FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Probabilidades e Estatística E
Ano Lectivo 2018/19
Recurso - 21 de Junho de 2019

Grelha de respostas certas

Grupo	1		2				3					4	5		6		7				8
	a)	b)	a)	b)	c)	d)	a)	b) i.	b) ii.	c) i.	c) ii.		a)	b)	a)	b)	a)	b) i.	b) ii.	c)	
Versão A	A	C	C	B	B	A	C	A	C	C	B	B	A	C	B	A	C	A	F	C	B
Versão B	C	A	A	C	A	B	B	A	B	A	C	A	C	B	A	B	B	C	F	B	A

Resolução abreviada do Exame de Recurso

1. $P(A) = 0.3 \qquad P(B) = 0.5 \qquad P(C) = 0.2$
   $P(X < 1 | A) = 0.2 \qquad P(X < 1 | B) = 0.36 \qquad P(X < 1 | C) = p$

   (a) $P(X < 1) = 0.28 \Leftrightarrow P(X < 1 | A) P(A) + P(X < 1 | B) P(B) + P(X < 1 | C) P(C) = 0.28 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow 0.24 + 0.2p = 0.28 \Leftrightarrow p = 0.2$

   (b) $P(A | X < 1) = \dfrac{P(X < 1 \cap A)}{P(X < 1)} = \dfrac{P(X < 1 | A) P(A)}{0.25} = 0.24$

2. (a)
   - $f(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow b - 0.4 \geq 0, \ \forall x \in [1, 5] \Rightarrow b \geq 0.4, \ \forall x \in [1, 5]$
   - $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1 \Leftrightarrow \int_1^5 (b - 0.08x)\, dx = 1 \Leftrightarrow 4b - \left[0.04\, x^2\right]_1^5 = 1 \Leftrightarrow 4b - 0.96 = 1 \Leftrightarrow b = 0.49$

   (b) $F_{X_A}(2.5) = P(X_A \leq 2.5) = \int_0^{2.5} (0.4 - 0.08x)\, dx = 1 - \left[0.04\, x^2\right]_0^{2.5} = 1 - 0.25 = 0.75$

   (c) $P(2 \leq X_B \leq 2.5) = P\left(\dfrac{2 - 2.5}{2} \leq \dfrac{X_B - 2.5}{2} \leq \dfrac{2.5 - 2.5}{2}\right) = P(-0.25 \leq Z \leq 0) =$
   $= P(Z \leq 0) - P(Z \leq -0.25) = 0.5 - 1 + P(Z \leq 0.25) = -0.5 + 0.5987 = 0.0987$

   (d) $L \sim N(15 - 4 \times 2.5, 16 \times 4) \equiv N(5, 64)$

   $P(L \leq l) = 0.33 \Leftrightarrow P\left(\frac{L-5}{8} \leq \frac{l-5}{8}\right) = 0.33 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{l-5}{8}\right) = 0.33 \Leftrightarrow P\left(Z \leq -\frac{l-5}{8}\right) = 0.67 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow -\frac{l-5}{8} = \Phi^{-1}(0.67) \Leftrightarrow -\frac{l-5}{8} = 0.44 \Leftrightarrow l = 5 - 8 \times 0.44 = 1.48$

   Resolução alternativa:

   $P(L \leq l) = 0.33 \Leftrightarrow P(15 - 4X_B \leq l) = 0.33 \Leftrightarrow P\left(X_B \geq \frac{15-l}{4}\right) = 0.33 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow P\left(\dfrac{X_B - 2.5}{2} \leq \dfrac{\frac{15-l}{4} - 2.5}{2}\right) = 0.67 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{5-l}{8}\right) = 0.67 \Leftrightarrow \frac{5-l}{8} = \Phi^{-1}(0.67) \Leftrightarrow \frac{5-l}{8} = 0.44 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow l = 5 - 8 \times 0.44 = 1.48$

3. (a) Seja X- nº pizzas com extra queijo, de entre 20. $X \sim H(20, 5, 3)$
   $P(X = 1) = \dfrac{\binom{5}{1}\binom{15}{2}}{\binom{20}{3}}$

   (b)
   i. Seja Y- n.º de pizzas com extra queijo, de entre 10. $Y \sim B(10, 0.05)$

   $$P(Y > 2) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \binom{10}{k} 0.05^k (1 - 0.05)^{10-k} = 0.011503557$$

   ii. Seja W - n.º pizzas feitas até à primeira com extra queijo. $W \sim G(0.05)$

   $$P(W = w) = 0.04286875 \Leftrightarrow 0.05 (1 - 0.05)^{w-1} = 0.04286875 \Leftrightarrow w = 4$$

   (c) Seja $N(t)$- n.º pizzas vendidas em t minutos.

   i. $N(t) \sim P(0.2\, t)$, porque a v.a. T- n.º de minutos decorridos entre vendas consecutivas tem distribuição $E(0, 5)$.

   $N(2) \sim P(0.2 \times 2) \equiv P(0.4)$

   ii. Seja U- n.º de vendas nos primeiros 10 minutos. $U \sim P(2)$
   Seja V- n.º de vendas nos últimos 20 minutos. $V \sim P(4)$. U e V são v.a.'s independentes.

   $$P(U = 1 \cap V = 3) = P(U = 1) P(V = 3) = e^{-2} 2 \times e^{-4} \frac{4^3}{3!} = e^{-6} \frac{64}{3}$$

4. A inversa da função F_X é

$$\overleftarrow{F}_X(u) = \begin{cases} -1, & 0 < u \leq 0.2 \\ 0, & 0.2 < u \leq 0.5 \\ 2, & 0.5 < u \leq 0.8 \\ 3, & u > 0.8 \end{cases}$$

i	1	2	3	4	5
u_i	0.40	0.78	0.17	0.82	0.66
x_i	0	2	-1	3	2

5. (a) $\begin{cases} E(X) = \bar{X} \\ V(X) = M_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + 2\theta = \bar{X} \\ 4\theta = M_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \bar{X} - \frac{M_2}{2} \\ \theta = \frac{M_2}{4} \end{cases}$

   $\lambda^* = \bar{X} - \frac{M_2}{2} \quad \theta^* = \frac{M_2}{4}$

   (b) $E(aM_2) = \theta \Leftrightarrow aE\left(\frac{n}{n-1}S^2\right) = \theta \Leftrightarrow a\frac{n}{n-1}V(X) = \theta \Leftrightarrow 4a\frac{n}{n-1}\theta = \theta \Leftrightarrow a = \frac{n}{4(n-1)}$

6. (a) $\sqrt{50}\frac{\bar{X} - \mu}{0.1} \sim N(0,1)$

   (b)
   - $T = 4\frac{\bar{X} - \mu}{S} \sim t_{15}$
   - Para $1 - \alpha = 0.9$, $t_{15:0.05} = 1.75$
   - $-1.75 \leq 4\frac{\bar{X} - \mu}{S} \leq 1.75 \Leftrightarrow \bar{X} - 1.75\frac{S}{4} \leq \mu \leq \bar{X} + 1.75\frac{S}{4}$
   - $IC_{90\%}(\mu) = \left[\bar{X} - 1.75\frac{S}{4}\, ,\, \bar{X} + 1.75\frac{S}{4}\right]$
   - $IC_{90\%}(\mu) = \left[1.75 - 1.75\frac{0.12}{4}\, ,\, 1.75 + 1.75\frac{0.12}{4}\right] = [1.6975\, ,\, 1.8025]$

7. (a) $H_0 :\ p \geq 0.8\ \ vs\ \ p < 0.8$

   (b) i.
   - $W = \sqrt{225}\frac{\hat{P} - 0.8}{\sqrt{0.8(1-0.8)}} \equiv 37.5\left(\hat{P} - 0.8\right) \underset{p=0.8}{\overset{a}{\sim}} N(0,1)$
   - $P(W > a) = 0.01 \Rightarrow a \approx z_{0.01} = 2.33$
   - $R_{0.01} \approx]2.33\, ,\, +\infty[$

   ii. Para um nível de significância $\alpha < 0.05$, $R_\alpha \subset R_{0.05}$. Se rejeitamos H_0 ao nível de 5% de significância, $w_{obs} \in R_{0.05}$. Isto não assegura que $w_{obs} \in R_\alpha$. Resposta: Falso

   (c)
   - $W = \sqrt{225}\frac{\hat{P} - 0.8}{\sqrt{0.8(1-0.8)}} \equiv 37.5\left(\hat{P} - 0.8\right) \underset{p=0.8}{\overset{a}{\sim}} N(0,1)$
   - $w_{obs} = 37.5\left(\frac{171}{225} - 0.8\right) = -1.5$
   - $R_{obs} =]-\infty\, ,\, w_{obs}[=]-\infty\, ,\, -1.5[$
   - $p - value = P(W < w_{obs}) \approx P(Z < -1.5) = 1 - P(Z < 1.5) = 1 - \Phi(1.5)$

8.
   - $X^2 = \frac{2}{\theta}\sum_{i=1}^{9} X_i \sim \chi^2_{18}$
   - $P\left(a \leq X^2 \leq b\right) = 0.9$, sujeita a $P\left(X^2 < a\right) = P\left(X^2 > b\right) = 0.05$, conduz a:

     $a = \chi^2_{18:0.95} = 9.39 \quad$ e $\quad b = \chi^2_{18:0.05} = 28.9$
   - $9.38 \leq \frac{2}{\theta}\sum_{i=1}^{9} X_i \leq 28.9 \Leftrightarrow \left[\frac{2\sum_{i=1}^{9} X_i}{28.9}\, ,\, \frac{2\sum_{i=1}^{9} X_i}{9.39}\right]$
   - $IC_{90\%}(\theta) \equiv \left[\frac{2\sum_{i=1}^{9} X_i}{28.9}\, ,\, \frac{2\sum_{i=1}^{9} X_i}{9.39}\right]$