FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Probabilidades e Estatística E
Ano Lectivo 2018/19
2º Teste - 22 de Maio de 2019

Grelha de respostas certas

Versão A

Grupo	1		2			3			4					5
	a)	b)	a)	b)	c)	a)	b)	c)	a)	b)	c	d)	e)	
	A	C	A	D	C	C	D	B	C	B F	A	C	B	A

Versão B

Grupo	1		2			3			4					5
	a)	b)	a)	b)	c)	a)	b)	c)	a)	b)	c	d)	e)	
	C	B	D	C	A	D	B	D	A	A C	B	B	C	B

Resolução abreviada do 2º Teste Versão A

1. (a)
   - $f(x) \geq 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \Rightarrow m \geq 0$
   - $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1 \Leftrightarrow \int_d^{+\infty} m\, x^{-3} dx = 1 \Leftrightarrow m \left[-\frac{x^{-2}}{2}\right]_d^{+\infty} = 1 \Leftrightarrow \frac{m\, d^{-2}}{2} = 1 \Leftrightarrow m = 2d^2$

   (b) A v.a. X tem distribuição de Pareto com parâmetros $(1,1)$. Então $P(X \leq x) = 1 - x^{-1},\ x \in [1, +\infty[$.

   $$P(X > 3x \,|X > 2x) = \frac{P(X > 3x)}{P(X > 2x)} = \frac{(3x)^{-1}}{(2x)^{-1}} = \frac{2}{3}$$

2. Seja X- tempo gasto numa visita (em horas). $X \sim N\left(\mu, 0.5^2\right)$

   (a) $P(X > 3) = 0.1587 \Leftrightarrow P(X \leq 3) = 0.8413 \Leftrightarrow P\left(\frac{X-\mu}{0.5} \leq \frac{3-\mu}{0.5}\right) = 0.8413 \Leftrightarrow$
   $\Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{3-\mu}{0.5}\right) = 0.8413 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{3-\mu}{0.5}\right) 0.8413 \Leftrightarrow \frac{3-\mu}{0.5} = \Phi^{-1}(0.8413) \Leftrightarrow \frac{3-\mu}{0.5} = 1.00 \Leftrightarrow \mu = 2.5$

   (b) $P(1 \leq X \leq 3) = P\left(\frac{1-2}{0.5} \leq \frac{X-2}{0.5} \leq \frac{3-2}{0.5}\right) = P(-2 \leq Z \leq 2) = P(Z \leq 2) - P(Z \leq -2) =$
   $= 2P(Z \leq 2) - 1 = 2 \times 0.9772 - 1 = 0.9544$

   (c) X e Y são v.a.'s independentes e ambas com distribuição Normal. Então $2X - Y$ tem distribuição Normal com parâmetros $(1, 1.25)$ porque:
   $E(2X - Y) = 2E(X) - E(Y) = 2 - 1 = 1 \quad V(2X - Y) = 4V(X) + V(Y) = 5 \times 0.5^2 = 1.25$

   $$P(2X - Y \leq a) = P\left(\frac{2X - Y - 1}{\sqrt{1.25}} \leq \frac{a-1}{\sqrt{1.25}}\right) = P\left(Z \leq \frac{a-1}{\sqrt{1.25}}\right)$$

3. Defina-se $N(t)$ - nº de viaturas que passam pela passadeira em t minutos. $\{N(t)\}_{t>0}$ é um P.P. de intensidade $\beta = 0.5$ viaturas/minuto.

   (a) A v.a. T tem distribuição Exponencial de parâmetros $\left(0, \frac{1}{0.5}\right) \qquad T \sim E(0, 2)$
   Pela propriedade de falta de memória,
   $P(T \leq 5\,|T > 3) = 1 - P(T > 5\,|T > 3) = 1 - P(T > 2) = 1 - e^{-2/2} = 1 - e^{-1}$

   (b) Seja X-n.º de viaturas que passam nos primeiros 2 minutos. $X \equiv N(2) \sim P(2 \times 0.5) \equiv P(1)$
   Seja Y-n.º de viaturas que passam nos últimos 4 minutos. $Y \equiv N(4) \sim P(4 \times 0.5) \equiv P(2)$
   São v.a.'s independentes porque se referem a intervalos de tempo disjuntos.
   $P(X = 3; Y = 1) = P(X = 3)\, P(Y = 1) = e^{-1}\frac{1^3}{3!} \times e^{-2}\frac{2^1}{1!} = e^{-3}\frac{2}{6} = \frac{e^{-3}}{3}$

   (c) Seja W-n.º de viaturas que passam em 32 minutos. $W \equiv N(32) \sim P(32 \times 0.5) \equiv P(16)$
   Por se tratar de uma distribuição de Poisson com parâmetro de valor superior a 5, o T.L.C. permite concluir que $\frac{W-16}{\sqrt{16}} = \frac{W-16}{4} \overset{a}{\sim} N(0,1)$
   $P(W \leq 22) = P\left(\frac{W-16}{4} \leq \frac{22-16}{4}\right) \approx P(Z \leq 1.5) = 0.9332$

4. (a) $\begin{cases} E(X) = \bar{X} \\ V(X) = M_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta - \delta = \bar{X} \\ \delta^2 = M_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \bar{X} + \sqrt{M_2} \\ \delta = \sqrt{M_2} \end{cases}$

Os estimadores dos momentos para os parâmetros θ e δ são, respectivamente, $\theta^* = \bar{X} + \sqrt{M_2}$ e $\delta^* = \sqrt{M_2}$.

(b)
- $E\left(2 - \bar{X}\right) = 2 - E\left(\bar{X}\right) = 2 - E(X) = 2 - \theta + 2 = 4 - \theta \neq \theta$ não centrada
- $E\left(\bar{X} + 2\right) = E\left(\bar{X}\right) + 2 = E(X) + 2 = \theta - 2 + 2 = \theta$ centrada
- $E\left(\frac{2}{n} - \hat{\theta}\right) = \frac{2}{n} - E\left(\hat{\theta}\right) = \frac{2}{n} - \theta + \frac{2}{n} = \frac{4}{n} - \theta \neq \theta$ não centrada
- $E\left(n\bar{X}\right) = nE\left(\bar{X}\right) = nE(X) = n(\theta - 2) \neq \theta$ não centrada
- $E\left(\hat{\theta} + \frac{2}{n}\right) = E\left(\hat{\theta}\right) + \frac{2}{n} = \theta - \frac{2}{n} + \frac{2}{n} = \theta$ centrada

(c) $bias\left(\hat{\theta}\right) = E\left(\hat{\theta}\right) - \theta = \theta - \frac{2}{n} - \theta = -\frac{2}{n}$

$EQM\left(\hat{\theta}\right) = V\left(\hat{\theta}\right) + bias^2\left(\hat{\theta}\right) = \frac{4}{n^2} + \frac{4}{n^2} = \frac{8}{n^2}$

(d) $V\left(\tilde{\theta}\right) = V\left(\bar{X} + 3\right) = V\left(\bar{X}\right) = \frac{V(X)}{n} = \frac{9}{n}$

Sendo os dois estimadores centrados, o mais eficiente é o que tiver menor variância. Ora, para $n \geq 2$, $n^2 > n \Rightarrow \frac{9}{n^2} < \frac{9}{n} \Rightarrow V\left(\ddot{\theta}\right) < V\left(\tilde{\theta}\right)$. $\ddot{\theta}$ é o mais eficiente.

(e) Informação amostral: $n = 5$, $\overline{x} = 6.6$, $s = 2.700925767$ e $s^2 = 7.295$

A estimativa de θ, resultante do estimador $\tilde{\theta}$ é: $\tilde{\theta} = \overline{x} + 3 = 6.6 + 3 = 9.6$

Como S^2 é um estimador centrado para a $V(X)$, então a estimativa centrada para $V(X)$ é: $s^2 = 7.295$

5. Se $X \sim U(2,6)$, a sua função distribuição é

$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ (x-2)/4, & 2 \leq x < 6 \\ 1, & x \geq 6 \end{cases}$ e a sua inversa é $\overleftarrow{F}(u) = 2 + 4\,u,\ u \in [0,1]$

i	1	2	3	4
u_i	0.59	0.10	0.89	0.38
x_i	4.36	2.40	5.56	3.52