Teoria da Computação

Aula Teórica 7:
Cardinalidade de conjuntos – Exercícios

António Ravara

Departamento de Informática

25 de Março de 2019

É contável o conjunto dos naturais múltiplos de 3?

Definição do conjunto

M3 $\stackrel{\text{def}}{=} \{m \in \mathbb{N}_0 \mid \exists n \,.\, m = 3n\}$

- M3 é contável se existir uma bijecção com os naturais.
- Se encontrarmos duas funções injectivas, uma de M3 em $\mathbb{N}_0$ e outra de $\mathbb{N}_0$ em M3, pelo Teorema de Cantor-Bernstein, existe uma bijecção entre os conjuntos.

Função de contagem

- contaM3 $\in \mathbb{N}_0 \to$ M3
  contaM3 $\stackrel{\text{def}}{=} \{n \mapsto m \mid m = 3n\}$
- contaM3 é injectiva:
  se $n_1 \neq n_2$ então $3n_1 = m_1 \neq m_2 = 3n_2$
- a função identidade de M3 em $\mathbb{N}_0$ é injectiva.

Logo, M3 é contável.

É contável o conjunto dos inteiros múltiplos de 3?

Definição do conjunto

$Z3 \stackrel{\text{def}}{=} \{i \in \mathbb{Z} \mid i\%3 = 0\}$

Funções de contagem

- contaZ3: conta em zig-zag
  $\{0 \mapsto 0, -3 \mapsto 1, 3 \mapsto 2, -6 \mapsto 3, 6 \mapsto 4, \ldots\}$
  $\text{contaZ3} \in Z3 \to \mathbb{N}_0$
  $\text{contaZ3} \stackrel{\text{def}}{=} \{i \mapsto n \mid$
  $((i\%2 = 1) \to (n = -3i)) \wedge ((i\%2 \neq 1) \to (n = 3i))\}$
  contaZ3 é injectiva porque é a união de duas funções injectivas com domínio disjunto.
- a função que dá os naturais múltiplos de 3, $\text{mult3} \in \mathbb{N}_0 \to Z3$, é também injectiva.

Z3 é contável, pois existem funções injectivas de e para os naturais.

É contável o conjunto dos racionais positivos não naturais?

Definição do conjunto

QnN $\stackrel{\text{def}}{=} \{i/j \mid i/j \notin \mathbb{N} \wedge j\%i \neq 0\}$

Função de contagem

- contaQnN: os racionais são fracções.
  Logo podem ser representados como pares
  (de naturais não nulos, neste caso).
- Os racionais são contáveis.
  Considere a função contaQ, em zig-zag
  (espiral à volta da origem).
- Um subconjunto de um contável é contável
  (por ser subconjunto não pode ter mais elementos - a função injectiva é óbvia...).

Logo, como contaQnN $\subseteq$ contaQ, o conjunto QnM é contável.

São contáveis os seguintes conjuntos?

- Provou-se na aula anterior que $[0,1[$ é não contável.
- Logo, $[0,1]$ também o é.

$[-1,3] \cap [0,2] \supseteq [0,1]$

Como $[0,1]$ é não contável, qualquer conjunto que o contenha é não contável.

$[-2,0] \cap [-1,1] = [-1,0]$

Como $[0,1]$ é não contável, qualquer conjunto equipotente a ele também o é.

Uma função bijectiva

$in \subseteq [-1,0] \to [0,1]$

$in \stackrel{\text{def}}{=} \{r \mapsto s \mid s = -r\}$

É contável o conjunto dos subconjuntos de um conjunto infinito contável C?

Suponhamos que existe função bijectiva $\mathit{conta} \in \mathbb{N} \to \wp(C)$
Lista todos os subconjuntos de C (por alguma ordem).

Como C é infinito contável, existe função bijectiva $f \in \mathbb{N} \to C$.

Seja $T \stackrel{\text{def}}{=} \{c \in C \mid c \notin \mathit{conta}(f(c))\}$
Para todo o $c \in C$, tem-se $T \neq \mathit{conta}(f(c))$,
pois $c \in T$ se e só se $c \notin \mathit{conta}(f(c))$.

Logo, *conta* não lista todos os subconjuntos!
A contradição mostra que tal lista não existe.