Nome completo: _____

N.º aluno: _____ Curso: _____ Nota: _____

Em cada pergunta apenas uma das respostas está correcta. Assinale a sua resposta com uma cruz no quadrado correspondente. Se pretender anular uma resposta já assinalada, rasure por completo o respectivo quadrado. A cotação para uma resposta correcta e o desconto por uma resposta incorrecta assinala-se à esquerda da pergunta. Uma não resposta nada vale nem desconta. n.a. significa "nenhuma das anteriores".

1. Considere o universo de pizzas solicitadas em três pizzarias A, B e C. As percentagens de solicitações por pizzaria são 30%, 50% e 20% para A, B e C, respectivamente. Sendo X o tempo de preparação (em minutos) de uma pizza, sabe-se que $P(X < 1 | A) = 0.2$, $P(X < 1 | B) = 0.36$ e $P(X < 1 | C) = p$.
- (1.0/0.2) (a) Se uma pizza solicitada numa qualquer pizzaria, é preparada em menos de 1 minuto com probabilidade 0.28, então p tem valor:
- A 0.2 B 0.44 C 0.1 D n.a.
- (1.0/0.1) (b) Uma pizza solicitada numa qualquer pizzaria, é preparada em menos de 1 minuto com probabilidade 0.25. A probabilidade de ser solicitada na pizzaria A é:
- A 0.42 B 0.8 C 0.24 D n.a.
2. Considere duas pizzarias A e B. O tempo de preparação (em minutos) de qualquer pizza solicitada, é uma v.a. absolutamente contínua com as seguintes características:
- Na pizzaria A, o tempo de preparação é uma v.a. X_A com função densidade de probabilidade:

$$f_{X_A}(x) = \begin{cases} b - 0.08x, & x \in [a, 5] \\ 0, & x \notin [a, 5] \end{cases} \quad a \in]-\infty, 5[, \quad b \in \mathbb{R}$$
 - Na pizzaria B, o tempo de preparação é uma v.a. X_B com distribuição $N(2.5, 4)$.
- (0.5/0.1) (a) Se $a = 1$, a função $f_{X_A}(x)$ é realmente uma função densidade de probabilidade, se e só se,
- A $b = 0.4$ B $b = 0.64$ C $b = 0.49$ D n.a.
- (1.0/0.2) (b) Se $a = 0$ e $b = 0.4$, o valor da função distribuição de X_A no ponto 2.5 é:
- A 0.25 B 0.75 C 0.5 D n.a.
- (1.0/0.3) (c) Na pizzaria B, a probabilidade de uma pizza ter um tempo de preparação entre 2 e 2.5 minutos é:
- A 0.5987 B 0.0987 C 0.9013 D n.a.
- (1.0/0.3) (d) Na pizzaria B, o lucro com a venda de uma pizza é $L = 15 - 4X_B$. Se $P(L \leq l) = 0.33$ então l tem valor:
- A 1.48 m B 3.24 m C 8.52 m D n.a.

- (0.5/0.1) 3. (a) Numa pizzaria A, sabe-se que, numa remessa de 20 de pizzas, 5 têm um adicional de extra queijo. Se forem seleccionadas ao acaso e sem reposição, 3 pizzas desta remessa, a probabilidade de uma ter um adicional de extra queijo é:

A $\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{\binom{5}{3}}$
 B $\binom{3}{1}\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^2$
 C $\frac{\binom{5}{1}\binom{15}{2}}{\binom{20}{3}}$
 D n.a.

- (b) Numa pizzaria B, sabe-se que independentemente do pedido de uma qualquer pizza, a probabilidade de ser solicitado um adicional de extra queijo é $p = 0.05$.

- (1.0/0.3) i. Considere uma amostra aleatória de 10 pedidos seleccionados com reposição. A probabilidade de nela figurarem mais de 2 pedidos com um adicional de extra queijo é (valor arredondado a 4 casas decimais):

A 0.0115
 B 0.6102
 C 0.0144
 D n.a.

- (1.0/0.2) ii. Quantos pedidos de pizzas serão feitos até que o primeiro em que é solicitado um adicional de extra queijo, ocorra com probabilidade 0.04286875?

A 3
 B 63
 C 4
 D n.a.

- (c) Numa pizzaria C, o número de pizzas vendidas comporta-se-se de acordo com um Processo de Poisson. Sabe-se que o tempo (em minutos) que medeia cada venda consecutiva de pizzas, tem distribuição Exponencial de parâmetros (0, 5).

- (0.5/0.2) i. Podemos dizer que o número de pizzas vendidas durante 2 minutos tem distribuição

A $P(10)$
 B $B(2, 0.2)$
 C $P(0.4)$
 D n.a.

- (1.0/0.2) ii. Num período de 40 minutos de vendas, a probabilidade de nos primeiros 10 e nos últimos 20 minutos serem vendidas, respectivamente, 1 e 3 pizzas tem valor:

A $e^{-150} \frac{25000000}{3}$
 B $e^{-6} \frac{64}{3}$
 C $e^{-8} \frac{2048}{3}$
 D n.a.

- (1.0/0.3) 4. Considere X uma v.a. discreta com função distribuição

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.2, & -1 \leq x < 0 \\ 0.5, & 0 \leq x < 2 \\ 0.8, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

Para a seguinte sequência $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ de NPA's Uniformes no intervalo $]0, 1[$,

i	1	2	3	4	5
u_i	0.40	0.78	0.17	0.82	0.66

a correspondente sequência (x_1, x_2, x_3, x_4) de observações pseudo-aleatórias da v.a. X é:

A $\frac{i}{x_i} \begin{array}{c|ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{array}$
 B $\frac{i}{x_i} \begin{array}{c|ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 0 & 2 & -1 & 3 & 2 \end{array}$
 C $\frac{i}{x_i} \begin{array}{c|ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline -1 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{array}$
 D n.a.

Continua no verso

5. Admita que $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $n \geq 2$, é uma amostra aleatória de uma população X cuja distribuição depende do valor de dois parâmetros, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\theta \in \mathbb{R}^+$. Sabemos que $E(X) = \lambda + 2\theta$ e $V(X) = 4\theta$.

Considere ainda as estatísticas: $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ e $M_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

- (1.0/0.2) (a) Os estimadores dos momentos para os parâmetro λ e θ , respectivamente λ^* e θ^* , são:

[A] $\lambda^* = \bar{X} - \frac{M_2}{2}$, $\theta^* = \frac{M_2}{4}$ [B] $\lambda^* = \bar{X} - \frac{M_2}{2}$, $\theta^* = S^2$ [C] $\lambda^* = \bar{X}$, $\theta^* = M_2$ [D] n.a.

- (1.0/0.3) (b) A estatística $\hat{\theta} = a M_2$, $a \in \mathbb{R}^+$, é centrada para o parâmetro θ se e só se:

[A] $a = 1$ [B] $a = \frac{1}{4n}$ [C] $a = \frac{n}{4(n-1)}$ [D] n.a.

6. A distância percorrida por um avião, desde o contacto com o solo até à imobilização total, é uma variável aleatória X (valores em 10^3 metros) com distribuição normal de valor esperado μ e variância σ^2 . Seja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $n \geq 2$, uma amostra aleatória da população X e uma sua concretização que apresenta uma média e um desvio padrão de, respectivamente, $\bar{x} = 1.75$ e $s = 0.12$.

Pretendemos uma estimação intervalar de μ com um nível de 90% de confiança.

- (1.0/0.3) (a) Se $\sigma^2 = 0.01$ e $n = 50$, a variável pivot recomendável e a respectiva distribuição são:

[A] $50 \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sim t_{49}$ [B] $\sqrt{50} \frac{\bar{X} - \mu}{0.1} \sim N(0, 1)$ [C] $\sqrt{50} \frac{\bar{X} - \mu}{0.1} \overset{a}{\sim} N(0, 1)$ [D] n.a.

- (1.0/0.3) (b) Considere a variável pivot e a sua distribuição: $\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{S} \sim t_{n-1}$.

Para uma amostra com 16 observações, a estimativa intervalar para μ é:

[A] [1.6975, 1.8025] [B] [1.7005, 1.7995] [C] [1.7437, 1.7563] [D] n.a.

7. Para uma maior segurança dos condutores de veículos motorizados de duas rodas, os capacetes de protecção devem resistir a danos do tipo A, com uma probabilidade, p , superior ou igual a 80%. Foram testados 225 capacetes de protecção aleatoriamente escolhidos e 171 deles resistiram a danos de tipo A.

- (1.0/0.3) (a) A hipóteses que conduzem a um teste estatístico à qualidade das condições de resistência dos capacetes de protecção são:

[A] $H_0 : p \geq 0.76$ vs $H_1 : p < 0.76$ [B] $H_0 : p = 0.8$ vs $H_1 : p \neq 0.8$

[C] $H_0 : p \geq 0.8$ vs $H_1 : p < 0.8$ [D] $H_0 : p < 0.8$ vs $H_1 : p \geq 0.8$

- (b) No teste das hipóteses $H_0 : p \leq 0.8$ vs $H_1 : p > 0.8$

- (1.0/0.2) i. Para um nível 0.01 de significância, devemos rejeitar H_0 se o valor observado da estatística de teste pertencer ao intervalo:

[A]]2.33, +∞[[B]]-∞, -2.33[[C]]2.58, +∞[[D] n.a.

- (1.0/0.2) ii. [V] [F] Se rejeitarmos a hipótese H_0 ao nível de 5% de significância, então também rejeitamos H_0 para um nível de significância $\alpha < 5\%$.

- (1.0/0.2) (c) O p -value associado ao teste das hipóteses $H_0 : p \geq 0.8$ vs $H_1 : p < 0.8$ tem valor aproximado:

[A] $2 - 2\Phi(-1.5)$ [B] $\Phi(-1.40)$ [C] $1 - \Phi(1.5)$ [D] n.a.

- (1.5/0.5) 8. Admita que $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, $n \geq 2$, é uma amostra aleatória de uma população X caracterizada por um parâmetro θ de valor desconhecido. $\frac{2}{\theta} \sum_{i=1}^n X_i$ é uma variável pivotal para θ com distribuição do qui-quadrado com $2n$ graus de liberdade. Para $n = 9$, o intervalo de 90% de confiança para θ é:

[A] $\left] -\infty, \frac{2 \sum_{i=1}^9 X_i}{28.9} \right]$ [B] $\left[\frac{2 \sum_{i=1}^9 X_i}{28.9}, \frac{2 \sum_{i=1}^9 X_i}{9.39} \right]$ [C] $\left[\frac{2 \sum_{i=1}^9 X_i}{28.9}, +\infty \right[$ [D] n.a.