

ALGORITMOS GENÉTICOS

CAP 4.1.4

Parcialmente adaptado de
<http://aima.eecs.berkeley.edu>

O que são algoritmos genéticos

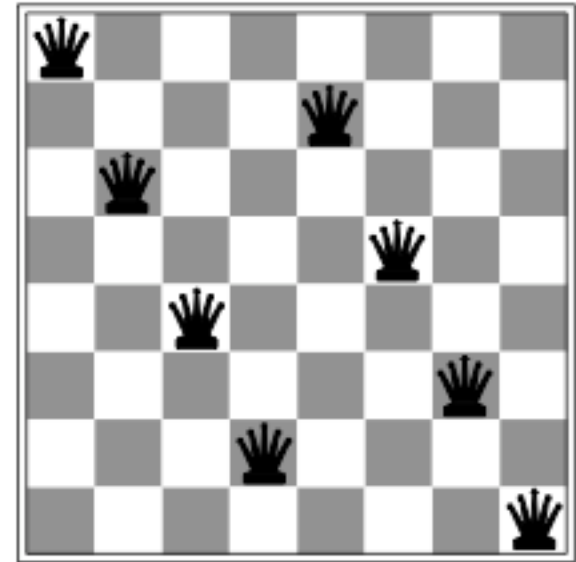
- Técnicas de optimização estocásticas inspiradas no processo de evolução por seleção natural
- Começam com uma população de indivíduos (ou cromossomas) gerados aleatoriamente
- Fazem evoluir em simultâneo a população (soluções alternativas) por intermédio de operadores de seleção, reprodução e mutação
- Os operadores genéticos permitem manter a diversidade da população e evitam que os AG convirjam prematuramente para um máximo local
- Com uma modelação correta do problema, a qualidade média das gerações sucessivas será aumentada, em particular a do seu melhor indivíduo

Conceitos básicos de AGs

- A população é constituída por um número geralmente fixo de indivíduos
- Cada cromossoma (ou indivíduo) é representado por uma cadeia de símbolos de um alfabeto finito, normalmente uma cadeia binária de 0s e 1s.
- Os cromossomas são constituídos por **genes** e os valores que cada gene pode tomar são os **alelos**.
- A qualidade de cada indivíduo é avaliada por uma função de mérito (**fitness function**) que influencia a probabilidade de seleção dos indivíduos para reprodução
- A reprodução combina dois indivíduos para gerar novo(s) indivíduo(s)
- Os filhos podem sofrer mutações genéticas aleatórias no seu cromossoma antes de serem colocados na população (geração seguinte)
- Uma geração pode ser substituída integralmente pelos seus descendentes ou manter alguns dos seus indivíduos mais aptos.

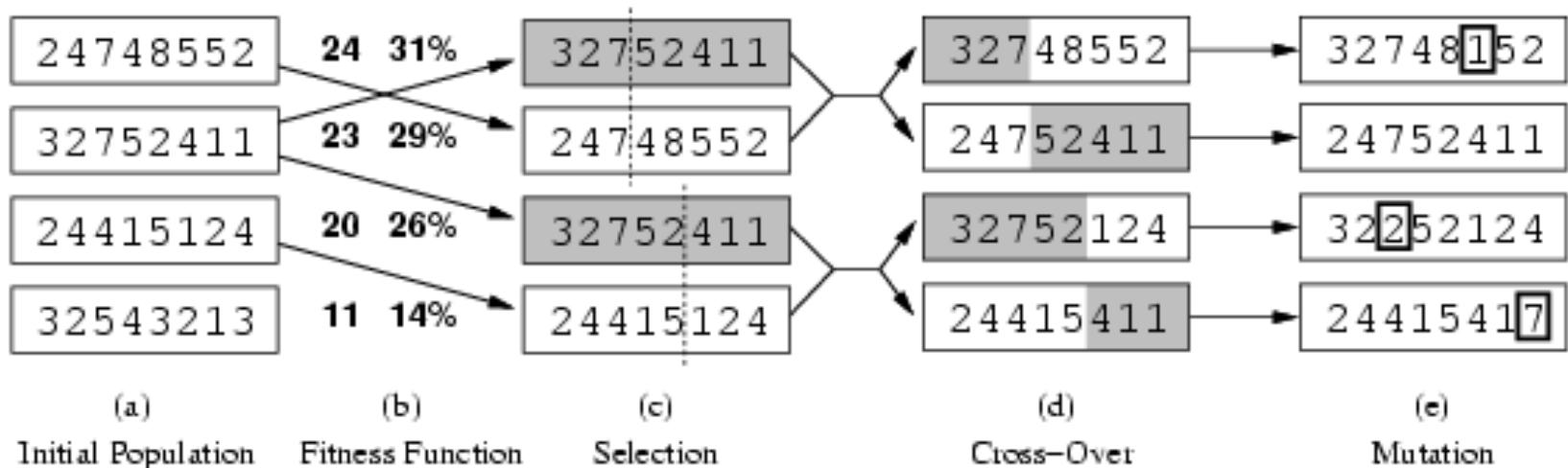
As rainhas novamente

- Podemos representar um estado por um cromossoma constituído por N-genes, em que cada alelo corresponde à posição ocupada pela rainha respectiva:



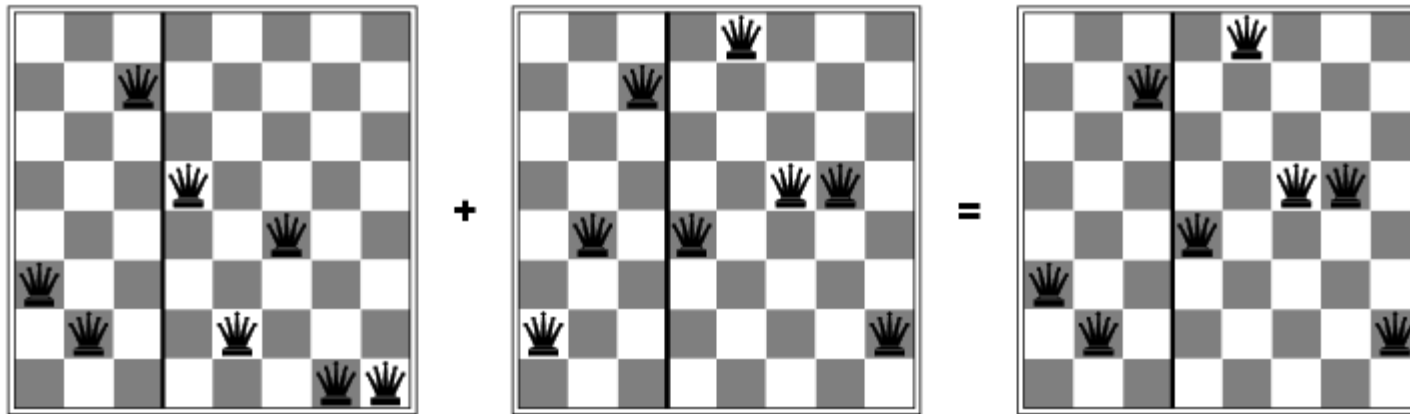
Alfabeto	Cromossoma							
{0,1}	111	101	011	001	110	100	010	000
{1,2,3,4,5,6,7,8}	8	6	4	2	7	5	3	1

Funcionamento do AG



- Função de mérito: número de pares de rainhas que não se atacam (min = 0, max = $8 \times 7/2 = 28$)
- O indivíduo j é selecionado para reprodução com probabilidade $P(x_j) = \frac{f(x_j)}{\sum_{i=1}^k f(x_i)}$
- Neste exemplo,
 - $24/(24+23+20+11) = 31\%$
 - $23/(24+23+20+11) = 29\%$ etc

Operação de recombinação



O locus (ponto de corte) é escolhido aleatoriamente:

Progenitores	Descendência
32752411	32748552
24748552	24752411

1 ponto de corte

Progenitores	Descendência
32752411	22758451
24748552	34742512

Uniforme com máscara 01110101

Outros métodos permitem a reprodução com N pontos de corte, mas normalmente melhores resultados são obtidos com a recombinação uniforme, em que é criada aleatoriamente uma máscara para copiar o material genético.

Operação de mutação

- Alteração aleatória de um valor dos genes, com uma probabilidade baixa (0.001 valor típico)
- Evita que o algoritmo genético fique preso em máximos locais

Maximização de funções

- Como fazer para encontrar o máximo da função $f(x) = x \cdot \sin(10\pi x) + 1.0$ com precisão de 6 casas decimais no intervalo $[-1..2]$?
- A função de mérito é simplesmente a função que pretendemos maximizar
- Serão necessários 22 bits:
 - $2097152 = 2^{21} < 3\,000\,000 < 2^{22} = 4194304$
- O valor correspondente de x é obtido por simples aritmética a partir do número em decimal representado pelo indivíduo i :
 - $x = -1.0 + \text{decimal}(i) \cdot (1 - (-2)) / (2^{22} - 1) = -1.0 + \text{decimal}(i) \cdot 3 / (4194303)$
- Por exemplo, o cromossoma 100010111011010100011 representa o valor de $x=0,637197$
 - $x = -1.0 + (2\,288\,967) \cdot 3 / (4194303) = 0,637197$
- Podem experimentar o algoritmo com a aplicação disponibilizada em <http://www.obitko.com/tutorials/genetic-algorithms/example-3d-function.php>

Uma implementação de AG

```
function GENETIC-ALGORITHM(problem, FITNESS-FN) returns an individual
  inputs: population, a set of individuals
           FITNESS-FN, a function that measures the fitness of an individual
  repeat
    new_population  $\leftarrow$  empty set
    loop for i from 1 to SIZE(population) do
      x  $\leftarrow$  RANDOM-SELECTION(population, FITNESS-FN)
      y  $\leftarrow$  RANDOM-SELECTION(population, FITNESS-FN)
      child  $\leftarrow$  REPRODUCE(x, y)
      if (random number  $\leq$  mutation probability) then child  $\leftarrow$  MUTATE(child)
      add child to new_population
    population  $\leftarrow$  new_population
  until some individual is fit enough or enough time has elapsed
  return best individual in population, according to FITNESS-FN
```

```
function REPRODUCE(x, y) returns an individual
  inputs: x, y, parent individuals
  n  $\leftarrow$  LENGTH(x)
  c  $\leftarrow$  random number from 1 to n
  return APPEND(SUBSTRING(x,1,c), SUBSTRING(y,c+1,n))
```

Outra implementação de AG

```
function GENETIC-ALGORITHM(problem, FITNESS-FN) returns an individual
  inputs: population, a set of individuals
           FITNESS-FN, a function that measures the fitness of an individual
  repeat
    new_population  $\leftarrow$  empty set
    loop for i from 1 to SIZE(population)/2 do
      x  $\leftarrow$  RANDOM-SELECTION(population, FITNESS-FN)
      y  $\leftarrow$  RANDOM-SELECTION(population, FITNESS-FN)
      if (random number  $\leq$  crossover probability) then
        child1, child2  $\leftarrow$  REPRODUCE(x, y)
      else
        child1, child2  $\leftarrow$  x, y
      endif
      if (random number  $\leq$  mutation probability) then child1  $\leftarrow$  MUTATE(child1)
      if (random number  $\leq$  mutation probability) then child2  $\leftarrow$  MUTATE(child2)
      add child1 and child2 to new_population
    population  $\leftarrow$  new_population
  until some individual is fit enough or enough time has elapsed
  return best individual in population, according to FITNESS-FN
```

Valores empíricos

- Para grandes populações (100 indivíduos)
 - Probabilidade de recombinação 0.6
 - Probabilidade de mutação 0.001
- Para populações pequenas (30 indivíduos)
 - Probabilidade de recombinação 0.9
 - Probabilidade de mutação 0.01

Outros operadores de selecção

- amostragem universal estocástica
 - Mecanismo para obter de uma vez só **todos** os indivíduos para reprodução.
- por posição
 - Ordenam-se os indivíduos por posição, utilizando esta posição para atribuir as probabilidades de selecção.
- por torneio
 - Seja k um parâmetro entre 0 e 1. Seleccionam-se dois indivíduos aleatoriamente da população. Gera-se um número aleatório r . Se $r < k$ fica-se com o melhor indivíduo; caso contrário selecciona-se para reprodução o pior deles.
- estado estável
 - Substitui-se uma percentagem dos piores indivíduos
- por truncatura
 - Só se deixa reproduzir uma percentagem dos melhores indivíduos.
- Elitista
 - Retém-se sempre um pequeno número dos melhores indivíduos.

O caixeiro viajante

- O problema do caixeiro viajante requer cuidados especiais para a sua resolução com algoritmos genéticos
 - Representação dos cromossomas
 - Operador de recombinação
 - Operador de mutação

Cromossoma para o TSP

- A representação natural percorre a uma lista ordenada de cidades para representar o circuito

1	8	3	4	6	2	7	9	5
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Problemas a resolver

- A dificuldade essencial é o operador de recombinação dado que qualquer dos métodos vistos anteriormente podem criar indivíduos inviáveis (abortos...)
- Duas aproximações possíveis:
 - Reparar os indivíduos
 - Garantir que a recombinação só gera indivíduos válidos

Operador de recombinação PMX

- Partially mapped crossover (PMX)
- Escolhe uma subsequência a partir de um dos pais e preserva a ordem, na medida das possibilidades, do outro progenitor.
- Seleccionam-se dois pontos de corte
 - $p1 = 1\ 2\ 3\ |\ 4\ 5\ 6\ 7\ |\ 8\ 9$
 - $p2 = 4\ 5\ 2\ |\ 1\ 8\ 7\ 6\ |\ 9\ 3$
- A selecção induz o conjunto de equivalências $4 \leftrightarrow 1$, $5 \leftrightarrow 8$, $6 \leftrightarrow 7$ e $7 \leftrightarrow 6$.
- Os segmentos entre os pontos são trocados
 - $f1 = ___|\ 1\ 8\ 7\ 6\ |\ ___$
 - $f2 = ___|\ 4\ 5\ 6\ 7\ |\ ___$
- Copiam-se os restantes valores que não introduzam repetições
 - $f1 = _\ 2\ 3\ |\ 1\ 8\ 7\ 6\ |\ _\ 9$
 - $f2 = __\ 2\ |\ 4\ 5\ 6\ 7\ |\ 9\ 3$
- Recorre-se às equivalências para substituir os restantes valores
 - $f1 = 4\ 2\ 3\ |\ 1\ 8\ 7\ 6\ |\ 5\ 9$ (porque $4 \leftrightarrow 1$ e $5 \leftrightarrow 8$)
 - $f2 = 1\ 8\ 2\ |\ 4\ 5\ 6\ 7\ |\ 9\ 3$ (porque $4 \leftrightarrow 1$ e $5 \leftrightarrow 8$)

Operador de recombinação OX

- Order crossover (OX)
- Seleciona-se uma subsequência e mantém-se a ordem do outro progenitor.
- Selecionam-se dois pontos de corte
 - p1=1 2 3 | 4 5 6 7 | 8 9
 - p2=4 5 2 | 1 8 7 6 | 9 3
- Copiam-se os segmentos para os descendentes
 - f1=___ | 4 5 6 7 | __
 - f2=___ | 1 8 7 6 | __
- Copiam-se os valores do outro progenitor sequencialmente a partir do segundo ponto de corte, evitando repetições de cidades
 - f1=2 1 8 | 4 5 6 7 | 9 3
 - f2=3 4 5 | 1 8 7 6 | 9 2

Outras variantes do OX

- Seleccionam-se dois pontos de corte
 - p1=1 2 3 | 4 5 6 7 | 8 9
 - p2=4 5 2 | 1 8 7 6 | 9 3
- Copiam-se os segmentos para os descendentes
 - f1=___ | 4 5 6 7 | ___
 - f2=___ | 1 8 7 6 | ___
- Em vez de se começar a partir do segundo ponto de corte começa-se pela ordem do outro progenitor desde o início
 - f1=2 1 8 | 4 5 6 7 | 9 3
 - f2=2 3 4 | 1 8 7 6 | 5 9
- Em vez de utilizar uma subsequência, pode-se gerar uma máscara aleatória para seleccionar as cidades a manter para a geração seguinte.

Operador de recombinação CX

- Cycle crossover (CX) – não necessita de pontos de corte
 - p1=1 2 3 4 5 6 7 8 9
 - p2=4 1 2 8 7 6 9 3 5
- Começa-se na primeira cidade de p1
 - f1=1 _ _ _ _ _ _ _ _
- A respectiva em p2 é a 4, colocando-se essa cidade na posição de p1
 - f1=1 _ _ 4 _ _ _ _ _
- A respectiva em p2 é a 8, colocando-se essa cidade na posição de p1
 - f1=1 _ _ 4 _ _ _ 8 _
- Itera-se até introduzir um ciclo (cidade já colocada)
 - f1=1 2 3 4 _ _ _ 8 _
- Preenchem-se as restantes a partir da sequência no outro progenitor:
 - f1=1 2 3 4 7 6 9 8 5

Operadores de mutação

- Inversão (inverte subsequência)
 - 1 2 | 3 4 5 6 | 7 8 9
 - 1 2 | 6 5 4 3 | 7 8 9
- Inserção (move arbitrariamente 1 cidade)
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 - 1 2 7 3 4 5 6 8 9
- Deslocamento (move subsequência)
 - 1 2 3 4 5 | 6 7 8 | 9
 - 1 | 6 7 8 | 2 3 4 5 9
- Troca (troca duas cidades)
 - 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 - 7 2 3 4 5 6 1 8 9

Algoritmos meméticos

- Após aplicação de qualquer um dos operadores genéticos e mesmo da inicialização da população, efetua-se uma procura local
- Estes algoritmos são designados por algoritmos meméticos
- Por exemplo, pode-se aplicar o algoritmo trepa-colinas para melhorar o indivíduo
 - Considerando todas as trocas de duas ou três cidades e escolhendo a melhor alternativa até atingir um mínimo local
- É preciso ter cuidado na escolha do operador de mutação para não efetuar as mesmas operações que a procura local.
- Uma possibilidade é não efetuar procura local após mutação.

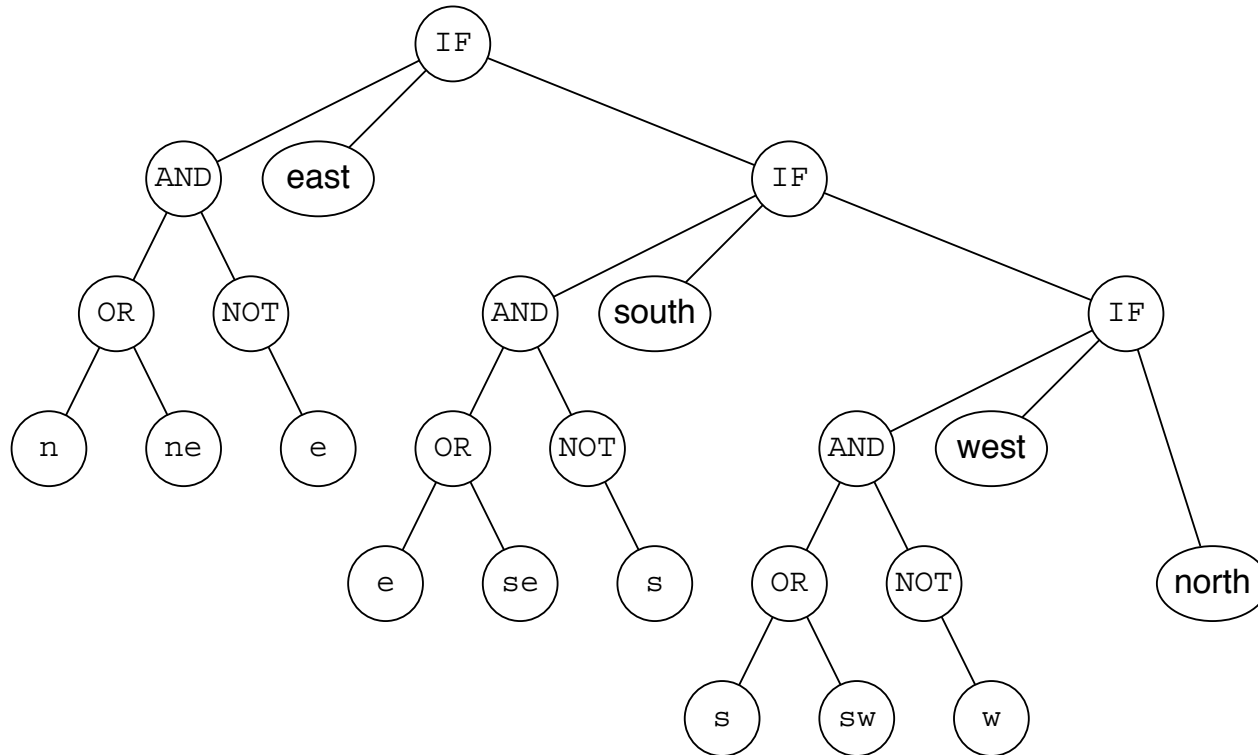
Outros algoritmos de inspiração evolucionária

- Programação Genética
 - Evolução de programas
- Estratégias Evolutivas
 - Evolução de vectores reais com distribuições normais para resolução de problemas de Engenharia
 - O operador dominante é a mutação
- Programação Evolutiva
 - Os indivíduos são máquinas de estados

Programação Genética

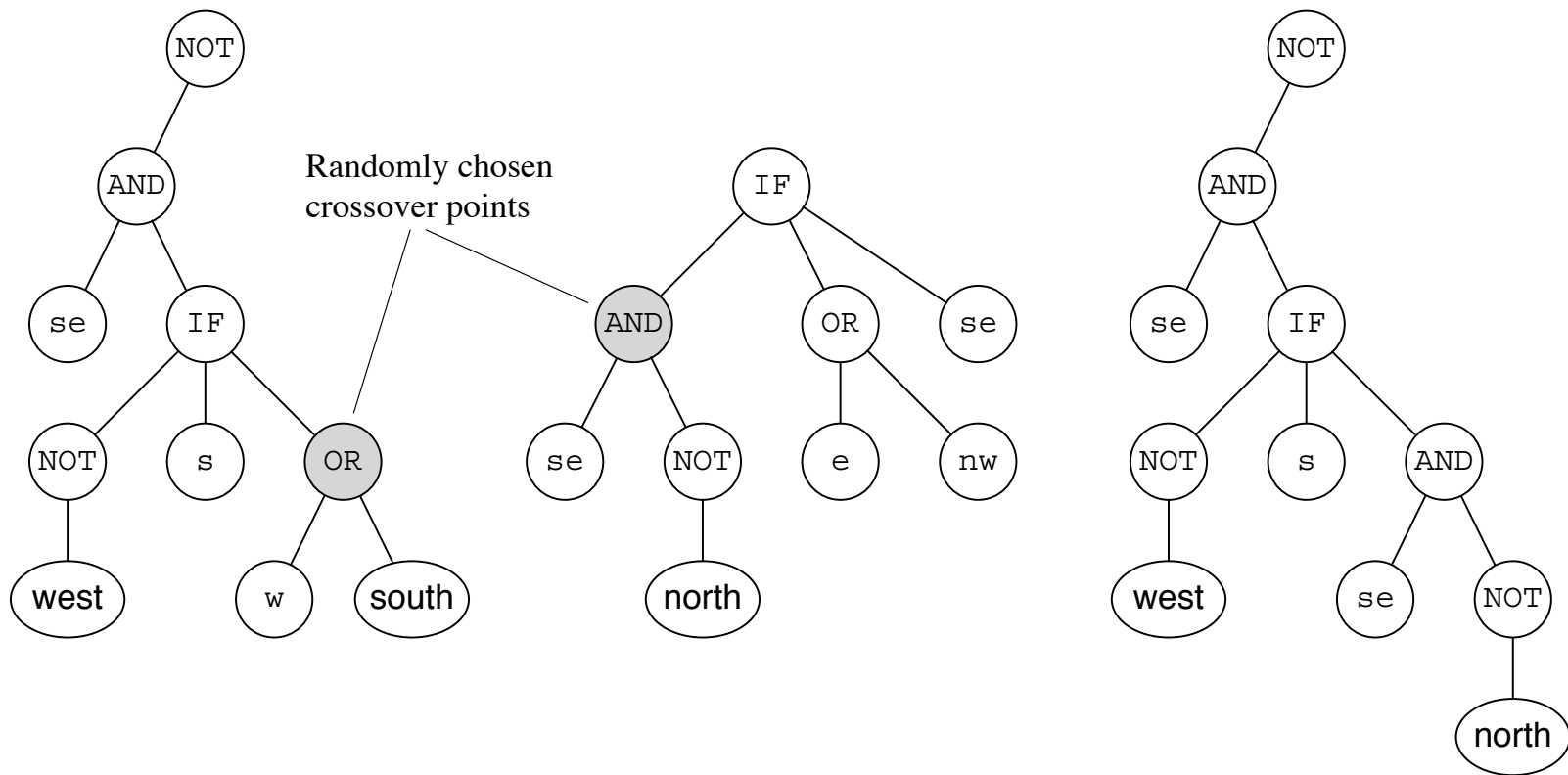
- Cada indivíduo é um programa. A qualidade de um indivíduo é obtida por execução do programa relativamente a um conjunto de testes.
- O material genético encontra-se estruturado em árvore
- O material genético é de tamanho variável durante o processo evolutivo
- O operador de recombinação troca subárvores entre os dois progenitores, preservando a sintaxe
- O operador de mutação substitui uma subárvore por outra construída aleatoriamente
- A população inicial é obtida pela geração aleatória de funções e terminais que constituem os programas.

Evolução de seguidores de paredes [Nilsson]



```
(IF (AND (OR (n) (ne)) (NOT (e)))  
  (east)  
  (IF (AND (OR (e) (se)) (NOT (s)))  
    (south)  
    (IF (AND (OR (s) (sw)) (NOT (w)))  
      (west)  
      (north)))))
```

Recombinação de programas

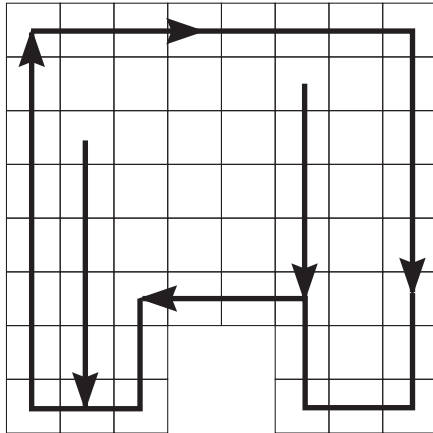


Mother program

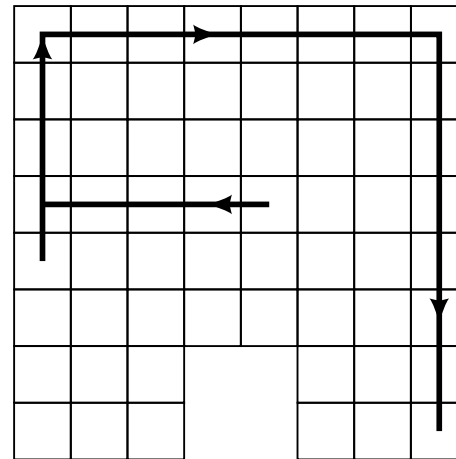
Father program

Child program

Exemplo de programas gerados



```
(IF (IF (IF (se)(0)(ne))
  (OR (se)(east))
  (IF (OR (AND (e)(0))
    (sw))
    (OR (sw)(0))
    (AND (NOT (NOT (AND (s)(se))))
      (se))))))
(IF (w)
  (OR (north)
    (NOT (NOT (s))))
  (west))
(NOT (NOT (NOT (AND (IF (NOT (south))
  (se))
```



```
(IF (AND (NOT (e))
  (IF (e)(s)(nw)))
  (OR (IF (1)(e)(south))
    (IF (north)(east)(nw)))
  (IF (OR (AND (0)(north))
    (AND (e)(IF (e)
      (IF (se)(south)(east))
      (north))))))
  (AND (e)
    (NOT (IF (s)(sw)(e))))
  (OR (OR (AND (nw)(east))
    (west))
```

Conclusões

- Grande impacto em problemas de optimização, nomeadamente problemas de escalonamento, desenho de circuitos integrados, classificação, simulação e controlo.
- Algoritmos que suscitam muito interesse, provavelmente por causa das suas origens na teoria da evolução.
- Falta estudar condições que identifiquem claramente as situações em que os algoritmos genéticos têm bom comportamento.

PROCURA LOCAL EM ESPAÇOS CONTÍNUOS CAP 4.2

Parcialmente adaptado de
<http://aima.eecs.berkeley.edu>

Procura local em espaços contínuos

- Muitos problemas podem ser representados como maximização/minimização de funções multidimensionais em $\mathbb{R}^n$.
- Existem inúmeras técnicas, mas iremos abordar brevemente aquelas baseadas no gradiente de uma função $f(x_1, \dots, x_n)$ que se supõe diferenciável em $\mathbb{R}^n$.
- O gradiente da função f , denotado por ∇f define-se por:

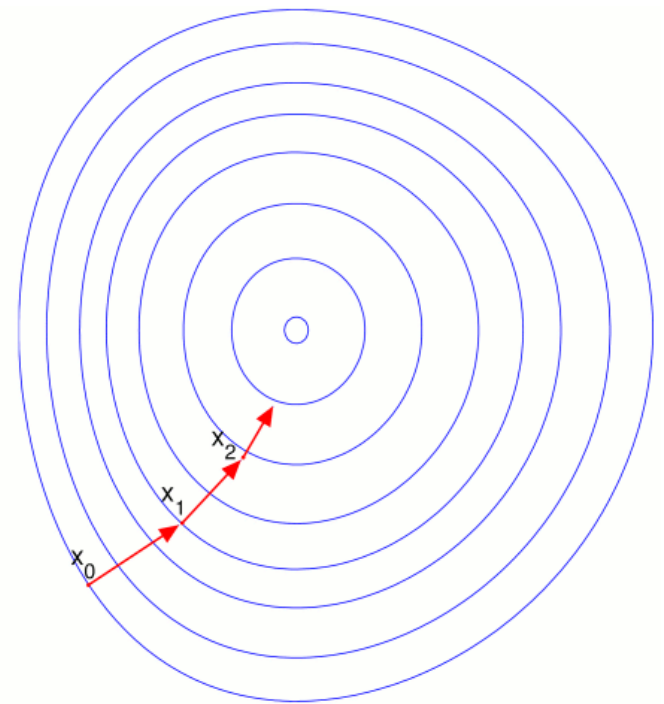
$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Subida pelo gradiente

- Partindo de uma solução inicial x_0
- Executa-se iterativamente o algoritmo

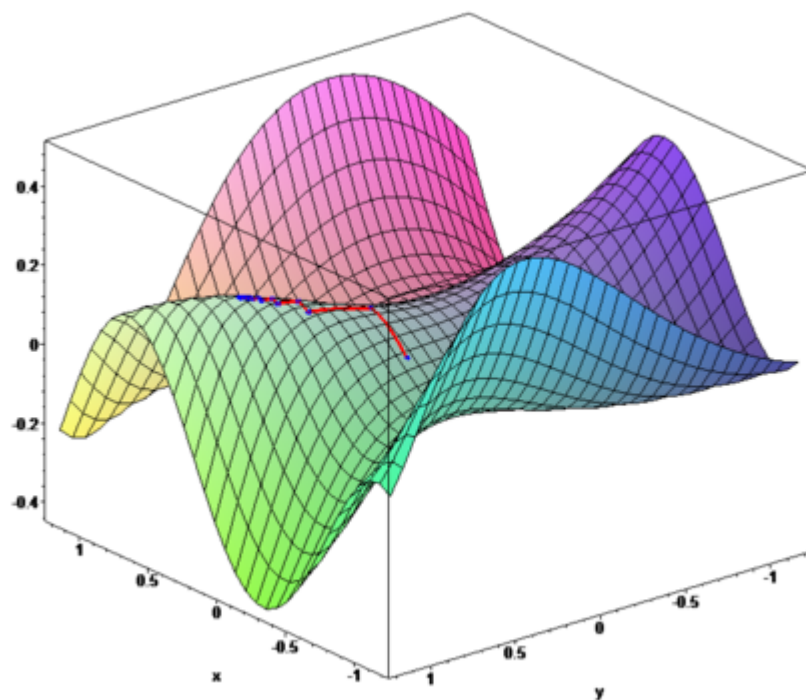
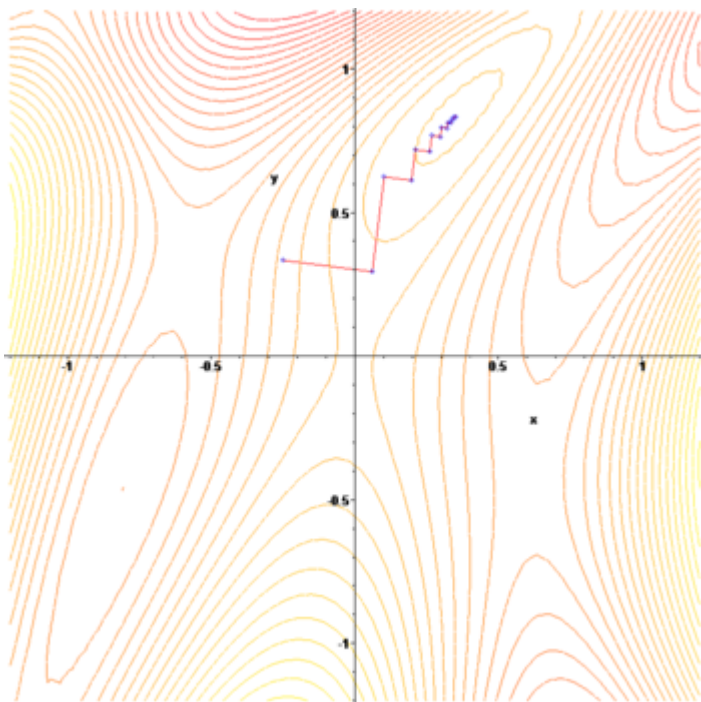
$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \gamma_n \nabla F(\mathbf{x}_n), \quad n \geq 0.$$

- Até que a variação entre $|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n|$ atinja um erro predeterminado.
- Podemos variar em cada passo o parâmetro γ_n , que deve ser suficientemente pequeno



Exemplo: maximização de função

$$F(x, y) = \sin\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}y^2 + 3\right) \cos(2x + 1 - e^y)$$

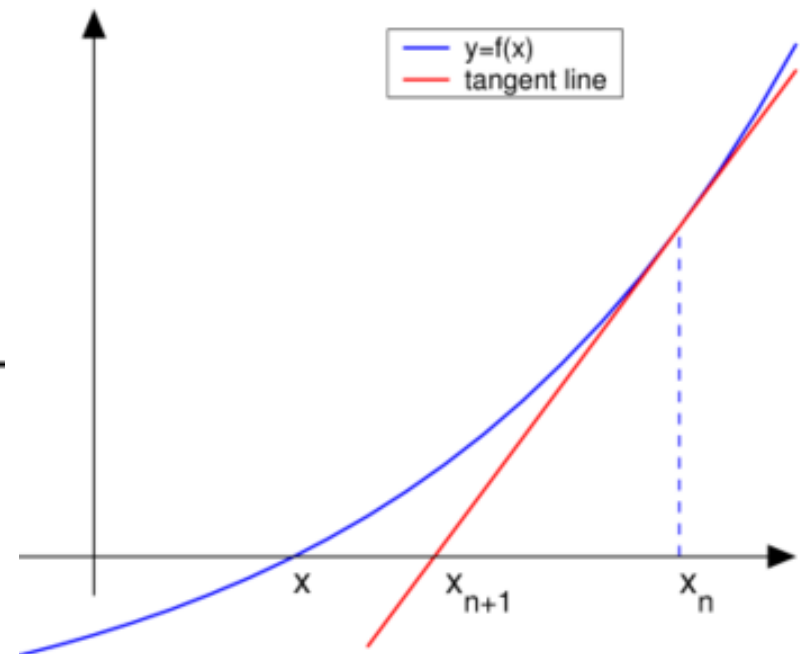


Método de Newton-Raphson

- O método de Newton-Raphson é utilizado para obter as raízes de $f(x)=0$.
- O método para funções reais corresponde a iterar

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- Para encontrar os extremos (máximos ou mínimos) tem de se resolver a equação $f'(x) = 0$



Optimização com método de Newton-Raphson

- Para o caso de funções reais, iterar

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}, \quad n \geq 0$$

- Para o caso de funções em $\mathbb{R}^n$, generaliza-se a fórmula de aproximação para

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \gamma [Hf(\mathbf{x}_n)]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_n).$$

- A matriz Hessiana H_f contém as derivadas parciais de segunda ordem de f , isto é
 $H_{ij} = \partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$