

Transformações Geométricas

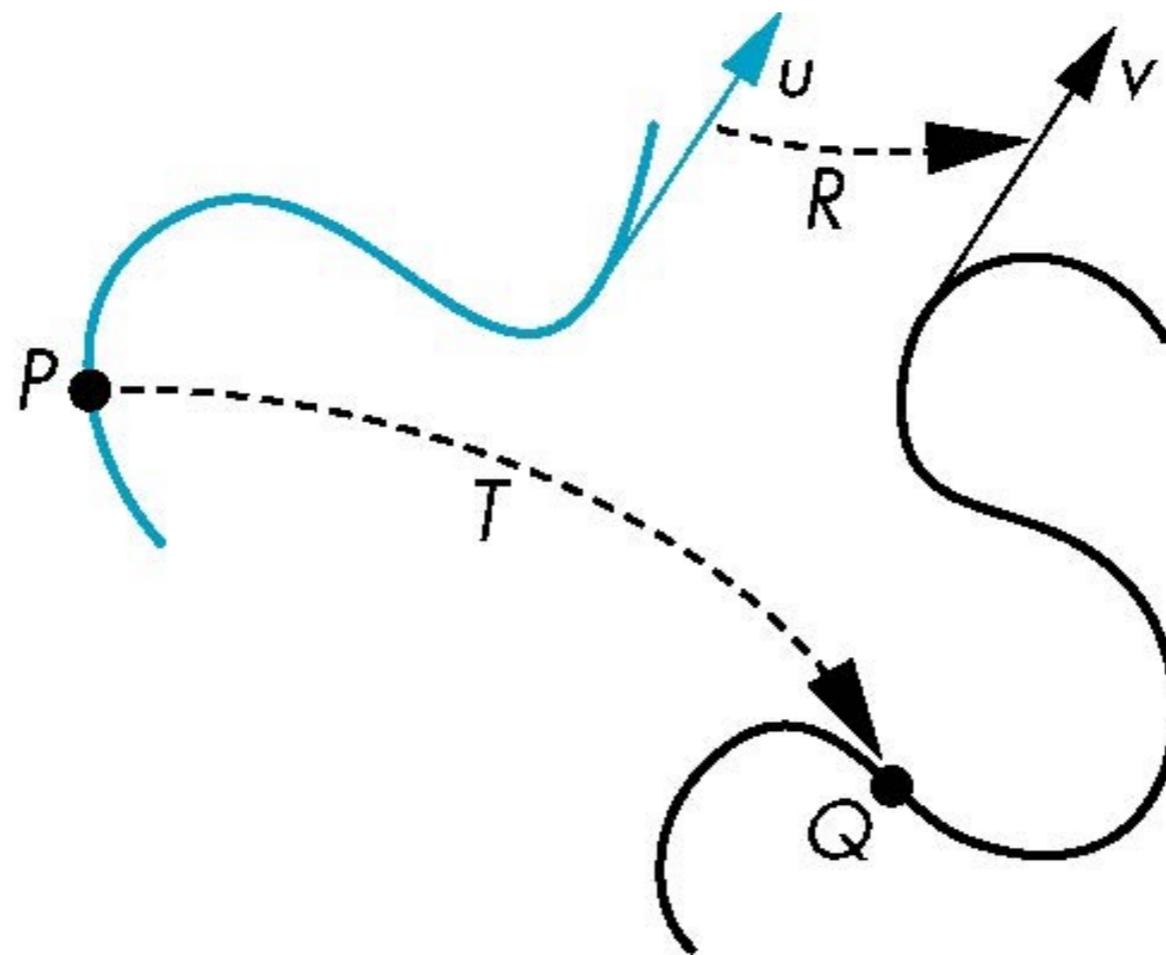
2019-2020
Fernando Birra

Objetivos

- Introduzir as transformações geométricas simples:
 - Translação
 - Rotação
 - Mudança de Escala
 - Deformação Transversa
- Derivar as respetivas matrizes de transformação com coordenadas homogéneas
- Aprender a usar a composição de transformações simples para deduzir transformações geométricas arbitrárias

Transformações Geométricas Genéricas

- Uma transformação geométrica qualquer transforma pontos e/ou vetores em outros pontos/vetores.

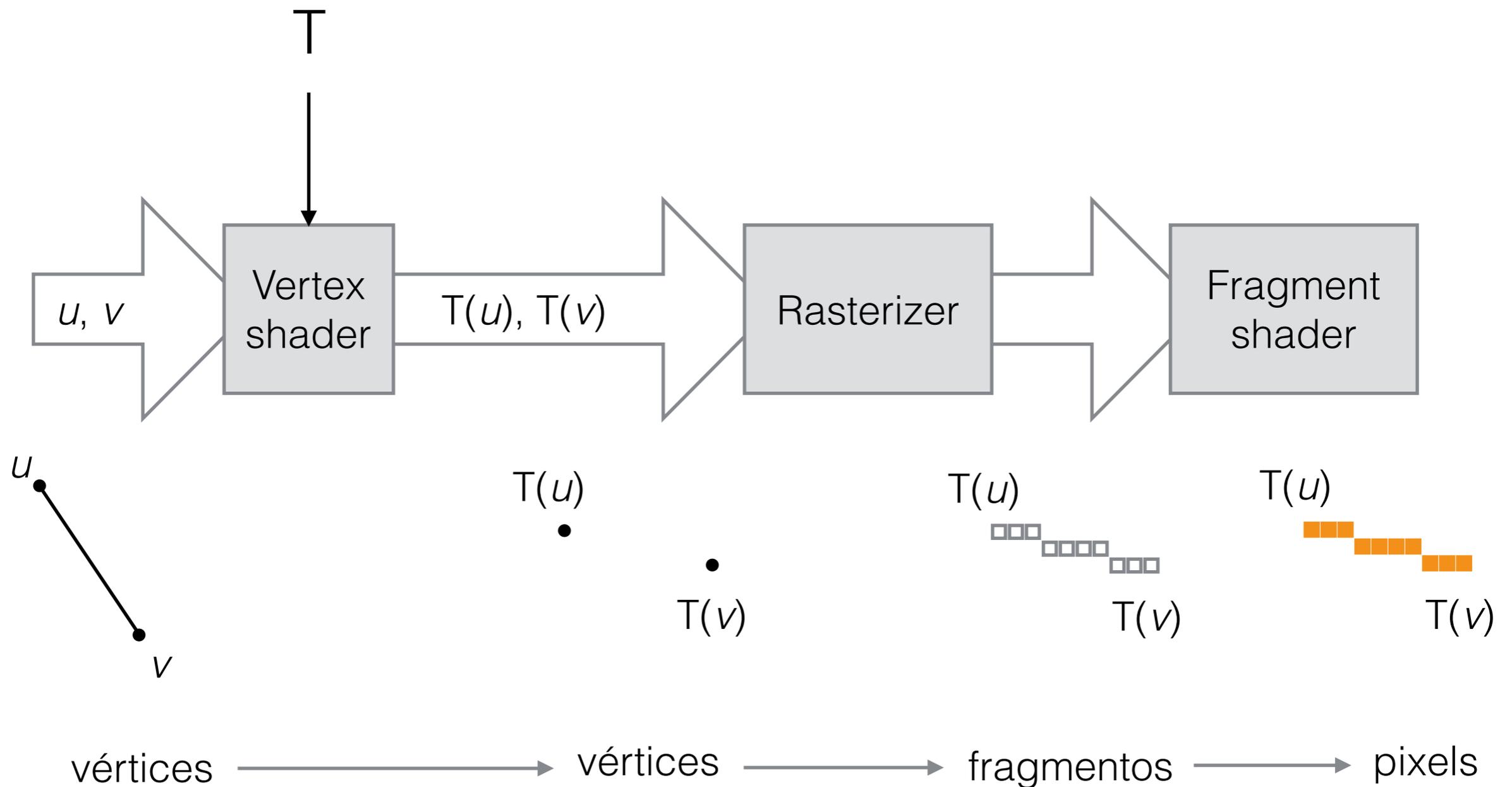


Transformações Afins

- Preservam as linhas
- As transformações mais importantes são transformações afins:
 - Transformações dos corpos rígidos (translação, rotação)
 - Mudança de escala e deformação transversa (shear)

Importância nos sistemas gráficos: Basta transformar os extremos duma linha e unirmos os pontos transformados com uma linha

Tratamento no Pipeline

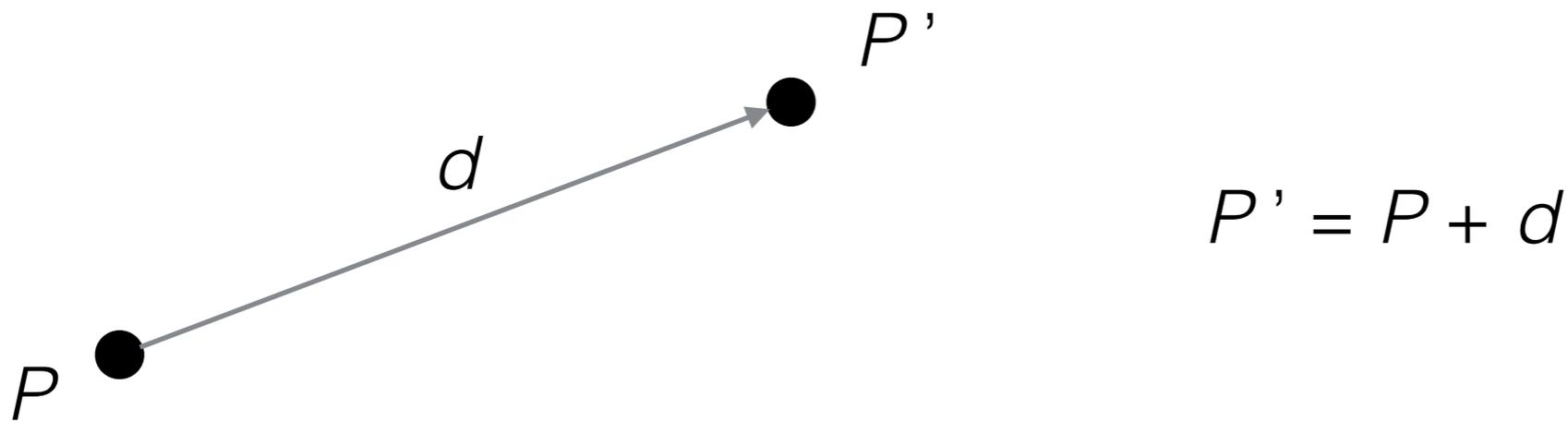


Notação

- P, Q, R : pontos num espaço afim
- u, v, w : vetores num espaço afim
- α, β, γ : escalares
- **p, q, r** : representações de pontos - array com 4 escalares em coordenadas homogéneas
- **u, v, w** : representações de vetores - array com 4 escalares em coordenadas homogéneas

Translação

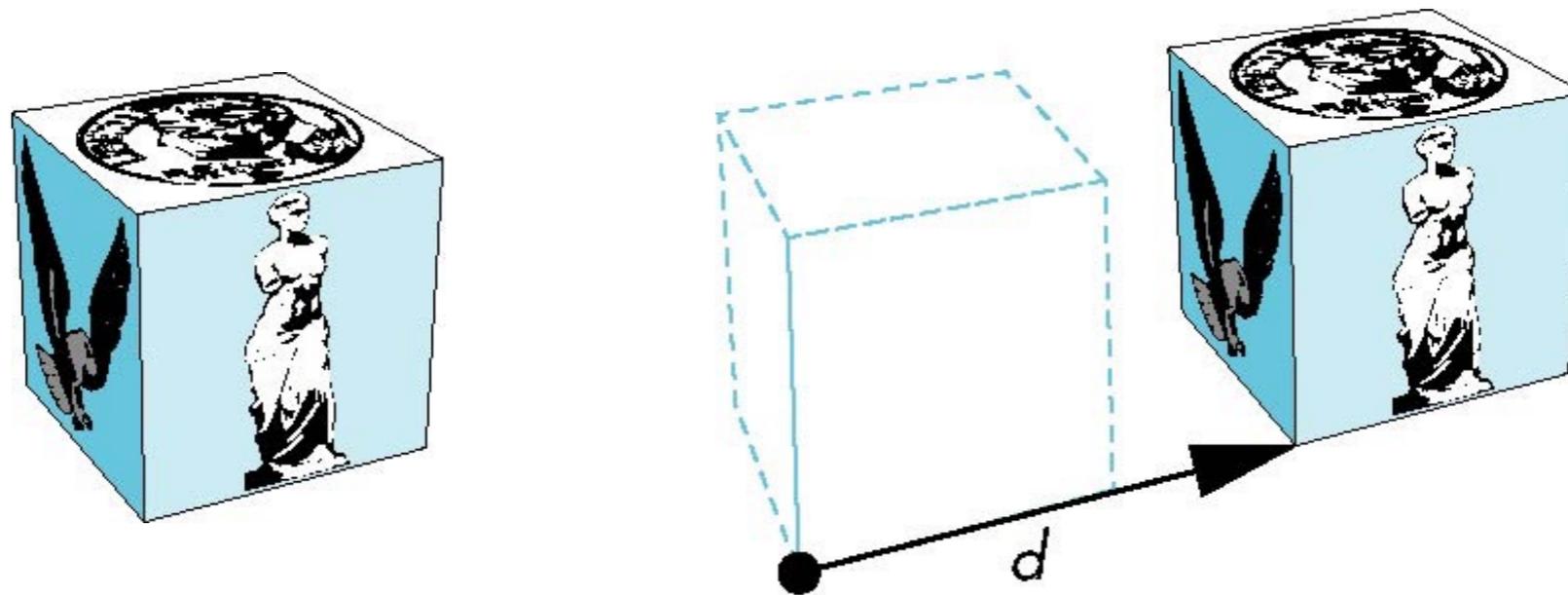
- Mover (transladar, deslocar) um ponto para uma nova localização.



- Deslocamento determinado por um vetor d
- 3 graus de liberdade

Translação

- Embora um ponto se possa mover para outra localização mais do que de uma forma, para um conjunto de pontos existe normalmente apenas uma forma.



objeto

translação: todos os pontos deslocados dum mesmo vetor

Translação

- Usando a representação em coordenadas homogêneas num determinado referencial:

$$\mathbf{p} = [p_x \ p_y \ p_z \ 1]^T$$

$$\mathbf{p}' = [p'_x \ p'_y \ p'_z \ 1]^T$$

$$\mathbf{d} = [d_x \ d_y \ d_z \ 0]^T$$

Componente
w

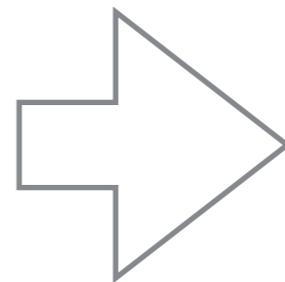
Esta expressão é em 4D e
exprime o conceito:
ponto = ponto + vetor

$$p'_x = p_x + d_x$$

$$p'_y = p_y + d_y$$

$$p'_z = p_z + d_z$$

$$p'_w = p_w + d_w$$



$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{d}$$

Translação

(Matriz de Transformação)

- Também se pode representar uma translação usando uma matriz \mathbf{T} , de 4x4, usando coordenadas homogêneas, de tal modo que:

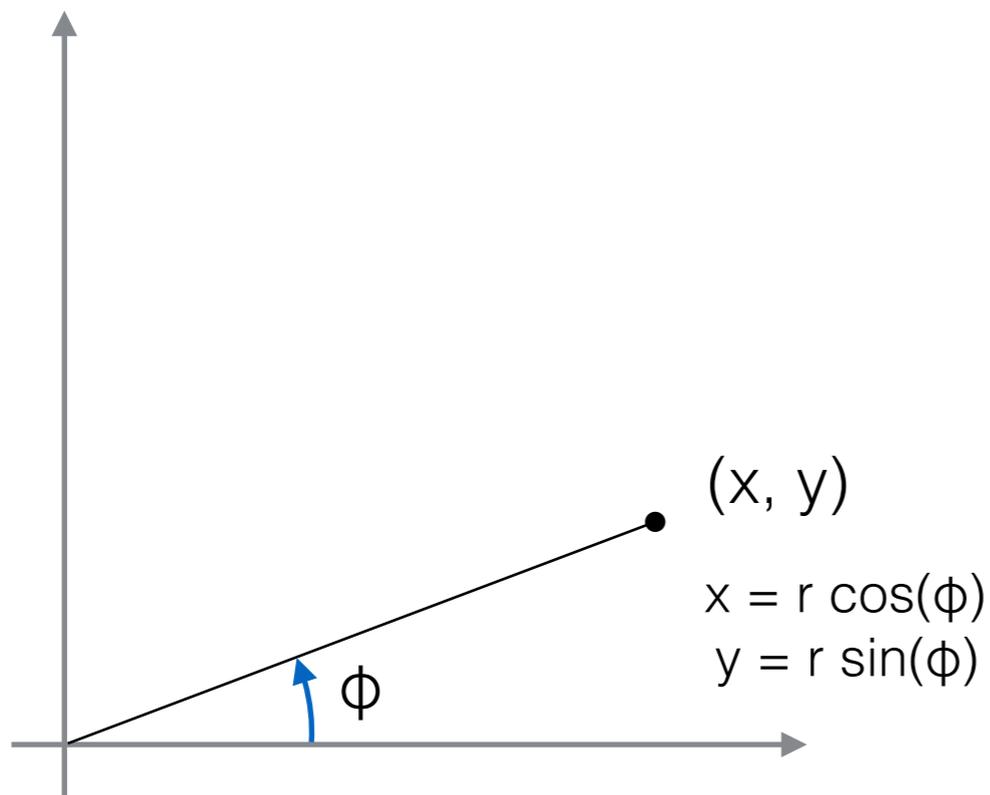
$$\mathbf{p}' = \mathbf{T}\mathbf{p}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(d_x, d_y, d_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- A vantagem desta abordagem é que todas as transformações afins se podem exprimir desta forma, podendo várias transformações ser concatenadas e guardadas numa única matriz.

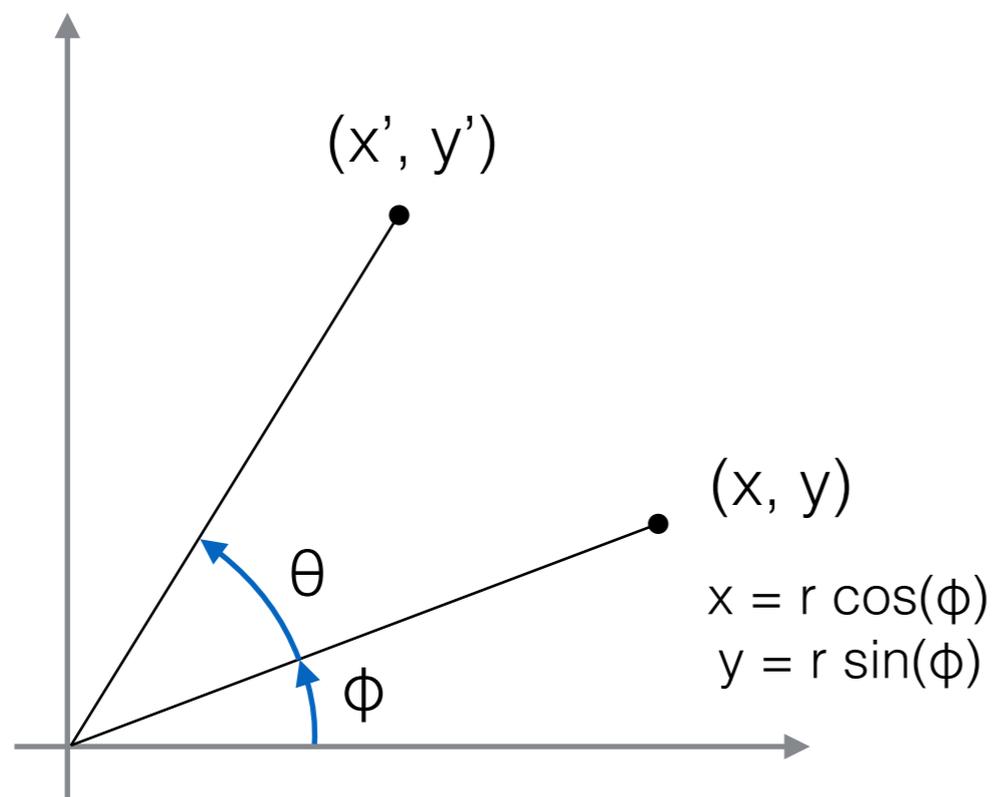
Rotação (2D)

- Considerando coordenadas polares de um ponto $P(x,y)=(r \cos(\phi), r \sin(\phi))$, na rotação em torno da origem de um ângulo θ , o raio mantém-se constante, aumentando o ângulo inicial em θ :



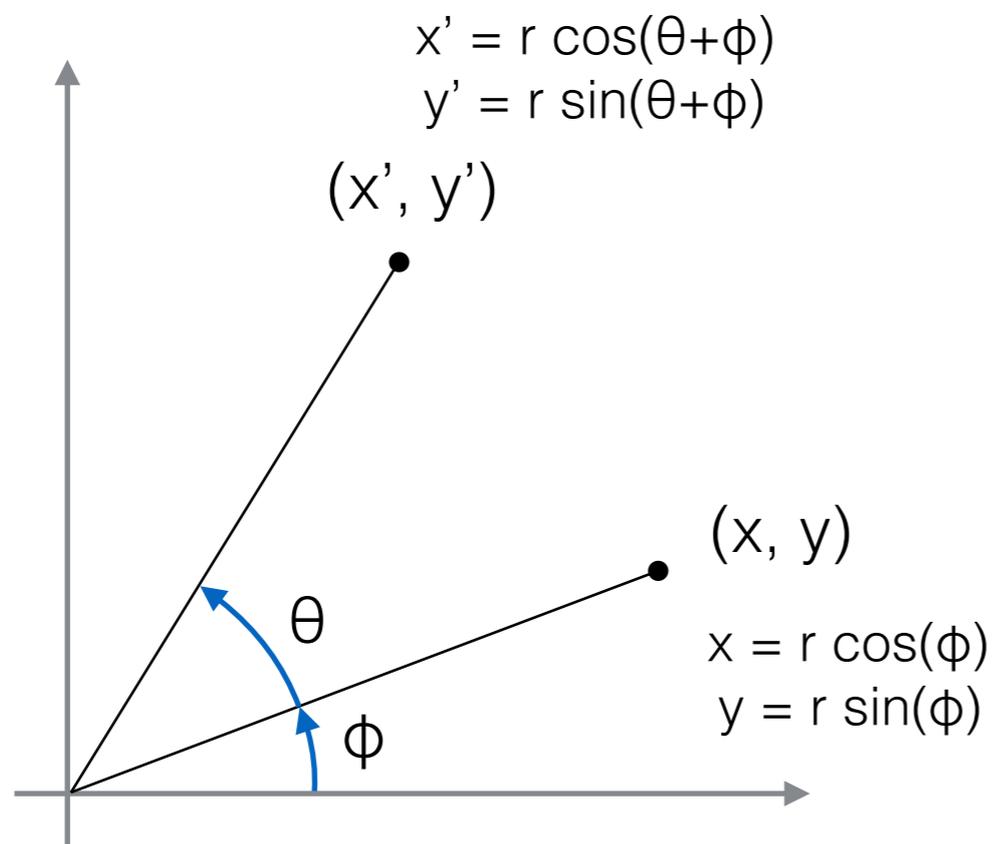
Rotação (2D)

- Considerando coordenadas polares de um ponto $P(r, \phi) = (r \cos(\phi), r \sin(\phi))$, na rotação em torno da origem de um ângulo θ , o raio mantém-se constante, aumentando o ângulo inicial em θ :



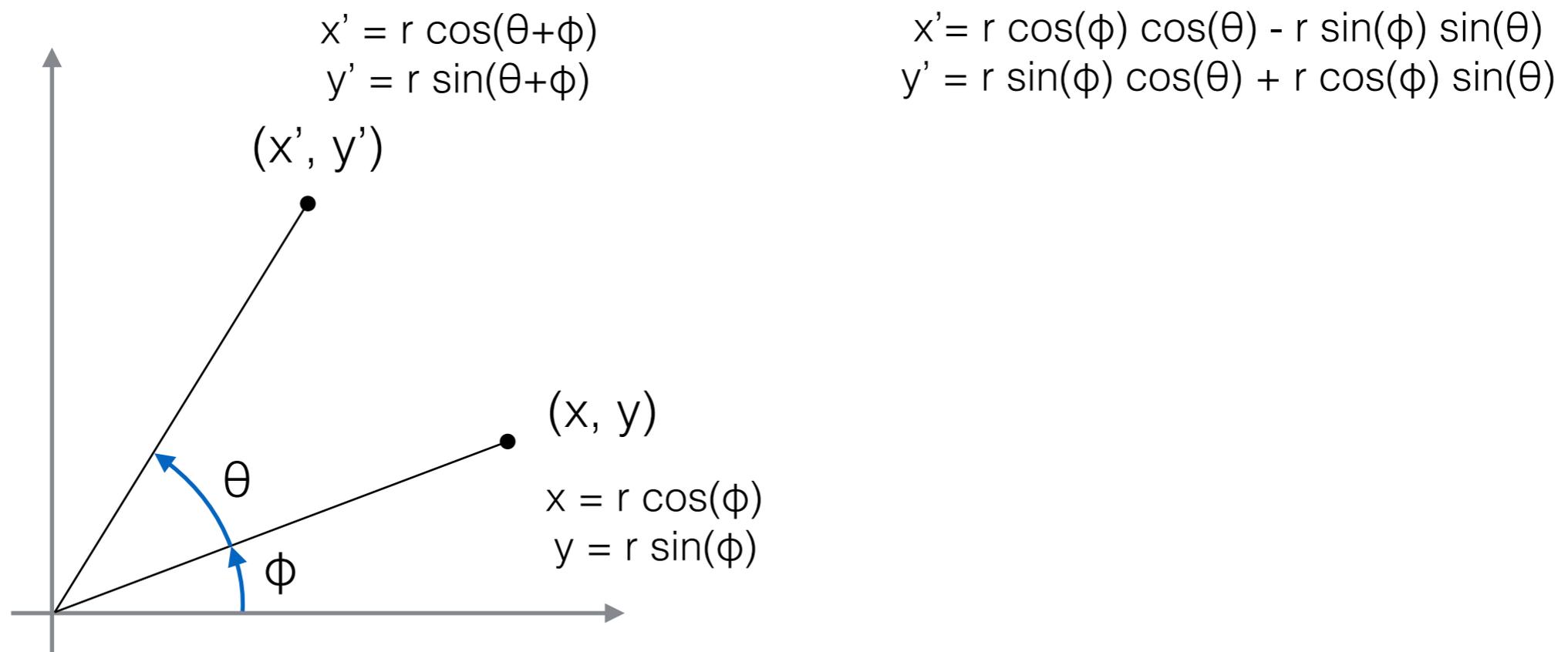
Rotação (2D)

- Considerando coordenadas polares de um ponto $P(r, \phi) = (r \cos(\phi), r \sin(\phi))$, na rotação em torno da origem de um ângulo θ , o raio mantém-se constante, aumentando o ângulo inicial em θ :



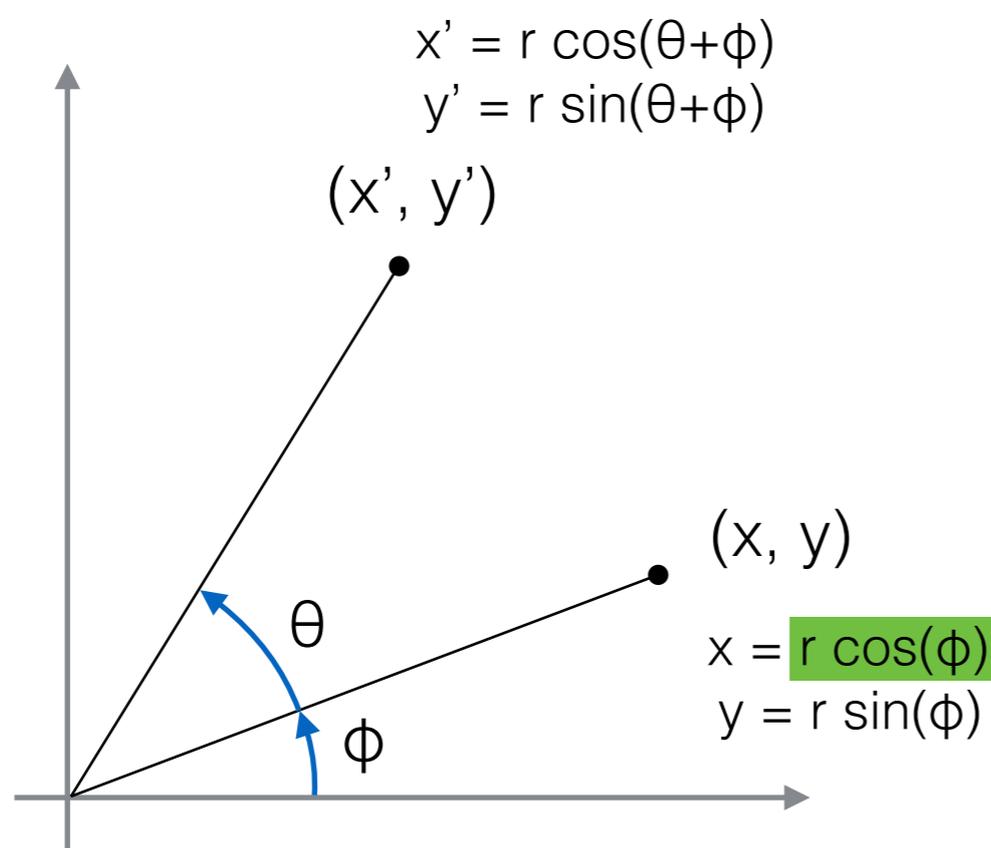
Rotação (2D)

- Considerando coordenadas polares de um ponto $P(r, \phi) = (r \cos(\phi), r \sin(\phi))$, na rotação em torno da origem de um ângulo θ , o raio mantém-se constante, aumentando o ângulo inicial em θ :



Rotação (2D)

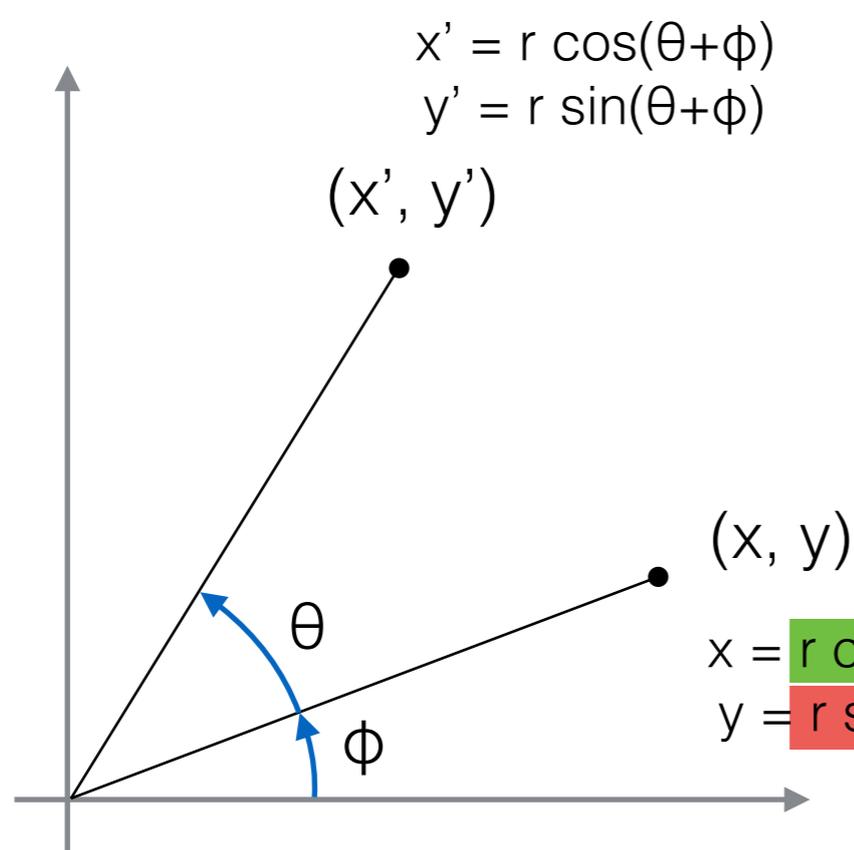
- Considerando coordenadas polares de um ponto $P(r, \phi) = (r \cos(\phi), r \sin(\phi))$, na rotação em torno da origem de um ângulo θ , o raio mantém-se constante, aumentando o ângulo inicial em θ :



$$\begin{aligned} x' &= r \cos(\phi) \cos(\theta) - r \sin(\phi) \sin(\theta) \\ y' &= r \sin(\phi) \cos(\theta) + r \cos(\phi) \sin(\theta) \end{aligned}$$

Rotação (2D)

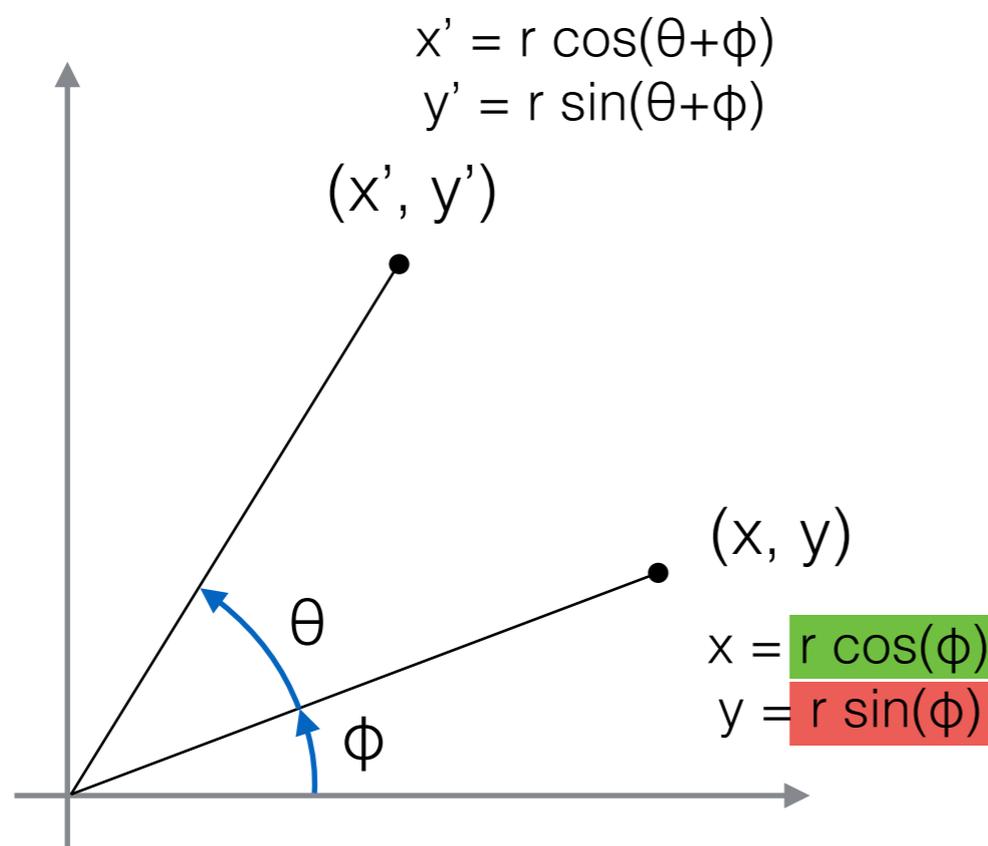
- Considerando coordenadas polares de um ponto $P(r, \phi) = (r \cos(\phi), r \sin(\phi))$, na rotação em torno da origem de um ângulo θ , o raio mantém-se constante, aumentando o ângulo inicial em θ :



$$x' = r \cos(\phi) \cos(\theta) - r \sin(\phi) \sin(\theta)$$
$$y' = r \sin(\phi) \cos(\theta) + r \cos(\phi) \sin(\theta)$$

Rotação (2D)

- Considerando coordenadas polares de um ponto $P(r, \phi) = (r \cos(\phi), r \sin(\phi))$, na rotação em torno da origem de um ângulo θ , o raio mantém-se constante, aumentando o ângulo inicial em θ :



$$x' = r \cos(\phi) \cos(\theta) - r \sin(\phi) \sin(\theta)$$
$$y' = r \sin(\phi) \cos(\theta) + r \cos(\phi) \sin(\theta)$$

$$x' = x \cos(\theta) - y \sin(\theta)$$
$$y' = x \sin(\theta) + y \cos(\theta)$$

Rotação em torno de Z (3D)

- Em 3D, a rotação em torno de Z deixa todos os pontos com o valor da coordenada Z inalterada.

- É equivalente à rotação 2D em planos de Z constante:

$$x' = x \cos(\theta) - y \sin(\theta)$$

$$y' = x \sin(\theta) + y \cos(\theta)$$

$$z' = z$$

- Em coordenadas homogêneas:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}_z(\theta)\mathbf{p} \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_z(\theta) \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes de rotação em 3D

- De forma análoga:

Rotação em torno de X não altera a coordenada X

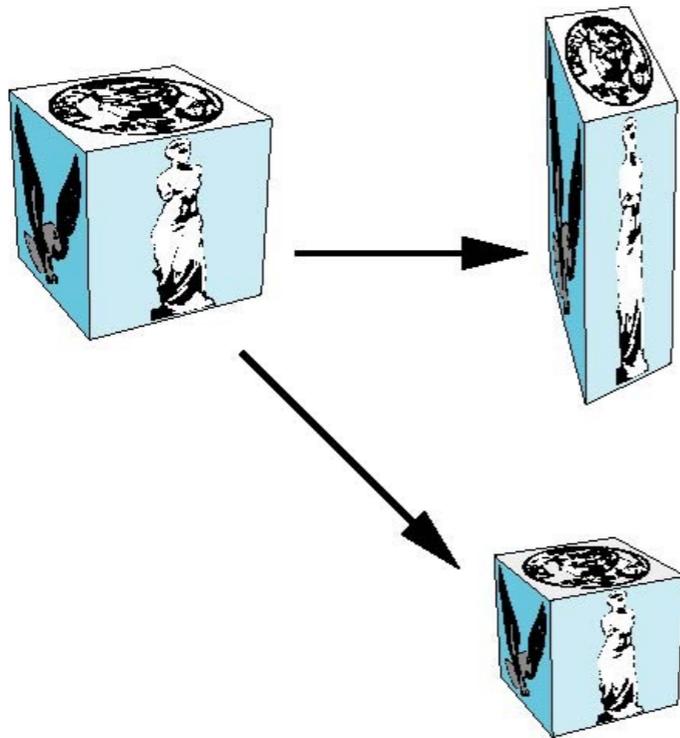
Rotação em torno de Y não altera a coordenada Y

$$R = R_x(\theta) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = R_y(\theta) \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = R_z(\theta) \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mudança de escala

- Expansão ou contração ao longo de cada um dos eixos, com o ponto fixo na origem



$$x' = S_x X$$

$$y' = S_y Y$$

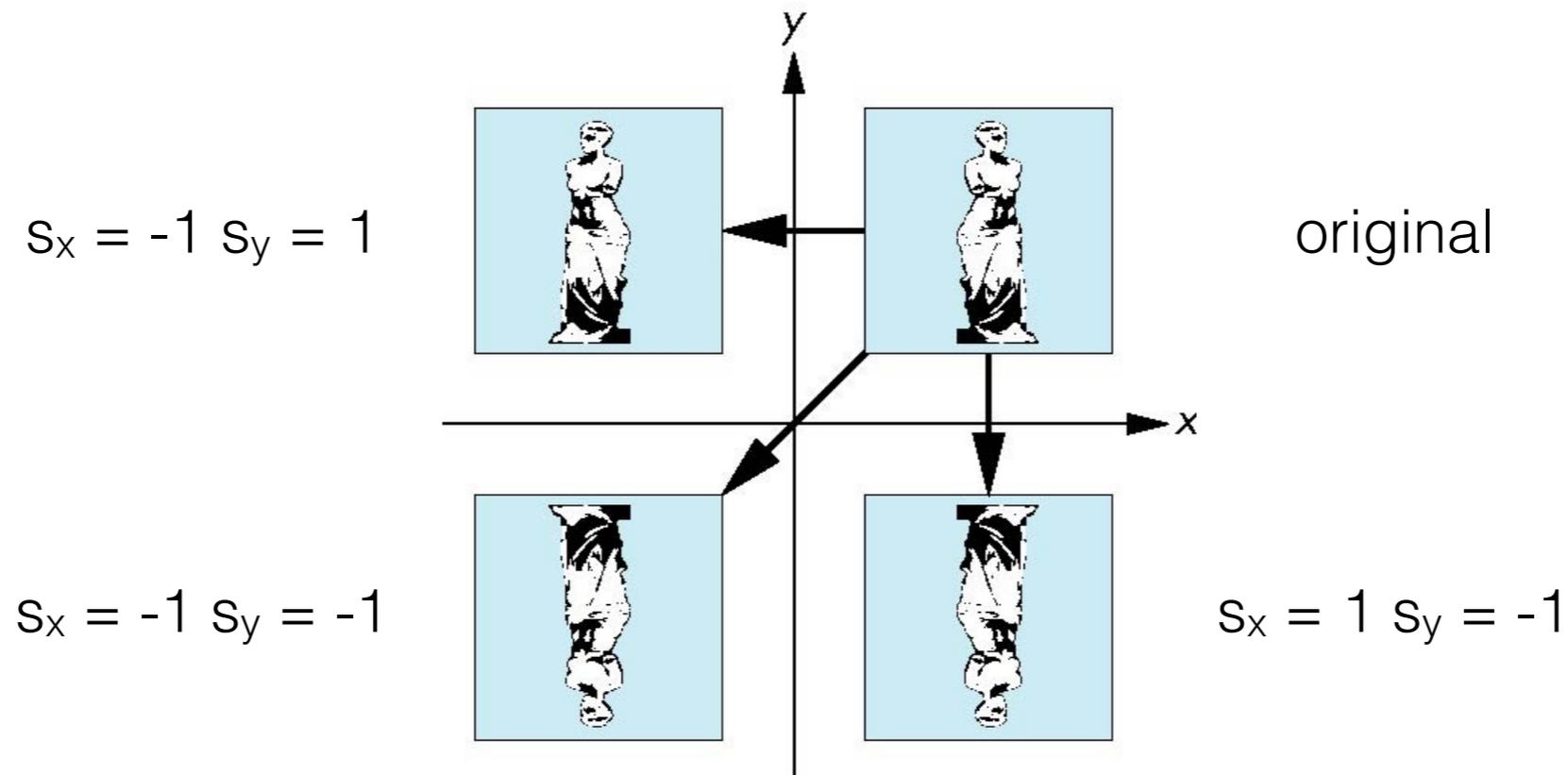
$$z' = S_z Z$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{S}\mathbf{p}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexões

- São um caso particular da mudança de escala (com fatores unitários negativos)



Transformações inversas

- As transformações inversas das transformações simples podem ser obtidas sem recorrer a fórmulas gerais:
 - Translação: $\mathbf{T}^{-1}(d_x, d_y, d_z) = \mathbf{T}(-d_x, -d_y, -d_z)$
 - Rotação: $\mathbf{R}^{-1}(\theta) = \mathbf{R}(-\theta)$
 $= \mathbf{R}^T(\theta)$, pq. $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$ e $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$
 - Escala: $\mathbf{S}^{-1}(s_x, s_y, s_z) = \mathbf{S}(1/s_x, 1/s_y, 1/s_z)$

Composição de transformações geométricas

- Podem formar-se transformações afins arbitrárias por composição das transformações simples: rotações, translação e mudança de escala
- Supondo que temos um conjunto grande de vértices \mathbf{p} , para transformar com uma composição de transformações simples $\mathbf{M}_n(\dots\mathbf{M}_2(\mathbf{M}_1\mathbf{p}))\dots$, o custo do cálculo de $\mathbf{M}=\mathbf{M}_n\dots\mathbf{M}_2.\mathbf{M}_1$, é negligenciável quando comparado com o custo $\mathbf{M}.\mathbf{p}$, para um grande número de vértices.
- O desafio é encontrar a composição certa para fazer o que se pretende numa dada aplicação.

Ordem de aplicação

- O produto de matrizes (a composição de transformações) é associativo, mas não é comutativo!

$$\mathbf{p}' = \mathbf{ABCp} = \mathbf{A(B(Cp))}$$

- Se se usassem vetores linha para representar os pontos, a transformação acima seria:

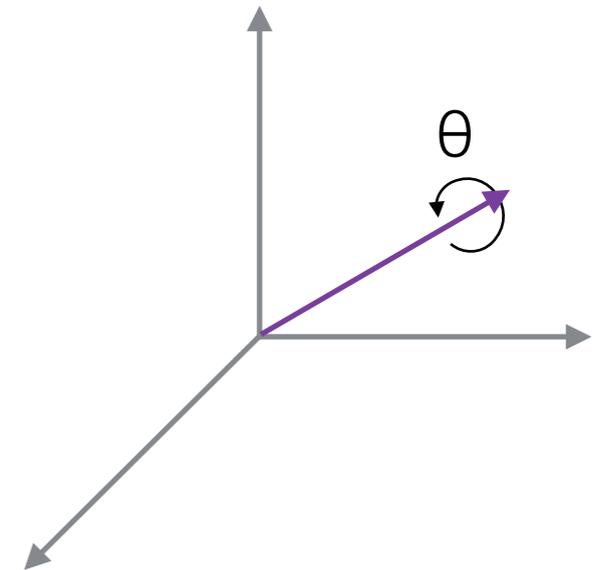
$$\mathbf{p}' = \mathbf{pC^T B^T A^T} = ((\mathbf{pC^T})\mathbf{B^T})\mathbf{A^T}$$

Rotação em torno de eixo arbitrário (que cruza a origem)

- Transformação complexa que pode ser decomposta em transformações simples
- Uma rotação de θ em torno dum eixo arbitrário pode ser decomposta em rotações em torno dos eixos x, y e z

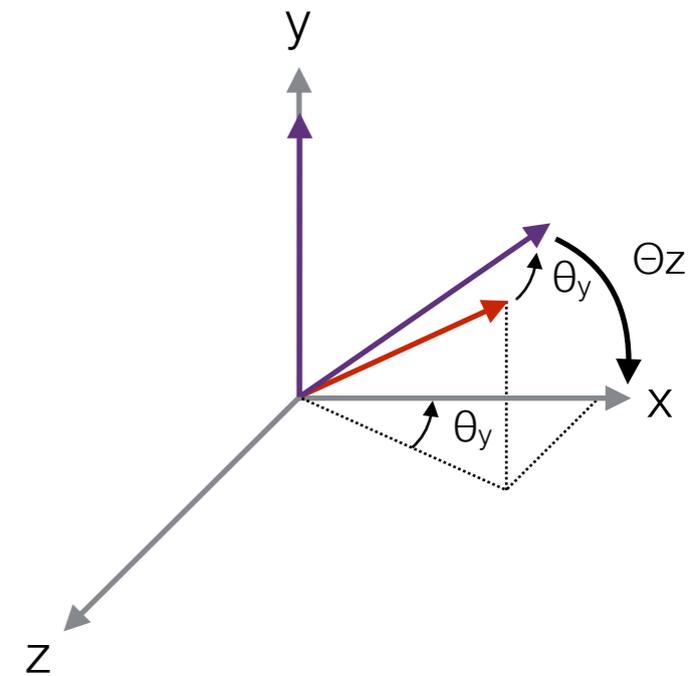
$$\mathbf{R}(\theta) = \mathbf{R}_z(\theta_z) \mathbf{R}_y(\theta_y) \mathbf{R}_x(\theta_x)$$

- Os ângulos θ_x , θ_y e θ_z denominam-se por ângulos de Euler.
- Embora as rotações não se possam trocar, é possível encontrar 3 outros ângulos de Euler, para outra ordem de aplicação das transformações, que produzem o mesmo efeito.



Rotação em torno de eixo arbitrário (que cruza a origem)

- Alternativamente, poder-se-ia deduzir uma expressão que faz a mesma transformação usando os seguintes passos:
 1. Rodar, segundo y, o vetor \mathbf{v} que passa pelo eixo de rotação, por forma colocá-lo no plano xy
 2. Rodar em z por forma a que o vector de 1 fique coincidente com o eixo x
 3. Rodar em torno do eixo x do valor θ
 4. Desfazer as rotações dos passos 1 e 2, pela ordem inversa.

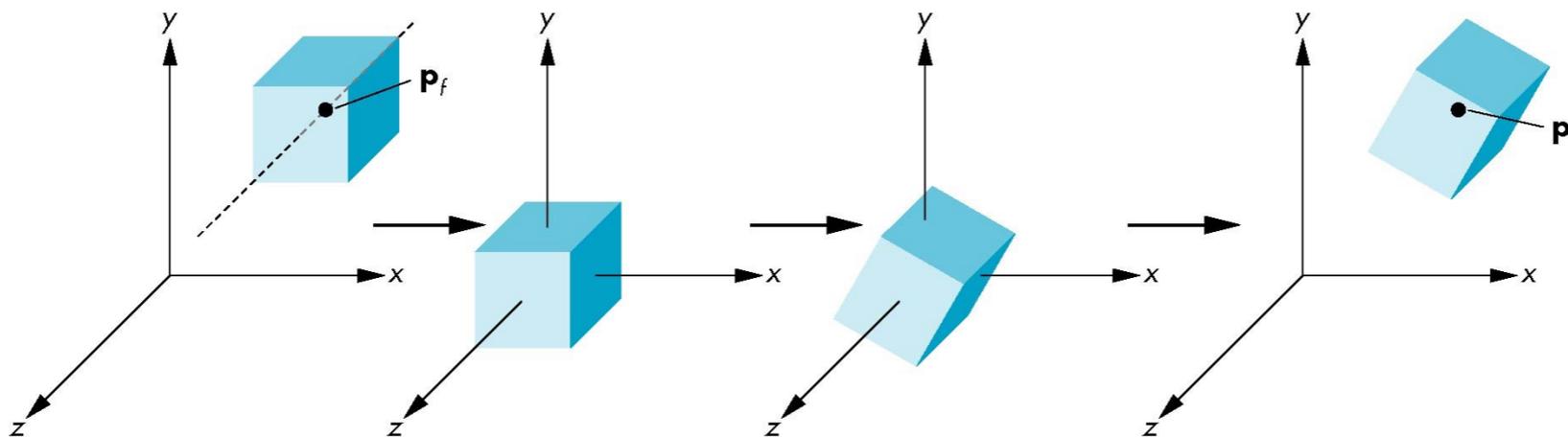


$$\mathbf{R}(\theta) = \mathbf{R}_y(-\theta_y) \mathbf{R}_z(-\theta_z) \mathbf{R}_x(\theta) \mathbf{R}_z(\theta_z) \mathbf{R}_y(\theta_y)$$

Rotação em torno dum eixo que não passa na origem

- Usa-se o resultado anterior, mas com a seguinte alteração:
 1. Mover um ponto (\mathbf{p}_f) do eixo para a origem
 2. Rodar $\mathbf{R}(\theta)$
 3. Mover o ponto de volta para a sua posição inicial

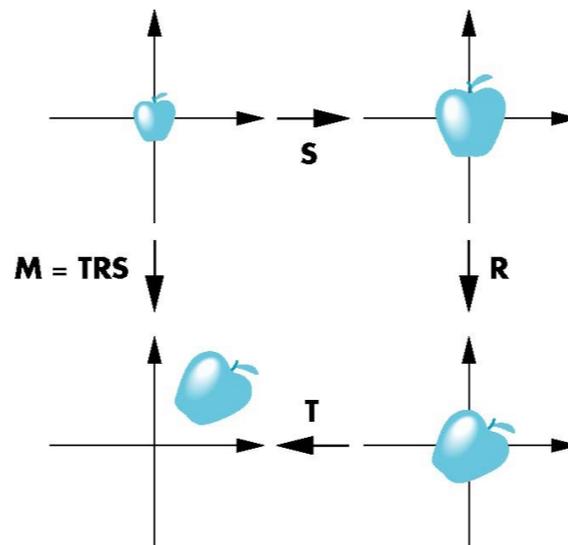
$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(\mathbf{p}_f)\mathbf{R}(\theta)\mathbf{T}(-\mathbf{p}_f)$$



Transformações de instanciação

- Em modelação, os objetos primitivos estão normalmente centrados na origem, orientados com os eixos principais e com um determinado tamanho
- Aos vértices desses objetos “primitivos” aplicam-se transformações que seguem muitas vezes o padrão:

- Escala
- Orientação
- Posicionamento

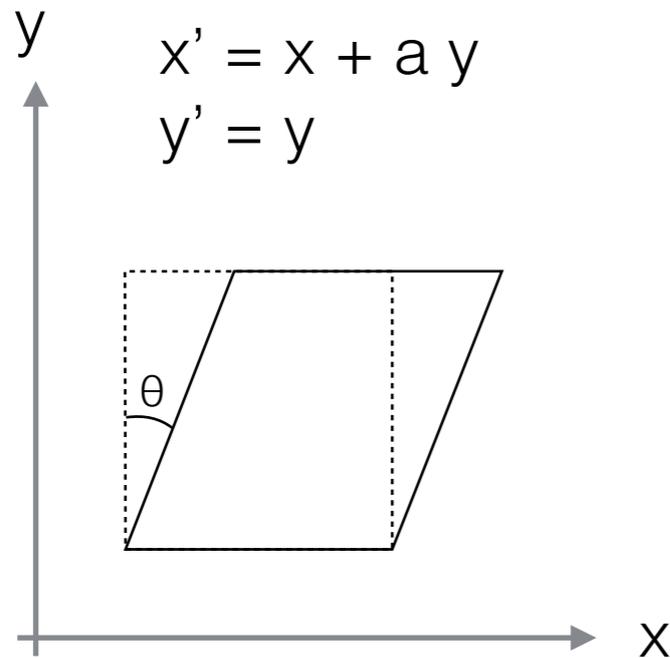


Transformação de Instanciação Comum

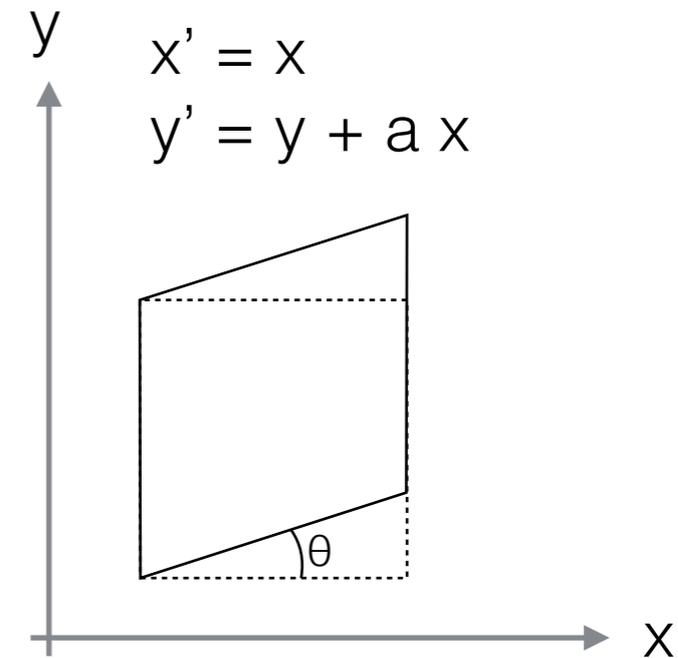
Transformações de instanciação

- Mas também é possível aplicar uma sequência arbitrária de transformações geométricas (acumulação), sem nenhuma ordem especial que não a definida pelo modelador.
- A maior parte do software adopta a ordem fixa TRS:
 - Blender
 - Unity
 - Maya
 - etc.

Deformação Transversa em 2D



$$a = \tan \theta$$



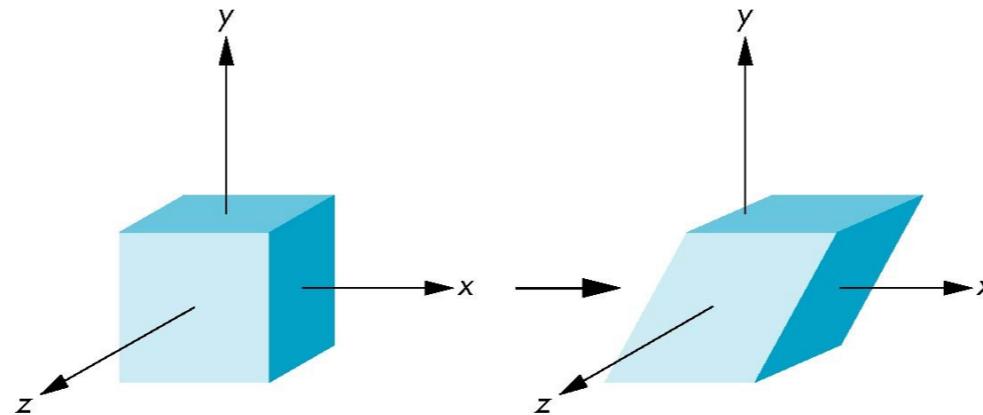
$$SH_y(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & \tan \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$SH_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tan \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota: usamos como índice o eixo que não sofre qualquer alteração

Deformação Transversa

- Exemplo dum caso particular em 3D



- A matriz de deformação transversa, para o caso geral, é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b & 0 \\ c & 1 & d & 0 \\ e & f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x + ay + bz$$

$$y' = y + cx + dz$$

$$z' = z + ex + fy$$

Operações comutativas

- Apesar de, no caso geral, a ordem das transformações ser importante, em alguns casos pode trocar-se a ordem das operações visto serem comutativas:

- $\mathbf{S}(a, b, c) \mathbf{S}(d, e, f) = \mathbf{S}(d, e, f) \mathbf{S}(a, b, c) = \mathbf{S}(ad, be, cf)$

- $\mathbf{T}(a,b,c) \mathbf{T}(d, e, f) = \mathbf{T}(d, e, f) \mathbf{T}(a, b, c) = \mathbf{T}(a+d, b+e, c+f)$

- $\mathbf{R}_i(\theta)\mathbf{R}_i(\phi) = \mathbf{R}_i(\phi)\mathbf{R}_i(\theta) = \mathbf{R}_i(\theta+\phi), i \in \{x,y,z\}$

- $\mathbf{R}_x(\theta) \mathbf{S}(a, k, k) = \mathbf{S}(a, k, k) \mathbf{R}_x(\theta)$

- $\mathbf{R}_y(\theta) \mathbf{S}(k, a, k) = \mathbf{S}(k, a, k) \mathbf{R}_y(\theta)$

- $\mathbf{R}_z(\theta) \mathbf{S}(k, k, a) = \mathbf{S}(k, k, a) \mathbf{R}_z(\theta)$



Escala uniforme em dois dos eixos e rotação no 3º eixo