Caderno: ____________

PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA E

Ano Letivo 2017/18

Teste 2 A 23 maio 2018

Duração: 2h00m

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Nome completo: ______________________________

N.º aluno: ____________ Curso: ______________________

Nas alíneas das perguntas 1 a 5 apenas uma das respostas está correta. Determine-a e assinale-a com uma cruz no quadrado correspondente. Uma resposta incorreta desconta 0.3, 0.2 ou 0.1 valores consoante a pergunta ou alínea vale 1.5, 1.0 ou 0.5 valores, respetivamente. Uma não resposta nada vale nem desconta. As perguntas 6 e 7 deverão ser resolvidas em folhas separadas do caderno.

(1.5) 1. Considere a função de distribuição $F(x) = 1 - e^{-3x}$, $x \geq 0$, da variável aleatória X. Seja $u = 0.4427$ um número pseudo-aleatório da distribuição $U(0,1)$. Usando o método da Transformação Inversa, o número gerado da variável aleatória X é:

A 0.7350 B 0.5701 C 0.1949 D 1.7540

2. Seja $X_1, X_2, \ldots$, uma sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com valor médio μ e variância $\sigma^2 \neq 0$, finitos. Considere a variável aleatória $\overline{X}_{50} = \dfrac{\sum_{i=1}^{50} X_i}{50}$.

(a) Indique, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(0.5) i. V F $E(\mu) = \overline{X}_{50}$

(0.5) ii. V F $\dfrac{\overline{X}_{50} - \mu}{\sigma/\sqrt{50}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$

(1.0) (b) Considerando $\mu = \sigma^2 = 10$, a probabilidade aproximada de $\overline{X}_{50}$ ser superior a 11 é:

A 0.0125 B 0.3745 C 0.9875 D 0.6255

(1.0) 3. O número de acessos a um servidor, por minuto é uma variável aleatória com distribuição Poisson de parâmetro $\lambda = 10$. O valor aproximado da probabilidade de ocorrerem pelo menos 15 acessos num minuto é:

A 0.0347 B 0.1038 C 0.0571 D 0.0287

4. Seja X uma população com distribuição Binomial de parâmetros $(4, p)$ e uma amostra aleatória $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ desta população. Considere os seguintes estimadores para p:

$$\widehat{p}_1 = \frac{\overline{X}}{4} \quad \text{e} \quad \widehat{p}_2 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{12}$$

(1.0) (a) V F O estimador de momentos para p é $\widehat{p}_1$

(1.0) (b) V F O estimador $\widehat{p}_1$ é centrado para p e $\widehat{p}_2$ não é centrado para p.

(1.0) (c) V F $\widehat{p}_1$ é um estimador consistente e $\widehat{p}_2$ não é um estimador consistente.

(1.0) (d) V F $\widehat{p}_1$ é mais eficiente do que $\widehat{p}_2$ se e só se $n > 3$.

(1.0) (e) Procedeu-se à recolha de uma amostra de dimensão 6, nas condições do enunciado, tendo-se obtido os valores $(2, 1, 0, 1, 0, 2)$. Se se adotar $\widehat{p}_1$ como estimador, a estimativa pontual para p será:

A 1 B $\frac{1}{4}$ C $\frac{\overline{X}}{4}$ D $\frac{1}{24}$

(V.S.F.F.)

5. Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de uma população Normal de média μ e variância σ^2 desconhecidas.

(0.5) (a) V F A distribuição por amostragem de $\overline{X}$ é aproximadamente $N(\mu, \sigma^2/n)$.

(0.5) (b) V F $\overline{X}$ é uma variável pivot utilizada para determinar o intervalo de confiança para μ.

Selecionou-se desta população uma amostra aleatória de dimensão $n = 12$, para a qual se observou uma média e variância amostrais de 17.083 e 105.356, respetivamente.

(1.5) (c) O intervalo de confiança a 90% para a variância populacional é:

A $[11.75, 22.42]$ B $[12.22, 21.94]$ C $[58.83, 253.59]$ D $[55.19, 221.59]$

(d) Pretende-se testar se o valor médio populacional, μ, difere de 15.

(0.5) i. V F A estatística de teste adequada é $T = \dfrac{\overline{X} - 15}{S/\sqrt{n}} \underset{sob\ H_0}{\sim} t_{(n-1)}$.

(0.5) ii. V F A região de rejeição deste teste é um intervalo da forma $]a, +\infty[$, em que a é um valor a determinar a partir da função distribuição da estatística de teste.

(1.0) iii. V F Não se rejeita a hipótese nula a um nível de significância de 10%.

(1.5) (e) Admitindo que $\sigma = 10$ e se pretendermos obter um intervalo com 95% de confiança para a média populacional com uma amplitude inferior a 0.1, a dimensão n da amostra deverá satisfazer:

A $n \geq 20$ B $n < 20$ C $n \geq 153663$ D $n > 153664$

[Responda nas folhas do caderno]

6. Numa estação de serviço, no registo do abastecimento de gasolina (em litros) de 40 clientes, escolhidos aleatoriamente, verificou-se que:

$$\sum_{i=1}^{40} x_i = 1368 \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{40} x_i^2 = 49224$$

.

(0.6) (a) Indique uma estimativa pontual centrada para o valor médio populacional e para a variância populacional.

(2.4) (b) Teste, ao nível de significancia de 4%, a hipótese do abastecimento médio de gasolina ser superior a 30 litros.

[Mude de folha]

(1.5) 7. Seja θ^* um estimador de um parâmetro populacional θ. Para uma amostra aleatória de dimensão $n \geq 30$, $Z = \sqrt{12n}\dfrac{\theta^* - \theta}{\theta} \overset{a}{\sim} N(0,1)$ é uma variável pivot para θ. Usando esta variável pivot para θ, deduza o intervalo de 99% de confiança para o parâmetro θ, indicando todos os passos e o método usado.

PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA E

Ano Letivo 2017/18

Teste 2 B 23 maio 2018

Duração: 2h00m

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Nome completo: ____

N.º aluno: ____________ Curso: ______________________________

Nas alíneas das perguntas 1 a 5 apenas uma das respostas está correta. Determine-a e assinale-a com uma <u>cruz</u> no quadrado correspondente. Uma resposta incorreta desconta 0.3, 0.2 ou 0.1 valores consoante a pergunta ou alínea vale 1.5, 1.0 ou 0.5 valores, respetivamente. Uma não resposta nada vale nem desconta. As perguntas 6 e 7 deverão ser resolvidas em folhas separadas do caderno.

(1.5) 1. Considere a função de distribuição $F(x) = 1 - e^{-3x}$, $x \geq 0$, da variável aleatória X. Seja $u = 0.4247$ um número pseudo-aleatório da distribuição $U(0,1)$. Usando o método da Transformação Inversa, o número gerado da variável aleatória X é:

A 1.6586 B 0.1843 C 0.6029 D 0.7203

2. Seja $X_1, X_2, \ldots$, uma sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com valor médio μ e variância $\sigma^2 \neq 0$, finitos. Considere a variável aleatória $\overline{X}_{50} = \frac{\sum_{i=1}^{50} X_i}{50}$.

(a) Indique, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(0.5) i. V F $\frac{\overline{X}_{50} - \mu}{\sigma/\sqrt{50}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$

(0.5) ii. V F $E(\mu) = \overline{X}_{50}$

(1.0) (b) Considerando $\mu = \sigma^2 = 10$, a probabilidade aproximada de $\overline{X}_{50}$ ser inferior a 11 é:

A 0.0125 B 0.3745 C 0.9875 D 0.6255

(1.0) 3. O número de acessos a um servidor, por minuto é uma variável aleatória com distribuição Poisson de parâmetro $\lambda = 10$. O valor aproximado da probabilidade de ocorrerem pelo menos 16 acessos num minuto é:

A 0.0347 B 0.1038 C 0.0571 D 0.0287

4. Seja X uma população com distribuição Binomial de parâmetros $(4, p)$ e uma amostra aleatória $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ desta população. Considere os seguintes estimadores para p:

$$\widehat{p}_1 = \frac{\overline{X}}{4} \qquad \text{e} \qquad \widehat{p}_2 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{12}$$

(1.0) (a) V F O estimador de momentos para p é $4\widehat{p}_1$

(1.0) (b) V F O estimador $\widehat{p}_1$ é centrado para p e $\widehat{p}_2$ também é centrado para p.

(1.0) (c) V F $\widehat{p}_1$ não é um estimador consistente e $\widehat{p}_2$ é um estimador consistente.

(1.0) (d) V F $\widehat{p}_1$ é mais eficiente do que $\widehat{p}_2$ se e só se $n > 3$.

(1.0) (e) Procedeu-se à recolha de uma amostra de dimensão 6, nas condições do enunciado, tendo-se obtido os valores $(2, 1, 0, 1, 0, 2)$. Se se adotar $\widehat{p}_1$ como estimador, a estimativa pontual para p será:

A $\frac{\overline{X}}{4}$ B 1 C $\frac{1}{24}$ D $\frac{1}{4}$

(V.S.F.F.)

5. Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de uma população Normal de média μ e variância σ^2 desconhecidas.

(0.5) (a) V F A distribuição por amostragem de $\overline{X}$ é $N(\mu, \sigma^2/n)$.

(0.5) (b) V F $\overline{X}$ é uma variável pivot utilizada para determinar o intervalo de confiança para μ.

Selecionou-se desta população uma amostra aleatória de dimensão $n = 12$, para a qual se observou uma média e variância amostrais de 17.083 e 105.356, respetivamente.

(1.5) (c) O intervalo de confiança a 90% para a variância populacional é:

A $[11.75, 22.42]$ B $[58.83, 253.59]$ C $[55.19, 221.59]$ D $[12.22, 21.94]$

(d) Pretende-se testar se o valor médio populacional, μ, é superior a 15.

(0.5) i. V F A estatística de teste adequada é $T = \dfrac{\overline{X} - 15}{S/\sqrt{n}} \underset{sob\ H_0}{\sim} t_{(n-1)}$.

(0.5) ii. V F A região de rejeição deste teste é um intervalo da forma $]a, +\infty[$, em que a é um valor a determinar a partir da função distribuição da estatística de teste.

(1.0) iii. V F Rejeita-se a hipótese nula a um nível de significância de 10%.

(1.5) (e) Admitindo que $\sigma = 10$ e se pretendermos obter um intervalo com 95% de confiança para a média populacional com uma amplitude inferior a 0.2, a dimensão n da amostra deverá satisfazer:

A $n \geq 15$ B $n < 15$ C $n > 38416$ D $n \geq 38415$

[Responda nas folhas do caderno]

6. Numa estação de serviço, no registo do abastecimento de gasolina (em litros) de 40 clientes, escolhidos aleatoriamente, verificou-se que:

$$\sum_{i=1}^{40} x_i = 1368 \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{40} x_i^2 = 49224$$

.

(0.6) (a) Indique uma estimativa pontual centrada para o valor médio populacional e para a variância populacional.

(2.4) (b) Teste, ao nível de significancia de 4%, a hipótese do abastecimento médio de gasolina ser superior a 30 litros.

[Mude de folha]

(1.5) 7. Seja θ^* um estimador de um parâmetro populacional θ. Para uma amostra aleatória de dimensão $n \geq 30$, $Z = \sqrt{12n}\dfrac{\theta^* - \theta}{\theta} \overset{a}{\sim} N(0,1)$ é uma variável pivot para θ. Usando esta variável pivot para θ, deduza o intervalo de 99% de confiança para o parâmetro θ, indicando todos os passos e o método usado.