FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA E
22 de abril de 2017
1^{o} teste – Solução

Versão A

1.
(a) A B C **D** E
(b) A B **C** D E
(c) A B **C** D E
(d) **A** B C D E

2.
(a) A **B** C D E
(b) A B **C** D E
(c) A B C **D** E

3.
(a) A B **C** D E
(b) A **B** C D E
(c) **A** B C D E

4.
(a) **A** B C D E
(b) A B **C** D E

Versão B

1.
(a) **A** B C D E
(b) A **B** C D E
(c) A **B** C D E
(d) A B **C** D E

2.
(a) A B **C** D E
(b) A B C **D** E
(c) A **B** C D E

3.
(a) A B **C** D E
(b) A B C **D** E
(c) A B **C** D E

4.
(a) A **B** C D E
(b) **A** B C D E

5. (a)

$X \setminus Y$	-2	0	2	
-1	0	0.5	0	0.5
1	0.25	0	0.25	0.5
	0.25	0.5	0.25	

(b) $P(Y > X) = 0.75$
$Cov(X, Y) = 0$

(c) X e Y não são independentes. Note que $P(X = -1, Y = -2) \neq P(X = -1)P(Y = -2)$.

6. (a) Como $\frac{3}{4}x^2 \geq 0$ se $0 < x \leq 1$, $\frac{3}{4} \geq 0$ se $1 < x < 2$ e $0 \geq 0$ para outros valores de x, concluímos que $f(x) \geq 0$. Como também se verifica $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$, $f(x)$ é uma função densidade de probabilidade.

(b) Se $x < 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0du = 0$.
Se $x \in [0, 1[$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_{0}^{x} \frac{3}{4}u^2 du = \frac{x^3}{4}.$$

Se $x \in [1, 2[$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_{0}^{1} \frac{3}{4}u^2 du + \int_{1}^{x} \frac{3}{4} du = \frac{3x - 2}{4}.$$

Se $x \geq 2$, $F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0du + \int_{0}^{1} \frac{3}{4}u^2 du + \int_{1}^{2} \frac{3}{4} du + \int_{2}^{x} 0du = 1$.

(c) $P(X < 0.5 | X < 1) = \frac{P(X \leq 0.5)}{P(X \leq 1)} = \frac{F(0.5)}{F(1)} = 0.125$.

(d) $\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = \frac{21}{16}$. $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X) - 1 = \frac{5}{16}$.

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA E
24 de maio de 2017
2º teste – Solução

Versão A

1.
(a) A B C **D** E
(b) V **F**
(c) V **F**
(d) A **B** C D E

2.
(a) A **B** C D E
(b) **A** B C D E
(c) A B **C** D E

3.
(a) A **B** C D E
(b) **A** B C D E
(c) **A** B C D E
(d) A B C **D** E
(e) A **B** C D E
(f) **V** F

Versão B

1.
(a) **A** B C D E
(b) A B **C** D E
(c) A **B** C D E

2.
(a) **A** B C D E
(b) **V** F
(c) V **F**
(d) A B C **D** E

3.
(a) A **B** C D E
(b) **A** B C D E
(c) A B C **D** E
(d) A **B** C D E
(e) A B **C** D E
(f) V **F**

4. Seja $T = \sum_{i=1}^{64} X_i$ (soma de variáveis aleatórias independentes e idênticamente distribuídas) a variável aleatória que representa a quantidade de energia gerada pelo aerogerador durante 64 horas. Usando o Teorema Limite Central, podemos garantir que $\frac{T-64\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{8\sqrt{\frac{4-\pi}{2}}}$ converge (em distribuição) para a distribuição Normal reduzida. Então,

$$P(T > 82) = 1 - P(T \leq 82) = 1 - P\left(\frac{T-64\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{8\sqrt{\frac{4-\pi}{2}}} \leq \frac{82-64\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{8\sqrt{\frac{4-\pi}{2}}}\right) \approx 1 - \Phi(0.34) = 0.3669$$

5. (a) Para obtermos o estimador dos momentos de θ, temos de resolver em ordem a θ a equação $E(X) = \bar{X}$. Como $E(X) = \bar{X} \Leftrightarrow \theta = \bar{X}\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, o estimador dos momentos de θ é

$$\hat{\theta} = \bar{X}\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Como $E(\hat{\theta}) = E(\bar{X})\sqrt{\frac{2}{\pi}} = \theta\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}} = \theta$ e $EQM(\hat{\theta}) = V(\hat{\theta}) = \theta^2\left(\frac{4-\pi}{n\pi}\right) \underset{n\to\infty}{\to} 0$, o estimador $\hat{\theta}$ é centrado e consistente.

(b) $l(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i) = \ldots = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i - 2n\ln(\theta) - \frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

(c) O valor de θ que maximiza $l(\theta)$ é a solução da equação $l'(\theta) = 0$. Resolvendo a equação obtemos o estimador de máxima verosimilhança do parâmetro θ é $\hat{\theta}^{MV} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{2n}}$.

(d) Temos $\bar{x} = 1.34$, $s = 0.67$ e $\hat{cv} = 0.5$. Se usarmos, por exemplo o estimador dos momentos, obtemos $\hat{\theta} = \bar{x}\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 1.069$

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA E

7 de junho de 2017
3º teste – Solução

Versão A

1.					
(a)	A	B	**C**	D	
(b)	A	**B**	C	D	E
(c)	A	**B**	C	D	E
(d)	A	B	C	**D**	E
(e)	V	**F**			

2.					
(a)	A	B	C	**D**	E
(b)	A	B	C	D	**E**
(c)	A	**B**	C	D	E
(d)	A	**B**	C	D	E
(e)	A	**B**	C	D	E
(f)	**V**	F			

Versão B

1.					
(a)	A	**B**	C	D	
(b)	A	B	**C**	D	E
(c)	**A**	B	C	D	E
(d)	A	**B**	C	D	E
(e)	**V**	F			

2.					
(a)	A	**B**	C	D	E
(b)	A	B	C	D	**E**
(c)	A	B	**C**	D	E
(d)	A	B	**C**	D	E
(e)	**A**	B	C	D	E
(e)	**V**	F			

3. (a) $\hat{\beta}_1 = 3.2 \qquad \hat{\beta}_0 = 32.7 \qquad \hat{\sigma}^2 = 5.27$

(b) Pretende-se testar H_0: $\beta_1 \leq 0$ vs. H_1: $\beta_1 > 0$, ao nível de significância $\alpha = 0.1$.
A estatística de teste é

$$T = \frac{\hat{\beta}_1 - 0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 / S_{xx}}} \sim t_6.$$

A região crítica do teste é $]t_{6;0.1}, \infty[=]1.44; \infty[$.
O valor observado da estatística de teste, calculado com base na amostra, é $t_{obs} = 4.409$. Este valor pertence à região crítica. Logo, existe evidência estatística para rejeitarmos H_0, ao nível de significância $\alpha = 0.1$.

(c) Vamos usar a variável pivot $X^2 = \frac{(n-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-2}$, para deduzir o intervalo de 95% de confiança para σ^2. Sejam a_1 e a_2, tais que $a_1 < a_2$ e $P(a_1 \leq X^2 \leq a_2) = 0.95$. Vamos escolher a_1 e a_2, tais que

$$P(X^2 < a_1) = 0.025 \qquad \text{e} \qquad P(X^2 > a_2) = 0.025.$$

Temos $a_1 = 1.24$, $a_2 = 14.4$ e

$$P(1.24 \leq X^2 \leq 14.4) = 0.95 \Leftrightarrow P\left(\frac{6\hat{\sigma}^2}{14.4} \leq \sigma^2 \leq \frac{6\hat{\sigma}^2}{1.24}\right) = 0.95$$

Assim, o intervalo de 95% de confiança para σ^2 é dado por $IC_{95\%}(\sigma^2) = \left[\frac{6\hat{\sigma}^2}{14.4}; \frac{6\hat{\sigma}^2}{1.24}\right]$.
Com base na amostra deste exercício, obtemos $IC_{95\%}(\sigma^2) = [2.19, 25.48]$

(d) $R^2 = 0.7642$