

Conjuntos, relações e funções

Conjuntos

Esta secção foi escrita por Isabel Oitavem com base no capítulo 3 do livro “**Elements of Logic via Numbers and Sets**” de **D.L. Johnson**, Springer-Verlag, 1998.

- ▶ Os objectos que formam um conjunto designam-se por **elementos**, **membros**, ou (por vezes) **pontos**.
- ▶ Normalmente os conjuntos são representados por letras maiúsculas, e os seus elementos são representados por letras minúsculas.

Conjuntos, relações e funções

Conjuntos

- ▶ Ser elemento de um conjunto é expresso pelo símbolo $\in$. Escrevemos $a \in A$, e dizemos “ a é elemento de A ” ou “ a pertence a A ”.
- ▶ Dizemos que o conjunto A é **subconjunto** do conjunto B , e escrevemos $A \subseteq B$, se todos os elementos de A são elementos de B (i.e. $\forall x \in A \quad x \in B$).
- ▶ Dizemos que dois conjuntos A e B são **iguais**, e escrevemos $A = B$, se eles têm os mesmos elementos (i.e. se $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$).

$a \notin A$, $A \not\subseteq B$ e $A \neq B$ abrevia $\neg(a \in A)$, $\neg(A \subseteq B)$ e $\neg(A = B)$, respectivamente. $A \subset B$ abrevia $A \subseteq B \wedge A \neq B$.

Conjuntos, relações e funções

Conjuntos

- ▶ $\emptyset$ (conjunto vazio) é conjunto.
- ▶ $\mathbb{N}$ é conjunto (pode-se considerar em alternativa outra classe indutiva).
- ▶ Se S é um conjunto, os elementos de S que verificam uma determinada propriedade ψ i.e.

$\{n \in S : \psi(n)\}$ é conjunto.

Dizemos que o conjunto assim definido está representado em **compreensão**.

Exemplo: $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 4\}$.

Conjuntos, relações e funções

Conjuntos

Quando um conjunto tem um número finito de elementos podemos representá-lo explicitando os seus elementos. Neste caso dizemos que o conjunto está representado em **extensão**. Usamos chavetas para delimitar o conjunto e vírgulas para separar os seus elementos.

Exemplo: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

A representação de conjuntos em compreensão é usada para introduzir noções importantes, como a noção de conjunto complementar, conjunto intersecção e conjunto união.

Conjuntos, relações e funções

Conjuntos: operações básicas

Sejam A e B subconjuntos de um conjunto S .

- ▶ A **diferença** de A e B (ou **complementar** de B em A), $A - B$ (ou $A \setminus B$), é o conjunto $\{x \in S : x \in A \wedge x \notin B\}$. A' denota $S \setminus A$.
- ▶ A **intersecção** de A e B , $A \cap B$, é o conjunto dos elementos de S que pertencem simultaneamente a A e a B . Ou seja,

$$\mathbf{A \cap B = \{x \in S : x \in A \wedge x \in B\}.$$

- ▶ A **união** de A e B , $A \cup B$, é o conjunto dos elementos de S que pertencem a A ou a B . Ou seja,

$$\mathbf{A \cup B = \{x \in S : x \in A \vee x \in B\}.$$

Conjuntos, relações e funções

Conjuntos: operações básicas

Se $A \cap B = \emptyset$ (i.e. A e B não têm elementos em comum), dizemos que A e B são **conjuntos disjuntos**. Nestas circunstâncias podemos representar $A \cup B$ por $A \dot{\cup} B$ (**união disjunta**).

As operações básicas que introduzimos podem ser descritas com base nos seus **diagramas de Venn** ou nas suas **tabelas de verdade**.

Conjuntos, relações e funções

Conjuntos: operações básicas

Note-se que propriedades sobre conjuntos **não podem ser demonstradas com base em diagramas de Venn.**

Para provar propriedades sobre conjuntos podemos construir a respectiva **tabela de verdade** ou fazer a **demonstração formal**.

Conjuntos, relações e funções

Conjuntos: operações básicas

Exemplo: Dado A um subconjunto de S , mostre que

$$A \cap A = A.$$

Tabela de verdade:

A	$\cap$	A	$=$	A
1	1	1	1	1
0	0	0	1	0
1	2	1	3	1

Demonstração formal: Dado $x \in S$ arbitrário,

$$x \in A \cap A \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in A) \Leftrightarrow x \in A.$$

Logo (como dois conjuntos são iguais se têm os mesmos elementos), $A \cap A = A$.

Conjuntos, relações e funções

Conjuntos: conjunto das partes

Podemo-nos deparar com conjuntos cujos elementos são, eles próprios, conjuntos.

Exemplo:

$\{\{\text{encarnado, verde, amarelo}\}, \{\text{encarnado, amarelo}\}\}$
cores da bandeira de Portugal cores da bandeira de Espanha

- Dado um conjunto S ,

$$\mathcal{P}(S) = \{A : A \subseteq S\}$$

é conjunto e designamo-lo por **conjunto das partes** de S .

Exemplo: Dado $S = \{1, 2\}$, $\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Exemplo: Dado $S = \{\text{encarnado}(E), \text{verde}(V), \text{amarelo}(A)\}$,
 $\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{E\}, \{V\}, \{A\}, \{E, V\}, \{E, A\}, \{V, A\}, \{E, V, A\}\}$

Conjuntos, relações e funções

Conjuntos: conjunto das partes

Dado um conjunto S , seja A um subconjunto de $\mathcal{P}(S)$. Os elementos de A são portanto subconjuntos de S . Definimos

- ▶ $\cup A = \{a \in S : \exists X \in A \ a \in X\}$
- ▶ $\cap A = \{a \in S : \forall X \in A \ a \in X\}$

Exemplo: Se $S = \{0, 1, 2\}$,

$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$.

Sendo $\mathbf{A} = \{\{0,2\}, \{2\}\} \subseteq \mathcal{P}(S)$, temos que $\cup \mathbf{A} = \{0, 2\}$ e $\cap \mathbf{A} = \{2\}$.

Conjuntos, relações e funções

Conjuntos: conjunto das partes

Seja S um conjunto. $A \subseteq \mathcal{P}(S) \setminus \{\emptyset\}$ é uma **partição de S** se cada elemento de S pertence a um e um só elemento de A .

Exemplo: Se $S = \{0, 1, 2\}$,

$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$.

$A_1 = \{\{1\}, \{0,2\}\}$ e

$A_2 = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}\}$ são partições de S .

$A_3 = \{\{0\}, \{1\}, \{0,2\}\}$ e

$A_4 = \{\{1\}, \{2\}\}$ não são.

Conjuntos, relações e funções

Conjuntos: produto cartesiano

Definição

Dado um conjunto S e $a, b \in S$, o **par ordenado** formado por a e b , é o conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, que denotamos por **(a, b)** .

Exemplos: $(1, 2) = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$ e $(2, 1) = \{\{2\}, \{1, 2\}\}$.
Note-se que $(1, 2) \neq (2, 1)$.

Proposição

Dado um conjunto S e $a, b, c, d \in S$, $(a, b) = (c, d)$ se e só se $a = c$ e $b = d$.

Conjuntos, relações e funções

Conjuntos: produto cartesiano

Definição

O *produto cartesiano* de conjuntos A e B é o conjunto de pares ordenados

$$A \times B = \{(a, b) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B) \quad : \quad a \in A \wedge b \in B\}.$$

Mais geralmente, para qualquer número natural $n > 2$

- ▶ $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (a_1, (a_2, (\dots, (a_{n-1}, a_n) \dots)))$;
- ▶ $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathcal{P}(\cup_{1 \leq i \leq n} A_i) \quad : \quad a_i \in A_i \wedge i \in \{1, \dots, n\}\}$.
- ▶ A^n abrevia $A \times \dots \times A$ (n vezes).

Conjuntos, relações e funções

Conjuntos: cardinalidade

- ▶ O número de elementos de um conjunto, S , é designado por **cardinalidade** de S e representa-se por $|S|$ ou $\#S$.
- ▶ Um conjunto diz-se **finito**, se tiver cardinalidade finita, e diz-se **infinito** caso contrário.

Exemplos:

1. $|\emptyset| = 0$;
2. Seja $\mathbb{Z}(n) = \{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x \leq n\}$, $|\mathbb{Z}(n)| = n$;

Conjuntos, relações e funções

Conjuntos: cardinalidade

Proposição

Qualquer subconjunto A de um conjunto finito S é finito e tem-se $|A| \leq |S|$.

Questões: Se $|S| = n$, qual é a cardinalidade de $\mathcal{P}(S)$?
Se $|A| = m$ e $|B| = n$, qual é a cardinalidade de $A \times B$?

Conjuntos, relações e funções

Conjuntos: cardinalidade

Teorema

Se S é um conjunto finito tal que $|S| = n$, então $|\mathcal{P}(S)| = 2^n$.

Demonstraremos este teorema mais tarde, por indução em n .

Teorema

Se A e B são conjuntos finitos tais que $|A| = m$ e $|B| = n$, então $|A \times B| = m \times n$.

Conjuntos, relações e funções

Conjuntos: cardinalidade

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ são conjuntos infinitos.

Representamos por $\aleph_0$ a cardinalidade de $\mathbb{N}$ e por c (cardinal do contínuo) a cardinalidade de $\mathbb{R}$.

- ▶ $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$
- ▶ $\aleph_0 < c$

Portanto, os conjuntos infinitos não têm todos a mesma cardinalidade.