

Grelha de respostas certas

Versão Repetição

Grupo	1	2			3					4					
		a)	b)	c)	a)	b)	c)	d)	e)	a)	b) i.	b) ii.	b) iii.	b) iv.	b) v.
		B	A	A	C	B	C	A	B	A	V	D	C	B	F

Resolução abreviada da Repetição do 1º Teste

- Se $A \cup B = \Omega$, $P(A \cup B) = 1 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1 \Leftrightarrow P(B) = 0.7$
 - $P(A \cup \bar{B}) = 0.6 \Leftrightarrow P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) = 0.6 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow P(A) + 1 - P(B) - P(A) + P(A \cap B) = 0.6 \Leftrightarrow 1 - P(B) + P(A \cap B) = 0.6 \Leftrightarrow P(B) = 0.5$
 - $P(A \cap B) = 0.1 \Leftrightarrow P(A)P(B) = 0.1 \Leftrightarrow P(A)P(B) = 0.1 \Leftrightarrow P(B) = \frac{0.1}{0.4} = 0.25$
- $P(PA) = 0.3 \quad P(A) = 0.2 \quad P(MA) = 1 - P(PA) - P(A) = 0.3$
 $P(C|PA) = 0.1 \quad P(\bar{C}|A) = 0.4 \quad P(C|MA) = 0.85$

(a) $P(C|A) = 1 - P(\bar{C}|A) = 1 - 0.4 = 0.6$

(b) $P(C) = P(C \cap PA) + P(C \cap A) + P(C \cap MA) =$
 $= P(C|PA)P(PA) + P(C|A)P(A) + P(C|MA)P(MA) = 0.625$

(c) $P(PA|C) = \frac{P(C \cap PA)}{P(C)} = \frac{P(C|PA)P(PA)}{P(C)} = 0.016$
- (a) Seja Y - n.º clientes que pagam com cartão de débito, numa amostra de 30 seleccionados sem reposição de entre 50. $Y \sim H(50, 25, 30)$

(b) Seja X -n.º de clientes que fazem despesa não superior a 40 euros, numa amostra de 10 seleccionados com reposição. $X \sim B(10, 0.9)$.
 $P(X > 8) = \sum_{k=9}^{10} \binom{10}{k} 0.9^k 0.1^{10-k} = 0.736098929$

(c) Seja W - n.º clientes atendidos em 15 minutos. $W \sim P(20 \times \frac{1}{4}) \equiv P(5)$
 $P(W \leq 1) = \sum_{k=0}^1 e^{-5} \frac{5^k}{k!} = 6e^{-5}$

(d) Seja U o n.º de clientes que fazem despesa superior a 40 euros, numa amostra de 40 seleccionados com reposição $U \sim B(40, 0.1)$
Dado que $n = 40 \geq 30$ e $np = 4 \leq 5$, então $U \stackrel{a}{\sim} P(4)$
 $P(U = 6) \approx e^{-4} \frac{4^6}{6!} \approx 0.1042$

(e) Seja V o n.º clientes atendidos até que surja o 1º a fazer despesa superior a 40 euros $V \sim G(0.1)$
 $P(V = m) = 0.081 \Leftrightarrow 0.1(0.9)^{m-1} = 0.081 \Leftrightarrow (0.9)^{m-1} = 0.81 \Leftrightarrow m-1 = 2 \Leftrightarrow m = 3$
- (a) $\sum_{x=0}^1 \sum_{y=-1}^1 P(X=x; Y=y) = 1 \Leftrightarrow 0.3 + r + 2p = 1 \Leftrightarrow r + 2p = 0.7$

(b) i. X e Y seriam v.a.'s independentes, se e só se
 $P(X=x; Y=y) = P(X=x)P(Y=y), \forall (x,y), x=0,1; y=-1,0,1$
Como, por exemplo,
 $P(X=0) = \sum_{y=-1}^1 P(X=0; Y=y) = 0.5 \quad P(Y=0) = \sum_{x=0}^1 P(X=x; Y=0) = 0.4 \quad e$
 $P(X=0; Y=0) = 0.3 \neq P(X=0)P(Y=0) = 0.2$, X e Y não são v.a.'s independentes.

ii. $P(X+Y=0) = P(X=0; Y=0) + P(X=1; Y=-1) = r + p = 0.5$

$$\text{iii. } F_Y(-0.45) = P(Y \leq -0.45) = P(Y = -1) = 0.3$$

$$\text{iv. } E(\sqrt{XY}) = \sum_{x=0}^1 \sum_{y=-1}^1 \sqrt{x}yP(X=x; Y=y) = \sum_{x=0}^1 \sum_{y=-1}^1 xyP(X=x; Y=y) = E(XY) = 0$$

$$E(Y) = \sum_{y=-1}^1 yP(Y=y) = 0, \quad E(X) = \sum_{x=0}^1 xP(X=x) = 0.5 \quad E(Y+0.5) = E(Y) + 0.5 = 0.5$$

$$E(Y^2) = \sum_{y=-1}^1 y^2P(Y=y) = 0.6, \quad V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = 0.6 - 0^2 = 0.6$$

$$V(10Y-1) = 10^2V(Y) = 100 \times 0.6 = 60$$

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0 - 0.5 \times 0 = 0$$

$$\text{v. A v.a. } XY \text{ tem suporte } S_{XY} = \{-1, 0, 1\}$$

$$\bullet P(XY = -1) = P(X = 1; Y = -1) = p = 0.2$$

$$\bullet P(XY = 1) = P(X = 1; Y = 0) = p = 0.2$$

$$\bullet P(XY = 0) = 1 - P(XY = -1) - P(XY = 1) = 1 - 2p = 0.6$$

$$\text{A função de probabilidade da v.a. } XY \text{ é } \quad XY \begin{cases} -1 & 0 & 1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \end{cases}$$