestor, usando para o efeito um teste de hipóteses com $\alpha = 5\%$.

Notas: Considere na resolução as classes $]-\infty; 47]$, $]47; 49]$, $]49; 51]$, $]51; 53]$, $]53; +\infty[$ e a amostra ordenada

43	43	46	47	47	47	48	49	49	50	50	50	50	50	51
51	51	51	51	52	52	53	53	53	55	55	55	56	56	56

Admitindo válida a hipótese nula, temos:

$P(X \leq 43) = 0{,}0228$ $P(X \leq 44) = 0{,}0436$ $P(X \leq 45) = 0{,}0764$ $P(X \leq 46) = 0{,}1271$
$P(X \leq 47) = 0{,}1949$ $P(X \leq 48) = 0{,}2843$ $P(X \leq 49) = 0{,}3859$ $P(X \leq 50) = 0{,}5000$
$P(X \leq 51) = 0{,}6141$ $P(X \leq 52) = 0{,}7157$ $P(X \leq 53) = 0{,}8051$ $P(X \leq 54) = 0{,}8729$
$P(X \leq 55) = 0{,}9236$ $P(X \leq 56) = 0{,}9564$

(1,5) (b) Determine aproximadamente o valor-p do teste de hipóteses realizado na alínea anterior.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA E
29 de junho de 2016
Exame (A) – Duração: 2h30

Nome completo: ______________________________

N.º aluno: ______________ Curso: ______________________________

Nas alíneas das perguntas 1–4 apenas uma das respostas está correta. Assinale a resposta com uma cruz no quadrado correspondente. Uma resposta incorreta desconta 0,2 valores e uma não resposta vale 0 valores.

1.
(a) A B C D E F
(b) A B C D E
(c) A B C D E F

2.
(a) A B C D E
(b) A B C D E

3.
(a) A B C D E
(b) A B C D E
(c) A B C D E

4.
(a) V F
(b) A B C D E
(c) A B C D E

1. O diretor de recursos humanos da BrandFCT Portugal, selecionou aleatoriamente, 10 engenheiros, de entre os 50 a trabalhar em Portugal. Os 10 engenheiros selecionados irão participar numa acção de formação. Em todos os países onde opera, a BrandFCT classifica os engenheiros de acordo com as suas qualificações, em 3 categorias, *elite*, *senior* e *prospect*. Em Portugal, 5 são engenheiros da categoria *elite* e 25 são da categoria *prospect*.

(0,5) (a) Considerando que estamos interessados em contar o número de engenheiros *elite* seleccionados, qual a distribuição adequada para o fazer?
(A) Uniforme (B) Hipergeométrica (C) Binomial
(D) Geométrica (E) Poisson (F) Nenhuma das outras opções

(1,0) (b) Qual a probabilidade de se selecionar exatamente 1 engenheiro *elite*.
(A) 0,0387 (B) 0,1000 (C) 0,3874 (D) 0,4313 (E) Nenhuma das outras opções

(0,5) (c) Qual o número esperado de engenheiros *elite* seleccionados.
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5 (F) Nenhuma das outras opções

2. Considere um serviço de atendimento telefónico que funciona 24 horas por dia. Nesse serviço verificou-se que, no período $P1$ das 10h às 16h, a probabilidade da linha telefónica estar ocupada é de 0,4; no período $P2$ das 16h às 20h essa probabilidade sobe para 0,6 e no restante horário, no período $P3$, essa probabilidade é de 0,2.

(1,5) (a) Se a probabilidade de um telefonema ser feito, num dos três períodos, for proporcional ao tamanho do período, então a probabilidade de a linha telefónica estar ocupada é de:
(A) $\frac{19}{60}$ (B) $\frac{23}{60}$ (C) $\frac{11}{60}$ (D) $\frac{41}{60}$ (E) Nenhuma das outras opções

(1,0) (b) Admita nesta alínea que a probabilidade de um telefonema ser feito nos períodos $P1$, $P2$ ou $P3$ é igual a 0,5, 0,4 e 0,1, respetivamente e a probabilidade da linha estar ocupada é de 0,46. Sabendo que em certa ocasião a linha estava ocupada, a probabilidade do telefonema ter sido feito nos períodos $P1$ ou $P3$ é de:
(A) $\frac{19}{23}$ (B) $\frac{23}{50}$ (C) $\frac{11}{23}$ (D) $\frac{13}{23}$ (E) Nenhuma das outras opções

Total de folhas entregues: ______________ Folha nº 1

3. Uma caixa contém 3 bolas idênticas, numeradas de 1 a 3. Extraem-se sucessivamente, e sem reposição, duas bolas. Seja S a variável aleatória que representa o valor da soma dos dois números inscritos nas duas bolas extraídas.

(1,0) (a) A função de probabilidade de S é

(A) $\begin{cases} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{cases}$ (C) $\begin{cases} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{cases}$

(E) Nenhuma das outras opções

(1,0) (b) Sejam X e Y variáveis aleatória com função de probabilidade dada, respetivamente, nas opções de resposta (A) e (B) da alínea anterior. Sabe-se que $E(XY) = 7{,}5$. O valor de $V(X - Y)$ é

(A) 0 (B) 1/3 (C) 4/3 (D) 7/3 (E) Nenhuma das outras opções

(1,0) (c) Seja W uma outra variável aleatória com função densidade $f(w) = \begin{cases} \frac{1}{w^2}, & w > 1, \\ 0, & \text{outros valores de } w. \end{cases}$

Então, a $P(W \leq 2)$ é igual a

(A) 0 (B) 0,25 (C) 0,5 (D) 0,75 (E) Nenhuma das outras opções

4. Um engenheiro informático desenvolveu um software de reconhecimento de voz. Para analisar a precisão desse software, escolheu ao acaso 300 frases e contou, para cada frase, o número de palavras que o software não identificou corretamente. Os resultados são apresentados na seguinte tabela:

número de erros	0	1	2	3	4	5
frequência	57	78	82	43	25	15

Pretende-se usar o teste de ajustamento do Qui-quadrado, para testar a hipótese de o número de erros produzidos pelo software, durante o reconhecimento de uma frase, ter distribuição de Poisson de parâmetro 2. Admitindo válida a hipótese nula, temos:

$$P(X=0) = 0{,}135 \quad P(X=1) = P(X=2) = 0{,}271 \quad P(X=3) = 0{,}18 \quad P(X=4) = 0{,}09 \quad P(X=5) = 0{,}036$$

(1,0) (a) Indique o valor lógico: se considerarmos 6 classes distintas, todas com frequência observada (O_i) positiva, o numero esperado de observações em cada classe é: 40,5 81,3 81,3 54,0 27,0 10,8

(1,0) (b) Para o nível de significância de 5%, a região crítica do teste é:

(A) $[0\,;\,0{,}831[\,\cup\,]12{,}8\,;\,+\infty[$ (B) $]9{,}49\,;\,+\infty[$ (C) $]11{,}1\,;\,+\infty[$

(D) $]-\infty\,;\,-1{,}96[\,\cup\,]1{,}96\,;\,+\infty[$ (E) Nenhuma das outras opções

(1,0) (c) Com base noutra amostra, de igual dimensão, e nas mesmas 6 classes anteriormente referidas, obtivemos $x^2_{obs} = 6{,}06$. Então o valor-p do teste do Qui-quadrado é

(A) 0,7 (B) 0,05 (C) 0,95 (D) 0,3 (E) Nenhuma das outras opções

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA E
29 de junho de 2016
Exame – Duração: 2h30

[Responda nas folhas do caderno]

(2,5) 5. O número de alunos, que entra numa sala da FCT para estudar tem uma distribuição de Poisson, com valor esperado $18/hora$.

(a) Determine a probabilidade de, em 30 minutos, entrarem pelo menos 3 alunos.

(b) Determine a probabilidade de durante 2 horas entrarem mais de 30 e menos de 34 alunos.

(c) Determine a probabilidade **aproximada** de durante 2 horas entrarem menos de 34 alunos.

[Mude de folha]

(4,0) 6. Considere uma linha de produção em série. A seguinte tabela apresenta o número de artigos produzidos durante 1 hora, em 40 horas escolhidas aleatoriamente.

47	51	55	47	50	50	52	49	56	50	51	53	49	47	55	43	53	50	53	51
56	46	55	56	50	43	51	48	52	51	52	51	53	49	48	48	45	47	48	49

(a) Estime pontualmente a proporção de horas, em que a linha de produção produz mais de 54 artigos.

(b) Verifique se o estimador pontual, que usou na alínea anterior, é centrado e consistente.

(c) Teste, ao nível de significância de 5%, a hipótese da proporção de horas em que se produzem mais de 54 artigos ser superior a 0,1.

[Mude de folha]

(3,0) 7. O consumo de combustível Y (em toneladas), de um determinado modelo de avião, depende do número de passageiros x, que transporta. No manifesto de carga, das últimas 10 viagens de um avião deste modelo, aparecem os valores relativos a estas variáveis conforme a tabela abaixo.

x_i	150	125	175	189	225	78	112	155	99	111
Y_i	36	39	40	47	54	27	36	42	31	31

$$\sum x_i = 1419, \quad \sum x_i^2 = 219871, \quad \sum y_i = 383, \quad \sum Y_i^2 = 15253, \quad \sum x_i Y_i = 57466$$

Considere o modelo de regressão linear simples $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$.

(a) Ajuste um modelo de regressão linear simples aos dados.

(b) Determine o coeficiente de determinação e comente a qualidade do modelo.

(c) Estime σ através de um intervalo de 90% de confiança. Apresente na resolução, a dedução do intervalo de confiança, a partir da variável pivot.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA E
29 de junho de 2016
Exame (B) – Duração: 2h30

Nome completo: ____

N.º aluno: ______________ Curso: ______________________________

Nas alíneas das perguntas 1–4 apenas uma das respostas está correta. Assinale a resposta com uma cruz no quadrado correspondente. Uma resposta incorreta desconta 0,2 valores e uma não resposta vale 0 valores.

1.
(a) A B C D E
(b) A B C D E
(c) A B C D E

2.
(a) A B C D E
(b) A B C D E

3.
(a) A B C D E F
(b) A B C D E
(c) A B C D E F

4.
(a) V F
(b) A B C D E
(c) A B C D E

1. Uma caixa contém 3 bolas idênticas, numeradas de 0 a 2. Extraem-se sucessivamente, e sem reposição, duas bolas. Seja S a variável aleatória que representa o valor da soma dos dois números inscritos nas duas bolas extraídas.

(1,0) (a) A função de probabilidade de S é

(A) $\left\{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right.$ (B) $\left\{\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right.$ (C) $\left\{\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right.$ (D) $\left\{\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{array}\right.$

(E) Nenhuma das outras opções

(1,0) (b) Sejam X e Y variáveis aleatória com função de probabilidade dada, respetivamente, nas opções de resposta (A) e (B) da alínea anterior. Sabe-se que $E(XY) = 7{,}5$. O valor de $V(X - Y)$ é

(A) 0 (B) 1/3 (C) 4/3 (D) 7/3 (E) Nenhuma das outras opções

(1,0) (c) Seja W uma outra variável aleatória com função densidade $f(w) = \begin{cases} \frac{1}{w^2}, & w > 1, \\ 0, & \text{outros valores de } w. \end{cases}$

Então, a $P(W \leq 3)$ é igual a

(A) 0 (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{9}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) Nenhuma das outras opções

2. Considere um serviço de atendimento telefónico que funciona 24 horas por dia. Nesse serviço verificou-se que, no período $P1$ das 10h às 16h, a probabilidade da linha telefónica estar ocupada é de 0,4; no período $P2$ das 16h às 20h essa probabilidade sobe para 0,6 e no restante horário, no período $P3$, essa probabilidade é de 0,2.

(1,5) (a) Se a probabilidade de um telefonema ser feito, num dos três períodos, for proporcional ao tamanho do período, então a probabilidade de a linha telefónica não estar ocupada é de:

(A) $\frac{19}{60}$ (B) $\frac{23}{60}$ (C) $\frac{11}{60}$ (D) $\frac{41}{60}$ (E) Nenhuma das outras opções

(1,0) (b) Admita nesta alínea que a probabilidade de um telefonema ser feito nos períodos $P1$, $P2$ ou $P3$ é igual a 0,5, 0,4 e 0,1, respetivamente e a probabilidade da linha estar ocupada é de 0,46. Sabendo que em certa ocasião a linha estava ocupada, a probabilidade do telefonema ter sido feito nos períodos $P2$ ou $P3$ é de:

(A) $\frac{19}{23}$ (B) $\frac{23}{50}$ (C) $\frac{11}{23}$ (D) $\frac{13}{23}$ (E) Nenhuma das outras opções

Total de folhas entregues: ______________ Folha nº 1

3. O diretor de recursos humanos da BrandFCT Portugal, selecionou aleatoriamente, 10 engenheiros, de entre os 50 a trabalhar em Portugal. Os 10 engenheiros selecionados irão participar numa acção de formação. Em todos os países onde opera, a BrandFCT classifica os engenheiros de acordo com as suas qualificações, em 3 categorias, *elite*, *senior* e *prospect*. Em Portugal, 5 são engenheiros da categoria *elite* e 25 são da categoria *prospect*.

(0,5) (a) Considerando que estamos interessados em contar o número de engenheiros *prospect* seleccionados, qual a distribuição adequada para o fazer?

(A) Uniforme (B) Hipergeométrica (C) Binomial

(D) Geométrica (E) Poisson (F) Nenhuma das outras opções

(1,0) (b) Qual a probabilidade de se selecionar exatamente 1 engenheiro *prospect*.

(A) 0,0010 (B) 0,0050 (C) 0,0098 (D) 0,1000 (E) Nenhuma das outras opções

(0,5) (c) Qual o número esperado de engenheiros *prospect* seleccionados.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5 (F) Nenhuma das outras opções

4. Um engenheiro informático desenvolveu um software de reconhecimento de voz. Para analisar a precisão desse software, escolheu ao acaso 300 frases e contou, para cada frase, o número de palavras que o software não identificou corretamente. Os resultados são apresentados na seguinte tabela:

número de erros	0	1	2	3	4	5
frequência	57	78	82	43	25	15

Pretende-se usar o teste de ajustamento do Qui-quadrado, para testar a hipótese de o número de erros produzidos pelo software, durante o reconhecimento de uma frase, ter distribuição de Poisson de parâmetro 2. Admitindo válida a hipótese nula, temos:

$$P(X=0) = 0{,}135 \quad P(X=1) = P(X=2) = 0{,}271 \quad P(X=3) = 0{,}18 \quad P(X=4) = 0{,}09 \quad P(X=5) = 0{,}036$$

(1,0) (a) Indique o valor lógico: se considerarmos 6 classes distintas, todas com frequência observada (O_i) positiva, o numero esperado de observações em cada classe é: 40,5 81,3 81,3 54,0 27,0 15,9

(1,0) (b) Para o nível de significância de 1%, a região crítica do teste é:

(A) $[0\,;\,0{,}412[\,\cup\,]16{,}7\,;\,+\infty[$ (B) $]15{,}1\,;\,+\infty[$ (C) $]13{,}3\,;\,+\infty[$

(D) $]-\infty\,;\,-2{,}33[\,\cup\,]2{,}33\,;\,+\infty[$ (E) Nenhuma das outras opções

(1,0) (c) Com base noutra amostra, de igual dimensão, e nas mesmas 6 classes anteriormente referidas, obtivemos $x^2_{obs} = 7{,}29$. Então o valor-p do teste do Qui-quadrado é

(A) 0,2 (B) 0,01 (C) 0,95 (D) 0,8 (E) Nenhuma das outras opções

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

[Responda nas folhas do caderno]

(2,5) 5. O número de alunos, que entra numa sala da FCT para estudar tem uma distribuição de Poisson, com valor esperado $18/hora$.

(a) Determine a probabilidade de, em 30 minutos, entrarem pelo menos 3 alunos.

(b) Determine a probabilidade de durante 2 horas entrarem mais de 30 e menos de 34 alunos.

(c) Determine a probabilidade **aproximada** de durante 2 horas entrarem menos de 34 alunos.

[Mude de folha]

(4,0) 6. Considere uma linha de produção em série. A seguinte tabela apresenta o número de artigos produzidos durante 1 hora, em 40 horas escolhidas aleatoriamente.

47	51	55	47	50	50	52	49	56	50	51	53	49	47	55	43	53	50	53	51
56	46	55	56	50	43	51	48	52	51	52	51	53	49	48	48	45	47	48	49

(a) Estime pontualmente a proporção de horas, em que a linha de produção produz mais de 54 artigos.

(b) Verifique se o estimador pontual, que usou na alínea anterior, é centrado e consistente.

(c) Teste, ao nível de significância de 5%, a hipótese da proporção de horas em que se produzem mais de 54 artigos ser superior a 0,1.

[Mude de folha]

(3,0) 7. O consumo de combustível Y (em toneladas), de um determinado modelo de avião, depende do número de passageiros x, que transporta. No manifesto de carga, das últimas 10 viagens de um avião deste modelo, aparecem os valores relativos a estas variáveis conforme a tabela abaixo.

x_i	150	125	175	189	225	78	112	155	99	111
Y_i	36	39	40	47	54	27	36	42	31	31

$$\sum x_i = 1419, \quad \sum x_i^2 = 219871, \quad \sum y_i = 383, \quad \sum Y_i^2 = 15253, \quad \sum x_i Y_i = 57466$$

Considere o modelo de regressão linear simples $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$.

(a) Ajuste um modelo de regressão linear simples aos dados.

(b) Determine o coeficiente de determinação e comente a qualidade do modelo.

(c) Estime σ através de um intervalo de 90% de confiança. Apresente na resolução, a dedução do intervalo de confiança, a partir da variável pivot.