PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA E 2018/2019

Teste 2 A 22 de Maio de 2019 **Duração**: 1h 30m + 30m

Nome completo: ______________________________

N.º aluno: __________ Curso: __________ Nota: ________

Em cada pergunta apenas uma das respostas está correcta. Assinale a sua resposta com uma cruz no quadrado correspondente. Se pretender anular uma resposta já assinalada, rasure por completo o respectivo quadrado. A cotação para uma resposta correcta e o desconto por uma resposta incorrecta assinala-se à esquerda da pergunta. Uma não resposta nada vale nem desconta. n.a. significa "nenhuma das anteriores".

1. Seja X uma v.a. absolutamente contínua com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < d \\ m\,x^{-a-1}, & x \geq d \end{cases}, \quad d, a \in \mathbb{R}^+, \quad m \in \mathbb{R}$$

(1.0/0.2) (a) Se $a = 2$, a constante m deve satisfazer:

A $m = 2\,d^2$ B $m = -d^2$ C $m = 3d^3$ D n.a.

(1.0/0.3) (b) Para $d = 1$, $a = 1$, $m = 1$ e $x \in [1, +\infty[$, a $P(X > 3x \,|\, X > 2x)$ tem valor:

A $1/3$ B $4/9$ C $2/3$ D n.a.

2. O tempo gasto pelo Sr. S numa qualquer visita ao mercado é uma v.a. com distribuição Normal de valor médio igual a μ horas e desvio padrão igual a 0.5 horas.

(2.0/0.2) (a) Se, com probabilidade 0.1587, demorar mais de 3 horas numa visita, então μ tem valor:

A 2.5 B 3.5 C -2.5 D 3.25 E n.a.

(1.5/0.4) (b) Se $\mu = 2$, a probabilidade de numa visita gastar entre 1 e 3 horas é:

A 0.5228 B 0.8414 C 0.0456 D 0.9544 E n.a.

(1.5/0.4) (c) Sejam X e Y os tempos gastos em duas visitas (e independentes) e $Z \sim N(0,1)$. Para $\mu = 1$, $P(2X - Y \leq a)$, $a \in \mathbb{R}$, tem o mesmo valor que:

A $P\left(Z \leq \frac{a-1}{0.75}\right)$ B $P\left(Z \leq \frac{a+1}{1.25}\right)$ C $P\left(Z \leq \frac{a-1}{\sqrt{1.25}}\right)$ D $P\left(Z \leq \frac{a-1}{\sqrt{2.5}}\right)$ E n.a.

3. O número de viaturas que passam numa passadeira pedonal situada perto de uma escola, comporta-se segundo um Processo de Poisson de intensidade $\beta = 0.5$ viaturas por minuto.
Considere a v.a. T - tempo (em minutos) entre passagens consecutivas de viaturas na passadeira.

(1.5/0.3) (a) A $P(T \leq 5 \,|\, T > 3)$ tem valor:

A $1 - e^{-5/2}$ B e^{-1} C $1 - e^{-1}$ D $e^{-3/2}$ E n.a.

(2.0/0.4) (b) No período entre as 13:00 horas e as 13:30, a probabilidade de passarem na passadeira 3 viaturas nos primeiros 2 minutos e 1 viatura nos últimos 4 minutos tem valor:

A $16\,e^{-12}$ B $e^{-1}/3$ C $e^{-3}/2$ D $e^{-3}/3$ E n.a.

(1.5/0.3) (c) A probabilidade *aproximada* de durante 32 minutos passarem na passadeira 22 ou menos viaturas é:

A 0.6700 B 0.9332 C 0.5596 D 0.0668 E n.a.

V.S.F.F

4. Seja $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $n \geq 2$, uma amostra aleatória de uma população X cuja distribuição depende do valor de dois parâmetros, $\theta \in \mathbb{R}$ e $\delta \in \mathbb{R}^+$. Sabemos que $E(X) = \theta - \delta$ e que $V(X) = \delta^2$. Considere $\hat{\theta}$ um estimador de θ tal que $E\left(\hat{\theta}\right) = \theta - \dfrac{\delta}{n}$ e $V\left(\hat{\theta}\right) = \dfrac{\delta^2}{n^2}$.

(1.5/0.2) (a) Os estimadores dos momentos para os parâmetros θ e δ, são:

A $\theta^* = \bar{X} - \sqrt{M_2},\ \delta^* = \sqrt{M_2}$ B $\theta^* = \bar{X} - M_2,\ \delta^* = M_2$ C $\theta^* = \bar{X} + \sqrt{M_2},\ \delta^* = \sqrt{M_2}$ D n.a.

Nas alíneas b) e c) que se seguem, admita que o parâmetro δ tem valor conhecido, nomeadamente $\delta = 2$.

(b) *Assinale com uma cruz no quadrado correspondente, as suas respostas à questão desta alínea. Cada resposta correcta vale 0.6 valores e cada resposta incorrecta desconta 0.2 valores.*

Das estatísticas que se seguem, indique as <u>duas</u> que são estatísticas centradas para o parâmetro θ.

A $2 - \bar{X}$ B $\bar{X} + 2$ C $\frac{2}{n} - \hat{\theta}$ D $\hat{\theta}$ E $n\bar{X}$ F $\hat{\theta} + \frac{2}{n}$

(1.0/0.2) (c) O erro quadrático médio do estimador $\hat{\theta}$ é:

A $\dfrac{8}{n^2}$ B $\dfrac{4}{n^2}$ C $\dfrac{4}{n^2} + \dfrac{2}{n}$ D n.a.

Nas alíneas seguintes, admita que o parâmetro δ tem valor conhecido, nomeadamente $\delta = 3$.

(1.3/0.3) (d) Considere $\tilde{\theta} = \bar{X} + 3$ e $\ddot{\theta}$ dois estimadores <u>centrados</u> para o parâmetro θ. Sabendo que $V\left(\ddot{\theta}\right) = \dfrac{9}{n^2}$, então

A $\tilde{\theta}$ é o mais eficiente B $\tilde{\theta}$ e $\ddot{\theta}$ são igualmente eficientes C $\ddot{\theta}$ é o mais eficiente

(1.0/0.4) (e) Foi recolhida a seguinte amostra desta população: $(7.2, 3.2, 8.4, 9.7, 4.5)$. A estimativa do parâmetro θ, resultante da utilização do estimador $\tilde{\theta}$, assim como uma estimativa centrada da $V(X)$ têm valor, respectivamente:

A 6.6 e ≈ 2.70093 B 9.6 e 7.295 C 9.6 e 5.836 D n.a.

(2.0/0.5) 5. Considere X uma v.a. aleatória com distribuição Uniforme no intervalo $]2, 6[$. Para a seguinte sequência (u_1, u_2, u_3, u_4) de NPA's Uniformes no intervalo $]0, 1[$,

i	1	2	3	4
u_i	0.59	0.10	0.89	0.38

a correspondente sequência (x_1, x_2, x_3, x_4) de observações pseudo-aleatórias da v.a. X é:

A

i	1	2	3	4
x_i	4.36	2.40	5.56	3.52

B

i	1	2	3	4
x_i	2.84	2.11	3.60	2.47

C

i	1	2	3	4
x_i	5.18	4.20	5.78	4.76

C n.a.