Grelha de respostas certas

Versão A

Grupo	1	2			3					4					
		a)	b)	c)	a)	b)	c)	d)	e)	a)	b) i.	b) ii.	b) iii.	b) iv.	b) v.
	B	A	C	C	B	C	C	A	B	C	F	D	B	C	V

Versão B

Grupo	1	2			3					4					
		a)	b)	c)	a)	b)	c)	d)	e)	a)	b) i.	b) ii.	b) iii.	b) iv.	b) v.
	C	B	A	B	A	B	A	C	A	A	V	C	D	B	V

Resolução abreviada do 1º Teste Versão A

1.
- $P(B-A)=0.15 \Leftrightarrow P(B)-P(A\cap B)=0.15 \Leftrightarrow P(B)=0.15+0.15=0.3$
- $P(A\cup B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-2\,P(A\cap B)=0.2$
- $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)=1-0.35=0.65,$
  porque $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.35$
- A e B não são acontecimentos independentes porque, se o fossem:
  $P(A\cap B)=P(A)\,P(B)=0.2P(B)\Leftrightarrow 0.2P(B)=0.15$
  $P(B-A)=P\left(\overline{A}\cap B\right)=0.8P(B)\Leftrightarrow 0.8P(B)=0.15$
  Como não é válida a veracidade simultânea desta duas condições, os acontecimentos A e B não são independentes.

2. $P(MU)=0.3 \qquad P(U)=0.2 \qquad P(PU)=1-P(MU)-P(U)=0.5$
   $P(F\,|MU)=0.3 \qquad P(F\,|U)=0.1 \qquad P\left(\overline{F}\,|PU\right)=0.98$

   (a) $P(F\,|PU)=1-P\left(\overline{F}\,|PU\right)=1-0.98=0.02$
   (b) $P(F)=P(F\cap MU)+P(F\cap U)+P(F\cap PU)=$
   $=P(F\,|MU)\,P(MU)+P(F\,|U)\,P(U)+P(F\,|PU)\,P(PU)=0.12$
   (c) $P(MU\,|F)=\dfrac{P(F\cap MU)}{P(F)}=\dfrac{P(F\,|MU)\,P(MU)}{P(F)}=0.75$

3. (a) Seja X- nº canecas sem defeito numa amostra de 6 canecas. $X\sim B(6,0.9)$
   $$P(X\geq 5)=\sum_{k=5}^{6}\binom{6}{k}0.9^k0.1^{6-k}=0.885735$$
   (b) Numa população de $N=30$ caixas, das quais $M=19$ têm canecas defeituosas, retira-se ao acaso e sem reposição, uma amostra de $n=10$ caixas. A v.a. Y-n.º de caixas com canecas defeituosas, na amostra, tem distribuição $H(30,19,10)$.
   (c) Seja W - n.º interrupções em duas semanas $\qquad X\sim P\left(4\times\frac{1}{2}\right)\equiv P(2)$
   $$P(X\leq 1)=\sum_{k=0}^{1}e^{-2}\frac{2^k}{k!}=3e^{-2}$$
   (d) Seja U o total de canecas defeituosas numa amostra de $6\times 6=36$ copos $\qquad Y\sim B(36,0.1)$
   Dado que $n=36\geq 30$ e $np=3.6\leq 5$, então $U\overset{a}{\sim}P(3.6)$
   $$P(U=5)\approx e^{-3.6}\frac{3.6^5}{5!}\approx 0.13768$$
   (e) Seja V o n.º de canecas a produzir até que se observe a 1ª defeituosa $\qquad V\sim G(0.1)$
   $$P(V=m)=0.0729\Leftrightarrow 0.1\,(0.9)^{m-1}=0.0729\Leftrightarrow (0.9)^{m-1}=0.729\Leftrightarrow m-1=\frac{\ln(0.729)}{\ln(0.8)}\Leftrightarrow m=4$$

4. (a) $$\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{2}P(X=x;Y=y)=1\Leftrightarrow 0.3+p+2r=1\Leftrightarrow p+2r=0.7$$

(b) i. X e Y seriam v.a.'s independentes, se e só se
$P(X=x;Y=y)=P(X=x)\,P(Y=y)\,,\ \forall(x,y)\,,\ \ x=0,1;\ y=0,1,2$
Como, por exemplo,
$P(X=0)=\sum_{y=0}^{2}P(X=0;Y=y)=0.5 \quad P(Y=0)=\sum_{x=0}^{1}P(X=x;Y=0)=0.3$ e
$P(X=0;Y=0)=0.2\neq P(X=0)\,P(Y=0)=0.15$, X e Y não são v.a.'s independentes.

ii. $P(X+Y=2)=P(X=0;Y=2)+P(X=1;Y=1)=r+p=0.5$

iii. $F_X(0.45)=P(X\leq 0.45)=P(X=0)=0.5$

iv. $E\left(X^2Y\right)=\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{2}x^2yP(X=x;Y=y)=\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{2}xyP(X=x;Y=y)=E(XY)=0.5$

$E(Y)=\sum_{y=0}^{2}yP(Y=y)=1 \qquad E(X)=\sum_{x=0}^{1}x\,P(X=x)=0.5$

$E\left(Y^2\right)=\sum_{y=0}^{2}y^2P(Y=y)=1.6 \quad V(Y)=E\left(Y^2\right)-E^2(Y)=1.6-1^2=0.6$

$V\left(\sqrt{5}Y-1\right)=\left(\sqrt{5}\right)^2V(Y)=5\times 0.6=3$

$cov(X,Y)=E(XY)-E(X)\,E(Y)=0.5-0.5\times 1=0$

v. A v.a. $Y-X$ tem suporte $S_{Y-X}=\{-1,0,1,2\}$

Por exemplo, $P(Y-X=1)=P(X=0;Y=1)+P(X=1;Y=2)=0.1+0.1=0.2$

Repetindo o processo de raciocínio e de cálculo para os outros valores do suporte da v.a. $Y-X$, obtemos a função de probabilidade $\quad Y-X\begin{cases}-1 & 0 & 1 & 2\\ 0.1 & 0.5 & 0.2 & 0.2\end{cases}$

Resolução abreviada do 1º Teste Versão B

1.
- $P(A-B)=0.1\Leftrightarrow P(A)-P(A\cap B)=0.1\Leftrightarrow P(A)=0.1+0.1=0.2$
- $P(A\cup B)+2P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)+2P(A\cap B)=$
$=P(A)+P(B)+P(A\cap B)=0.2+0.5+0.1=0.8$
- $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=P\left(\overline{A\cup B}\right)=1-P(A\cup B)=1-0.6=0.4$,
porque $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.6$
- A e B são acontecimentos independentes porque $P(A\cap B)=P(A)\,P(B)$
$P(A\cap B)=0.1 \qquad P(A)\,P(B)=0.2\times 0.5=0.1$

2. $P(MU)=1-P(U)-P(PU)=0.2 \qquad P(U)=0.3 \qquad P(PU)=0.5$
$P(F\,|MU)=0.4 \qquad P\left(\overline{F}\,|U\right)=0.8 \qquad P(F\,|PU)=0.02$

(a) $P(F\,|U)=1-P\left(\overline{F}\,|U\right)=1-0.8=0.2$

(b) $P(F)=P(F\cap MU)+P(F\cap U)+P(F\cap PU)=$
$=P(F\,|MU)\,P(MU)+P(F\,|U)\,P(U)+P(F\,|PU)\,P(PU)=0.15$

(c) $P(PU\,|F)=\dfrac{P(F\cap PU)}{P(F)}=\dfrac{P(F\,|PU)\,P(PU)}{P(F)}=\dfrac{0.01}{0.15}\approx 0.0667$

3. (a) Seja X- nº canecas sem defeito numa amostra de 6 canecas. $X\sim B(6,0.9)$
$P(X\geq 5)=\sum_{k=5}^{6}\binom{6}{k}0.9^k0.1^{6-k}=0.885735$

(b) Numa população de $N=30\times 6=180$ canecas, das quais $M=180\times 0.1=18$ estão defeituosas, retira-se ao acaso e sem reposição, uma amostra de $n=10\times=60$ canecas. A v.a. Y-n.º de canecas defeituosas tem distribuição $H(180,18,60)$.

(c) Seja W - n.º interrupções em duas semanas $\qquad X\sim P\left(4\times\frac{1}{2}\right)\equiv P(2)$
$P(X\leq 1)=\sum_{k=0}^{1}e^{-2}\dfrac{2^k}{k!}=3e^{-2}$

(d) Seja U o total de canecas defeituosas numa amostra de $6\times 6=36$ copos $\qquad Y\sim B(36,0.1)$
Dado que $n=36\geq 30$ e $np=3.6\leq 5$, então $U\overset{a}{\sim}P(3.6)$
$P(U=5)\approx e^{-3.6}\dfrac{3.6^5}{5!}\approx 0.13768$

(e) Seja V o n.º de canecas a produzir até que se observe a 1ª defeituosa $\quad V \sim G(0.1)$

$P(V=m)=0.0729 \Leftrightarrow 0.1\,(0.9)^{m-1}=0.0729 \Leftrightarrow (0.9)^{m-1}=0.729 \Leftrightarrow m-1=\dfrac{\ln(0.729)}{\ln(0.8)} \Leftrightarrow m=4$

4. (a) $\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{2} P(X=x;Y=y)=1 \Leftrightarrow 0.3+2p+r=1 \Leftrightarrow 2p+r=0.7$

(b) i. X e Y seriam v.a.'s independentes, se e só se
$P(X=x;Y=y)=P(X=x)\,P(Y=y)\,,\ \forall (x,y)\,,\ x=0,1;\ y=0,1,2$
Como, por exemplo,

$P(X=0)=\sum_{y=0}^{2} P(X=0;Y=y)=0.5 \quad P(Y=0)=\sum_{x=0}^{1} P(X=x;Y=0)=0.3$ e

$P(X=0;Y=0)=0.2\neq P(X=0)\,P(Y=0)=0.15$, X e Y não são v.a.'s independentes.

ii. $P(X+Y=2)=P(X=0;Y=2)+P(X=1;Y=1)=r+p=0.5$

iii. $F_X(0.36)=P(X\leq 0.36)=P(X=0)=0.5$

iv. $E\left(X^2Y\right)=\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{2} x^2yP(X=x;Y=y)=\sum_{x=0}^{1}\sum_{y=0}^{2} xyP(X=x;Y=y)=E(XY)=0.5$

$E(Y)=\sum_{y=0}^{2} yP(Y=y)=1 \qquad E(X)=\sum_{x=0}^{1} x\,P(X=x)=0.5$

$E\left(Y^2\right)=\sum_{y=0}^{2} y^2P(Y=y)=1.6 \quad V(Y)=E\left(Y^2\right)-E^2(Y)=1.6-1^2=0.6$

$V\left(-15+\sqrt{5}Y\right)=\left(\sqrt{5}\right)^2 V(Y)=5\times 0.6=3$

$cov(X,Y)=E(XY)-E(X)\,E(Y)=0.5-0.5\times 1=0$

v. A v.a. $X-Y$ tem suporte $S_{X-Y}=\{-2,-1,0,1\}$

Por exemplo, $P(X-Y=0)=P(X=0;Y=0)+P(X=1;Y=1)=0.2+0.3=0.5$

Repetindo o processo de raciocínio e de cálculo para os outros valores do suporte da v.a. $X-Y$, obtemos a função de probabilidade $\quad X-Y\begin{cases} -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.5 & 0.1 \end{cases}$