FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

INTRODUÇÃO À INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Soluções dos exercícios

Programação Linear / Algoritmo Simplex

1. (a) $(x^*, y^*) = \left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad F^* = -2.$

   (b) Não, porque a solução óptima não verifica a nova restrição. Nova solução ótima $(x^*, y^*) = \left(\frac{12}{7}, \frac{4}{7}\right)$ de valor ótimo $F^* = -\frac{4}{7}$.

2. (a) $(x^*, y^*) = \left(\frac{19}{3}, \frac{23}{6}\right), \quad F^* = \frac{61}{6}.$

   (b) $(x^*, y^*) = (6, 4)$, com $F^* = 10$.

   (c) Se $\theta < \frac{1}{2}$: $\quad (x^*, y^*) = (2, 6), \quad F^* = 2\theta + 6;$

   Se $\theta = \frac{1}{2}$: $\quad (x^*, y^*) = \lambda\left(\frac{19}{3}, \frac{23}{6}\right) + (1-\lambda)(2, 6),\ \lambda \in [0, 1], \quad F^* = 7;$

   Se $\theta > \frac{1}{2}$: $\quad (x^*, y^*) = \left(\frac{19}{3}, \frac{23}{6}\right), \quad F^* = \frac{19}{3}\theta + \frac{23}{6}.$

   (d) Se $\theta < \frac{1}{2}$: $\quad (x^*, y^*) = (2, 6), \quad F^* = 2\theta + 6;$

   Se $\theta = \frac{1}{2}$: $\quad (x^*, y^*) = (2, 6)$ ou $(4, 5)$ ou $(6, 4), \quad F^* = 7;$

   Se $\theta > \frac{1}{2}$: $\quad (x^*, y^*) = (6, 4), \quad F^* = 6\theta + 4.$

3. (a) $(x^*, y^*) = (2, 3), \quad F^* = 8.$

   (b) Se $\theta \leq 5$: $\quad (x^*, y^*) = (2, 3), \quad F^* = 8;$
   Se $\theta > 5$: Não existe solução.

4. (a) $(x^*, y^*) = (6, 5), \quad F^* = 11.$

   (b) $(x^*, y^*, F_1^*) = (6, 5, 3).$

5. (a) Minimização. Se fosse de maximização, admitiria solução ótima única (exercício 4).

   (b) $(x^*, y^*) = \lambda(6, 2) + (1-\lambda)(3, 5),\ \lambda \in [0, 1], \quad F^* = 8.$

   (c) $(x^*, y^*) = (4, 4), \quad F^* = 8$. Não é uma solução básica porque apresenta apenas uma variável não básica $(x^*, y^*, F_1^*, F_2^*, F_3^*) = (4, 4, 0, 2, 1)$.

6. (a) $(x^*, y^*) = \left(\frac{15}{2}, 5\right); \quad F^* = \frac{45}{2}$ (por exemplo).

   (b) $(x^*, y^*) = \lambda(3, 5) + (1-\lambda)(12, 2),\ \lambda \in [0, 1]; \quad F^* = 18.$

(c) Max $G = 2x + y$; $G^* = 26$.

(d) Min $H = -4x - 6y$.

7. (a) $(x^*, y^*) = \left(\frac{11}{2}, \frac{5}{2}\right), \quad F^* = \frac{27}{2}$.

   (b) $(x^*, y^*, F_2^*, F_3^*) = \left(\frac{11}{2}, \frac{5}{2}, 3, 6\right)$.

8. (a) $(x^*, y^*) = (6, 3), \quad F^* = 27$.

   (b) Na forma standard, o problema tem 3 restrições e 5 variáveis. A solução ótima é o vértice de intersecção da 2ª e 3ª restrições, logo F_2^* e F_3^* são nulas (variáveis não básicas), o que implica que F_1^* é básica, assim como x^* e y^*.

   (c) Se $\theta < \frac{5}{3}$: $(x^*, y^*) = (0, 5), \quad F^* = 25$;

   Se $\theta = \frac{5}{3}$: $(x^*, y^*) = \lambda(0, 5) + (1 - \lambda)(6, 3),\ \lambda \in [0, 1], \quad F^* = 25$;

   Se $\frac{5}{3} < \theta < \frac{5}{2}$: $(x^*, y^*) = (6, 3), \quad F^* = 6\theta + 15$;

   Se $\theta = \frac{5}{2}$: $(x^*, y^*) = \lambda(6, 3) + (1 - \lambda)(8, 2),\ \lambda \in [0, 1], \quad F^* = 30$;

   Se $\frac{5}{2} < \theta < 5$: $(x^*, y^*) = (8, 2), \quad F^* = 8\theta + 10$;

   Se $\theta = 5$: $(x^*, y^*) = \lambda(10, 0) + (1 - \lambda)(8, 2),\ \lambda \in [0, 1], \quad F^* = 50$;

   Se $\theta > 5$: $(x^*, y^*) = (10, 0), \quad F^* = 10\,\theta$.

   (d) Se $\theta < \frac{5}{3}$: $(x^*, y^*) = (0, 5), \quad F^* = 25$;

   Se $\theta = \frac{5}{3}$: $(x^*, y^*) = (6, 3)$ ou $(3, 4)$ ou $(0, 5), \quad F^* = 25$;

   Se $\frac{5}{3} < \theta < \frac{5}{2}$: $(x^*, y^*) = (6, 3), \quad F^* = 6\theta + 15$;

   Se $\theta = \frac{5}{2}$: $(x^*, y^*) = (6, 3)$ ou $(8, 2), \quad F^* = 30$;

   Se $\frac{5}{2} < \theta < 5$: $(x^*, y^*) = (8, 2), \quad F^* = 8\theta + 10$;

   Se $\theta = 5$: $(x^*, y^*) = (10, 0)$ ou $(9, 1)$ ou $(8, 2), \quad F^* = 50$;

   Se $\theta > 5$: $(x^*, y^*) = (10, 0), \quad F^* = 10\,\theta$.

9. (a) i. $(x^*, y^*) = \left(\frac{19}{5}, \frac{14}{5}\right), \quad F^* = \frac{179}{5}$.

   ii. $(x^*, y^*) = \left(4, \frac{5}{2}\right)$ ou $\left(3, \frac{10}{3}\right), \quad F^* = 35$.

   iii. $(x^*, y^*) = \left(\frac{7}{2}, 3\right), \quad F^* = \frac{71}{2}$.

iv. $(x^*, y^*) = (2, 4), \quad F^* = 34.$

(b) O problema de maximização com variáveis inteiras apresenta o menor valor ótimo. Ao relaxar as condições de integralidade das variáveis aumentamos o valor ótimo da função objectivo. A relaxação linear corresponde à melhor solução ($F^* = \frac{179}{5}$.)

10. I) Falsa (ver exercício 9 a)).

II) Verdadeira (se o conjunto de soluções inteiras admissíveis for não vazio).

III) Verdadeira.

IV) Falsa. Seja A o problema

$$\begin{array}{rl} Max & x+y \\ s.a. & 2x+4y \leq 20 \\ & 6x+3y \leq 30 \\ & x, y \geq 0 \end{array} \quad , \quad (x^*, y^*) = \left(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right) \quad , \quad F^* = \left(\frac{20}{3}\right)$$

e B o problema

$$\begin{array}{rl} Max & x+y \\ s.a. & 2x+4y \leq 20 \\ & 6x+3y \leq 30 \\ & x, y \geq 0, \text{ e inteiras} \end{array} \quad , \quad (x^*, y^*) = (3,3) \text{ ou } (4,2) \quad , \quad F^* = 6.$$

V) Falsa. Seja A o problema

$$\begin{array}{rl} Max & 2x+y \\ s.a. & 2x+4y \leq 15 \\ & 6x+3y \leq 30 \\ & x, y \geq 0 \end{array} \quad , \quad (x^*, y^*) = \lambda\left(\frac{25}{6}, \frac{5}{3}\right) + (1-\lambda)(5,0), \lambda \in [0,1] \quad , \quad F^* = 10$$

O correspondente problema B tem como solução $(x^*, y^*) = (5, 0)$, e valor ótimo $F^* = 10$.

VI) Falsa (ver exemplo IV).

VII) Falsa (ver exemplo V).

VIII) Verdadeira.

IX) Verdadeira (se o conjunto de soluções inteiras admissíveis for não vazio).

X) Verdadeira.

XI) Verdadeira.

XII) Falso.

11.

	x	y	z	F_1	F_2	F_3	T.I.
F_1	0	0	1	1	0	2	μ
y	1	1	γ	0	0	0	ϵ
F_2	-1	0	δ	0	1	2	θ
F	α	0	β	0	0	2	ρ

$\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^+,\quad \gamma,\ \delta,\ \rho\ \in \mathbb{R},\quad \mu,\ \epsilon,\ \theta\ \in \mathbb{R}_0^+$, tal que pelo menos uma seja nula.

12. $(x^*, y^*, z^*) = \lambda\left(\frac{5}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) + (1-\lambda)(0, 5, 3),\ \lambda \in [0, 1], \quad F^* = 16.$

13. $(x^*, y^*, z^*) = (30000, 0, 15000), \quad F^* = 165000.$

14. $(x^*, y^*, z^*) = (50, 0, 40), \quad F^* = 350.$

15. $(x^*, y^*, z^*, w^*) = \left(0, \frac{3}{7}, 0, \frac{1}{7}\right), \quad F^* = \frac{50}{7}.$

16. $(x^*, y^*) = \lambda\,(0,5) + (1-\lambda)\left(\frac{20}{3}, \frac{10}{3}\right),\ \lambda \in [0,1], \quad F^* = 40.$

17. $(x^*, y^*, z^*) = (0, 50, 50), \quad F^* = 350.$

18. $(x^*, y^*) = (6, 3), \quad F^* = 27.$

19. (a) $(x^*, y^*) = (3, 2), \quad F^* = 4.$

    (b) $(x^*, y^*, F_2^*).$

20. (a) $(x^*, y^*) = (6, 5), \quad F^* = 11.$

    (b) $(x, y, F_3) = (6, 2, 3)$ ou $(x, y, F_2) = (3, 5, 3)$, com $F = 8$.

21. (a) $(x^*, y^*) = (3, 2), \quad F^* = 11.$

    (b) $(x, y, F_3) = (1, 2, 2)$ com $F = 5$ ou $(x, y, F_2) = (1, 4, 2)$ com $F = 7$.

22. $(x, y, z) \in \left\{(0,0,0), (0,0,4), (0,6,0), (3,0,0), \left(\frac{54}{13}, 0, \frac{25}{13}\right)\right\}.$

23.

$$Max \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ D \\ F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{25}{3} & 22 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ C \\ E \end{bmatrix}$$

$$s.a. \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ D \\ F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ C \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F\ \geq 0.$$

24. (a) $(x^*, y^*) = \left(\frac{19}{3}, \frac{23}{6}\right), \quad F^* = \frac{61}{6}.$

    (b) $(x^*, y^*, F_1^*).$

    (c)

	x	y	F_1	F_2	F_3	T.I.
x	1	0	0	1/3	1/3	19/3
y	0	1	0	1/3	-1/6	23/6
F_1	0	0	1	1	1/2	13/2
F	0	0	0	2/3	1/6	61/6

25. (a) $(x^*, y^*) = \left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad F^* = -2.$

    (b) $(x^*, y^*, F_3^*).$

    (c) Seja $G = -F$

	x	y	F_1	F_2	F_3	T.I.
x	1	0	4/3	1/3	0	8/3
y	0	1	-1/3	-1/3	0	1/3
F_1	0	0	5/3	2/3	1	7/3
G	0	0	2	1	0	2

26. (a)

	A	B	C	D	E	F	G	H	T.I.
A	1	1/10	0	1/10	0	0	1/10	-1/5	21/10
E	0	-2	0	-5	1	0	0	0	-4
C	0	1/5	1	1/5	0	0	1/5	1/10	1/5
F	0	3/2	0	9/2	0	1	-1/2	-1/2	17/2
L	0	31/10	0	61/10	0	0	11/10	-1/5	71/10

(b) Não é admissível nem é ótima.

27. (a) $(x^*, y^*, F_2^*, F_3^*) = (5, 5, 3, 5),\ F^* = 15.$

(b) $\Delta \geq -1$, com Δ a variação relativamente ao coeficiente da variável x no problema original.

(c) $(x^*, y^*) = \lambda\,(5, 5) + (1-\lambda)\left(\frac{7}{2}, \frac{13}{2}\right),\ \lambda \in [0, 1], \quad F^* = 10.$

(d) Se $0 < \theta \leq 5$ não há alteração na solução ótima (com θ o aumento do termo independente da 3ª restrição, relativamente ao problema original).
Se $\theta > 5$, a solução ótima altera-se.

(e) Não. Solução ótima $(x^*, y^*, z^*) = \left(\frac{19}{5}, \frac{31}{5}, \frac{3}{5}\right)$; valor ótimo $F^* = \frac{84}{5}$.

(f) Sim. Não altera a solução ótima, porque a solução ótima verifica a nova restrição.

(g) Sim, porque a solução ótima da alínea a) não é admissível.

28. (ver exercício 7).

29. (ver exercício 17).

30. (a) $(x^*, y^*, z^*, w^*) = \left(0, \frac{3}{7}, 0, \frac{1}{7}\right), \quad F^* = \frac{50}{7}.$

(b) $5 \leq \theta \leq 19$, com θ o coeficiente de y na função objectivo.

31. (a) $r = \begin{bmatrix} 13 & \frac{4}{17} & \frac{27}{17} \end{bmatrix}$

(b)

	x	y	z	F_1	F_2	T.I.
x	1	0	0	3/17	-1/17	50
z	0	3	1	-1/17	6/17	40
F	0	13	0	4/17	27/17	350

(c) Não porque $r_w = -\frac{29}{17}$. $(x^*, y^*, z^*, w^*) = \left(0, 0, \frac{85}{4}, \frac{425}{4}\right), \quad F^* = \frac{2125}{4}.$

32. (a) $(x^*, y^*) = \left(\frac{19}{5}, \frac{14}{5}\right), \quad F^* = \frac{179}{5}.$

(b) (x^*, y^*).

(c) $(x^*, y^*) = \left(3, \frac{10}{3}\right)$ ou $\left(4, \frac{5}{2}\right), \quad F^* = 35.$

(d) $(x^*, y^*) = \left(\frac{7}{2}, 3\right), \quad F^* = \left(\frac{71}{2}\right).$

(e) $(x^*, y^*) = (2, 4), \quad F^* = 34.$

(f) Dado que a solução ótima de a) não é inteira, o valor da função objectivo diminui quando se exige integralidade de variáveis.

Problemas de Transportes e Afetação

1. $(X_{AF_1}, X_{AF_2}, X_{AF_3}, X_{BF_1}, X_{BF_2}, X_{BF_3}, X_{CF_1}, X_{CF_2}, X_{CF_3}) = (0, 50, 0, 200, 0, 50, 0, 0, 100)$;
   $C_{TOT} = 800\, u.m.$.

2. $(X_{AF_1}, X_{AF_2}, X_{AF_3}, X_{BF_1}, X_{BF_2}, X_{BF_3}, X_{CF_1}, X_{CF_2}, X_{CF_3}) = (100, 0, 0, 0, 100-\theta, 50+\theta, 0, \theta, 50-\theta)$,
   com $\theta \in [0, 50]$, $C_{TOT} = 1550\, u.m.$.

3. Se $0 < \theta < 5$: $(X_{F_1A}, X_{F_1B}, X_{F_2A}, X_{F_2B}, X_{F_3A}, X_{F_3B}) = (65, 0, 35, 65, 0, 85)$; $C_{TOT} = 495 + 35\theta\, u.m.$.

   Se $\theta = 5$: $(X_{F_1A}, X_{F_1B}, X_{F_2A}, X_{F_2B}, X_{F_3A}, X_{F_3B}) = (65, 0, \Delta, 100-\Delta, 35-\Delta, 50+\Delta)$, com $\Delta \in [0, 35]$;
   $C_{TOT} = 670\, u.m.$.

   Se $\theta > 5$: $(X_{F_1A}, X_{F_1B}, X_{F_2A}, X_{F_2B}, X_{F_3A}, X_{F_3B}) = (65, 0, 0, 100, 35, 50)$; $C_{TOT} = 670\, u.m.$.

4. $(X_{AF_1}, X_{AF_2}, X_{AF_3}, X_{BF_1}, X_{BF_2}, X_{BF_3}, X_{CF_1}, X_{CF_2}, X_{CF_3}) = (\theta, 100-\theta, 200, 200-\theta, \theta, 0, 0, 100, 0)$,
   com $\theta \in [0, 100]$; $C_{TOT} = 7800\, u.m.$.

5. $(X_{AX}, X_{AY}, X_{AZ}, X_{BX}, X_{BY}, X_{BZ}, X_{CX}, X_{CY}, X_{CZ}) = (100, 150, 50, 200, 0, 0, 0, 0, 100)$;
   $C_{TOT} = 1650\, u.m.$.

6. $(X_{AX}, X_{AY}, X_{AZ}, X_{BX}, X_{BY}, X_{BZ}, X_{CX}, X_{CY}, X_{CZ}) = (10, 0, 0, 0, 20-\theta, \theta, 0, 30+\theta, 10-\theta)$ com
   $\theta \in [0, 10]$; $C_{TOT} = 160\, u.m.$.

7. $(X_{AX}, X_{AY}, X_{AZ}, X_{AW}, X_{BX}, X_{BY}, X_{BZ}, X_{BW}, X_{CX}, X_{CY}, X_{CZ}, X_{CW}, X_{DX}, X_{DY}, X_{DZ}, X_{DW}) =$
   $(0, 0, 0, 30, 0, 50, 20, 10, 0, 0, 20, 0, 20, 10, 0, 0)$; $C_{TOT} = 410\, u.m.$.

8. A solução não é ótima porque existem variáveis não básicas que apresentam custos unitários negativos
   ($c'_{BX} = -7$, $c'_{BY} = -2$, $c'_{CX} = -4$).
   A solução ótima é $(X_{AX}, X_{AY}, X_{AZ}, X_{AW}, X_{BX}, X_{BY}, X_{BZ}, X_{BW}, X_{CX}, X_{CY}, X_{CZ}, X_{CW}) =$
   $(0, 70, 0, 0, 20, 15, \theta, 15-\theta, 0, 0, 35-\theta, 15+\theta)$, com $\theta \in [0, 15]$; $C_{TOT} = 490\, u.m.$.

9. (a) Solução ótima do Produto A:
   $(X_{F_1G_1}, X_{F_1G_2}, X_{F_1G_{Fict.}}, X_{F_2G_1}, X_{F_2G_2}, X_{F_2G_{Fict.}}) = (\theta, 30-\theta, 70, 50-\theta, 150+\theta, 0)$ com $\theta \in [0, 30]$; $C_{ProdutoA} = 1210\, u.m.$.

   Solução ótima do Produto B:
   $(X_{F_1G_1}, X_{F_1G_2}, X_{F_3G_1}, X_{F_3G_2}) = (100, 50, 0, 50)$; $C_{ProdutoB} = 400\, u.m.$.
   O custo total de transporte é de 1610 $u.m.$.

   (b) Sim. É a solução ótima apresentada, considerando $\theta = 15$.

10. (a) António → Livre; Carlos → Costas; Daniel → Mariposa; Eduardo → Bruços; (Bernardo → Estilo Fictício) ou alternativamente,
    António → Bruços; Carlos → Costas; Daniel → Mariposa; Eduardo → Livre; (Bernardo → Estilo Fictício)
    Tempo Total = 246 segundos.

    (b) Sim. Algoritmo Húngaro.

11. (a) $1 \rightarrow$ A; $2 \rightarrow$ D; $3 \rightarrow$ B; $5 \rightarrow$ C; ($4 \rightarrow$ Função Fictícia); Resultado total: 315.
    (b) Sim. Algoritmo Húngaro.

12. $(X_{AS_1}, X_{AS_2}, X_{AS_3}, X_{AS_4}, X_{BS_1}, X_{BS_2}, X_{BS_3}, X_{BS_4}, X_{Fict.S_1}, X_{Fict.S_2}, X_{Fict.S_3}, X_{Fict.S_4}) =$
    $(0, 100, 50, 0, 150, 0, 0, 100, 0, 0, 30, 0)$; $C_{TOT} = 27700\, u.m.$.

13. $(X_{AX}, X_{AY}, X_{AZ}, X_{BX}, X_{BY}, X_{BZ}, X_{Fict.X}, X_{Fict.Y}, X_{Fict.Z}) = (0, 100, 100, 200, 100, 0, 0, 100, 0)$;
    Lucro Total $= 28400\, u.m.$.

14. (a) Lisboa $\rightarrow$ A e E; Porto $\rightarrow$ D; Coimbra $\rightarrow$ B; Cidade Fictícia $\rightarrow$ C; Lucro total: $68\, u.m.$.
    (b) Sim. Algoritmo Húngaro.

15. $(X_{AP_1}, X_{AP_2}, X_{AP_3}, X_{AP_4}, X_{BP_1}, X_{BP_2}, X_{BP_3}, X_{BP_4}, X_{CP_1}, X_{CP_2}, X_{CP_3}, X_{CP_4}, X_{DP_1}, X_{DP_2}, X_{DP_3}, X_{DP_4}) =$
    $(20, 0, 180, 0, 0, 240, 160, 0, 50, 0, 0, 100, 250, 0, 0, 0)$; Lucro Total $= 44180\, u.m.$.

16. (a) $1 \rightarrow$ D; $2 \rightarrow$ C; $3 \rightarrow$ F; $4 \rightarrow$ A; (Vaga Fictícia $\rightarrow$ B; Candidato E excluído das vagas);
    Aptidão total: 307.
    (b) Sim. Algoritmo Húngaro.

Algoritmo Branch and Bound

1. $(x^*, y^*) = (1, 2), \quad F^* = 8.$

2. $(x^*, y^*, z^*) = (50, 62, 12), \quad F^* = 286.$

3. $(x^*, y^*, z^*, v^*) = (2, 2, 1, 0), \quad F^* = 22.$

4. $(x^*, y^*, z^*, u^*, v^*) = (0, 0, 1, 1, 1), \quad F^* = 6.$

5. (a) O limite superior para o valor ótimo de F é 225 porque, os coeficientes da função objectivo são inteiros, as variáveis são inteiras e $F^* < 225,13$.

   (b) O subproblema 6 porque é, de entre os problemas ainda não pesquisados, o que apresenta melhor valor de função objectivo.
   As restrições da ramificação seriam na variável y, por ser a primeira variável que não satisfaz a condição de integralidade. PL61 $\rightarrow y \leq 39$; PL62$\rightarrow y \geq 40$.

   (c) O subproblema PL31, correspondente à ramificação do subproblema 3, por introdução da restrição $y \leq 37$ tem a solução ótima $(x^*, y^*, z^*) = \left(\frac{46}{3}, 37, 0\right)$ com valor ótimo $F^* = \frac{674}{3}$, pelo que esta solução ainda não é a solução ótima do problema PLI.

6. (a) $(x^*, y^*, z^*, w^*) = (23, 0, 0, 17); \quad F^* = 137.$

   (b) É a solução ótima do PLI, porque a relaxação linear tem valor ótimo 137.5 e dado que os coeficientes da função objectivo são inteiros, o valor ótimo do PLI é menor ou igual a 137.

   (c)
$$\begin{array}{rl} Max & 3x + 2y + z + 4w \\ s.a. & x + y + z + w \leq 40 \\ & 2x + y - z - 2w \geq 10 \\ & x - y + 2w \geq 10 \\ & x \leq 22 \\ & x, y, z, w \geq 0 \end{array}$$
   Não é necessário resolver este subproblema porque o PLI tem solução ótima única.

Teoria da Decisão

1. (a) Decisão A.
   (b) Decisão A.
   (c) Decisão A, quer seja em situação de incerteza ou em situação de risco.

2. (a) Se $0 \leq \alpha < \dfrac{2}{3}$ recomenda-se a decisão D_3.
   Se $\alpha = \dfrac{2}{3}$ é indiferente a decisão D_1 ou D_3.
   Se $\dfrac{2}{3} < \alpha \leq 1$ recomenda-se a decisão D_1.
   (b)

Custo oportunidade	θ_1	θ_2	θ_3
D_1	1	0	2
D_2	0	4	0
D_3	1	1	0
D_4	2	2	1

   (c) Se $0 \leq \alpha < 1$ recomenda-se a decisão D_3.
   Se $\alpha = 1$, são indiferentes as decisões D_1, D_2 ou D_3.

3. (a) Um agente de decisão pessimista opta por investir o capital.
   Um agente de decisão optimista opta por comprar a nova empresa.
   (b) Se o agente de decisão for francamente pessimista opta por investir o capital. Caso contrário, opta por comprar a nova empresa.
   (c) i) Investir o capital.
   ii) Comprar a nova empresa.

4. (a) Basta ser moderadamente pessimista para escolher a decisão A, porque, para um grau de optimismo abaixo de 0.55 já se deve escolher A.
   É preciso ser claramente pessimista para escolher a decisão B ($\alpha < 0.2$).
   Basta ser moderadamente optimista para escolher a decisão C, porque, para um grau de optimismo acima de 0.55 já se deve escolher C.
   (b) Se $0 \leq P(\theta_3) < 0.025$ recomenda-se a decisão B.
   Se $P(\theta_3) = 0.025$ são indiferentes as decisões B ou C.
   Se $0.025 < P(\theta_3) < 0.3$ recomenda-se a decisão C.
   Se $P(\theta_3) = 0.3$ é indiferente optar por C ou A.
   Se $0.3 < P(\theta_3) \leq 0.5$ recomenda-se a decisão A.
   (c) c1) Para valores de lucro inferiores a 7 u.m. a satisfação é quase nula.
   O valor de lucro de 9 u.m. é o que este agente de decisão desejaria obter.
   A partir de 9 u.m. de lucro, um mesmo incremento produz um aumento mínimo de satisfação do decisor e mais do que 16 u.m. já não lhe trazem vantagem nenhuma.
   c2) Só um agente extremamente optimista optaria pela decisão C. Caso contrário, optaria pela decisão B.

5. (a) Decisão A, porque apresenta o menor valor esperado do custo.
   (b) Este agente de decisão tolera bem custos até 20 u.m., mas é totalmente intolerante a dispender nem que seja mais uma unidade monetária acima disso. No entanto, dispender 21 u.m. ou 41 u.m. é-lhe quase indiferente!

(c) Decisão A, porque apresenta maior valor esperado de utilidade. De facto, esta decisão é a única que não entra na zona de custo que o agente mais receia, qualquer que seja o estado da natureza que ocorra.

6. (a) Decisão B, pois só um agente de decisão com grau de optimismo $\alpha < 0.1944$ deveria optar pela decisão C.

   (b) Se optasse por C, seria um agente de decisão francamente pessimista.
   Nenhum agente de decisão deveria optar pela decisão A.

7. (a)

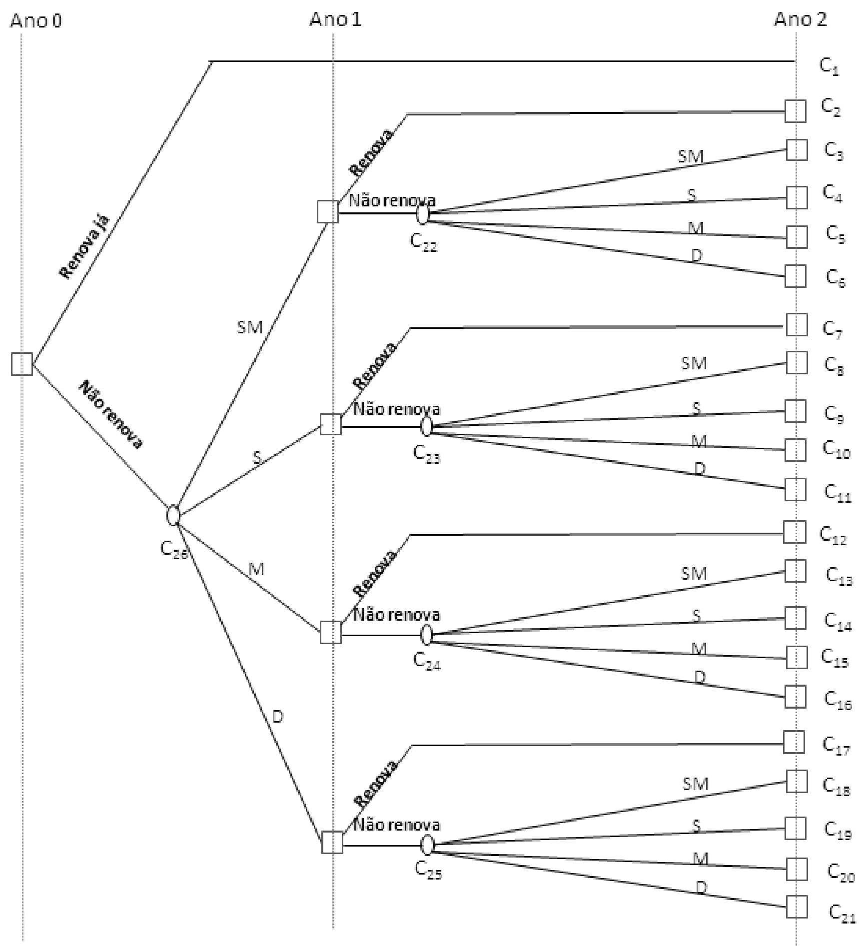

Figura 1: Árvore de decisão do exercício 7 a).

   (b) Se $0 < \alpha < 0.3425$ recomenda-se a renovação imediata da frota.
   Se $\alpha = 0.3425$ é indiferente renovar já a frota ou deixar a renovação para mais tarde.
   Se $\alpha > 0.3425$ recomenda-se que a renovação não seja efectuada de imediato.

   (c) Não renovar a frota agora.

   (d) Não renovar a frota agora.

8. (a) O "comboio rápido"para Alcântara.

   (b) O "comboio que pára em todas as estações"porque garante a chegada à FCT às 8:55, independentemente do atraso que o comboio possa sofrer.

9. E(satisfação de apoiar o referendo) = 0 u.s.;
   E(satisfação de não apoiar o referendo) = 42 u.s..

10. Não trocar já o apartamento.

11. (a) Não comprar já o veículo.
    (b) A decisão proposta em a) manter-se-ia para qualquer valor de θ (admitindo que a satisfação θ é um valor não negativo).

12. (a) Falsa, porque o jogador totalmente pessimista escolhe o jogo B, e o grau de indiferença entre as decisões A e B é inferior a 0.35.
    (b) Jogo B.
    (c) Jogo A.

Filas de Espera

1. - 0.082
   - 0.44
   - 0.018

2. - O processo de chegadas de chamadas telefónicas à CT é um Processo de Poisson, com taxa igual a 2737 chegadas por hora;
   - o número de chamadas telefónicas a cada 10 segundos segue uma distribuição Poisson de taxa igual a 7.603 chamadas;
   - o número de chamadas telefónicas a cada 15 segundos segue uma distribuição Poisson de taxa igual a 11.404 chamadas;
   - a probabilidade de chegarem mais do que 10 chamadas telefónicas à CT em cada intervalo de Δ segundos é:

     - Se $\Delta = 10$: 0.1467
     - Se $\Delta = 15$: 0.5874
     - Se $\Delta = 20$: 0.8912
     - Se $\Delta = 25$: 0.9817
     - Se $\Delta = 30$: 0.9978

3.

4.

5. (a) 25.1%.
   (b) 10.1%.
   (c) 1.98 automóveis.
   (d) 8.19 minutos.
   (e) 4.04 euros por hora.

6. (a) 41.5%.
   (b) 1.04%.
   (c) 0.966 automóveis.
   (d) 0.857 minutos.
   (e) 0.42 euros por hora.

7. Seria recomendável a contratação de um terceiro técnico de manutenção, pois permite reduzir os custos totais. Para minimizar o custo global, a fábrica deveria ter cinco técnicos de manutenção.

8. (a) P_0=0.166(6); L =5 clientes; W = 2 minutos.
   (b) $c = 0.3$.
   (c) P_0=0.3224; L =1.5388 clientes; W = 0.6155 minutos.

9. (a) P_0=0.166(6); L =5 clientes; W = 2 minutos.
   (b) $b = 0.6198$.
   (c) P_0=0.3889; L =1.0612 clientes; W = 0.5788 minutos.

10. (a) P_0=0.166(6); L =5 clientes; W = 2 minutos.

(b) P_0=0.4801; $L = 0.6562$ clientes; $W = 0.3282$ minutos.

11.

	ρ	P_0	L	L_q	W	W_q
$M/D/1$	0.667	0.333	1.333	0.667	0.667	0.333
$M/M/1$	0.667	0.333	2.000	1.333	1.000	0.667
$M/E_2/1$	0.667	0.333	1.667	1.000	0.833	0.500

12.

Sendo Classe 1, os pacientes em estado crítico, classe 2 os pacientes em estado grave e Classe 3 os pacientes em estado estável, obtém-se:

	Prioridades "não Absolutas"		Prioridades "Absolutas"	
Nº de servidores	$s = 1$	$s = 2$	$s = 1$	$s = 2$
Tempos médios a aguardar o início do atendimento (h)				
W_{q_1}	0.2381	0.0287	0.0238	0.0004
W_{q_2}	0.3247	0.0332	0.1537	0.0079
W_{q_3}	0.9091	0.0481	1.0303	0.0654
Tempos médios de permanência no sistema (h)				
W_1	0.5714	0.3621	0.3571	0.3337
W_2	0.6580	0.3665	0.4870	0.3413
W_3	1.2424	0.3814	1.3636	0.3988
Nº médio de pacientes na fila de espera				
L_{q_1}	0.0476	0.0057	0.0048	0.0001
L_{q_2}	0.1948	0.0199	0.0922	0.0048
L_{q_3}	1.0909	0.0577	1.2364	0.0785
Nº médio de pacientes no sistema				
L_1	0.1143	0.0724	0.0714	0.0667
L_2	0.3948	0.2199	0.2922	0.2048
L_3	1.4909	0.4577	1.6364	0.4785

13.

	Caixa		Cafés		Bolos	
	M/M/1	M/M/2	M/M/2	M/M/3	M/M/1	M/M/2
ρ	0.7500	0.3750	0.7500	0.5000	0.8333	0.4167
L	3.0000	0.8727	3.4286	1.7368	5.0000	1.0084
L_q	2.2500	0.1227	1.9286	0.2368	4.1667	0.1751
W	0.3000	0.0873	0.3429	0.1737	0.5000	0.1008
W_q	0.2250	0.0123	0.1929	0.0237	0.4167	0.0175
P_0	0.2500	0.4545	0.1429	0.2105	0.1667	0.4118

	Sem Polivalência		Com Polivalência	
	s=4	s=5	M/M/4	M/M/5
L	11.4286	7.4370	6.6219	3.9867
W	1.1429	0.7437	0.6622	0.3987
P_0	0.60%	1.47%	2.13%	3.18%

14. O gerente deveria afetar 4 funcionários aos cafés, 1 funcionário aos bolos e 3 funcionários aos jornais. Para esta proposta, $L_{Tot} = 15.0473$, W_{Tot}= 0.6019 e P_0=0.04%.

15. (a) 6.25 minutos.

    (b) 10.05556 minutos.

(c) Com "Cartão Mega VIP" terá de esperar 5.3571 minutos.
Sem "Cartão Mega VIP" terá de esperar 14.2857 minutos.

16. (a) As taxas de entrada directamente do exterior para os sectores A, B e C são respectivamente 4.99995, 8.24431 e 16.27827 clientes por hora.

    (b) A melhor distribuição será 2 funcionários no sector A, 1 funcionário no sector B e 2 funcionários no sector C, com um tempo médio de permanência no sistema de 0.448352 horas.

    (c) 0.028187

17. (a) Sector A: 39.158; Sector B: 70.838; Sector C: 73.473; Sector D: 41.598; Sector E: 29.985.

    (b) 23.9716 minutos.

    (c) A introdução de mais 1 servidor no sector B e de mais um servidor no sector C praticamente reduz a metade o tempo médio de permanência no sistema (W = 12.26032 minutos).

18. (a) Processos Poissonianos de chegadas aos 4 sectores, com taxas médias iguais a 3.178945, 1.23263, 1.789472, 4.178946 clientes/minuto, respectivamente para os sectores 1 a 4.

    (b) P_0 sistema = 0.009331.

    (c) Ltot = 8.474819 clientes; Wtot = 1.210688 minutos.

Simulação

Quando nada em contrário for referido, assume-se que u_i é um NPA U[0;1].

1. (a) Gerar u
   $x = a + (b - a)u$.

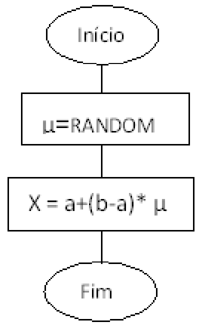

Figura 2: Fluxograma do exercício 1 a).

   (b) $x = u_1 + u_2$.
   Uma resolução alternativa mais trabalhosa, seria usando o método de inversão, cujos passos se apresentam seguidamente.
   Gerar u
   Se $u \leq \dfrac{1}{2}$ então $x = \sqrt{2u}$. Caso contrário, $x = 2 - \sqrt{2 - 2u}$.
   Uma terceira alternativa, seria usar o método de rejeição, embora seja a resolução menos eficiente.

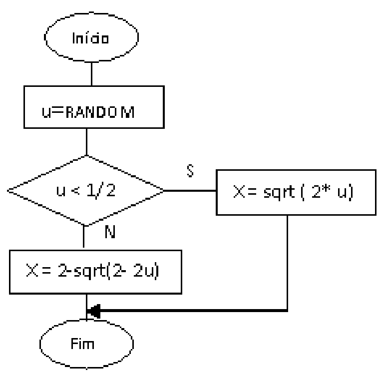

Figura 3: Fluxograma do exercício 1 b), usando o método de inversão.

   (c) $S_{12} = 0$
   Repetir $i = 1, \ldots, 12$
   - Gerar u
   - $S_{12} = S_{12} + u$

   $x = \mu + (S_{12} - 6)\,\sigma$.
   Alternativamente, poderia utilizar o Método da Rejeição, truncando a distribuição no intervalo $[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$. O Método da Inversão não pode ser utilizado. Porquê? No entanto, no Excel, podemos lembrar-nos do Método da Inversão e fazer = INV.NORMAL(ALEATÓRIO(); ;,).

   (d) $x = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(u)$.

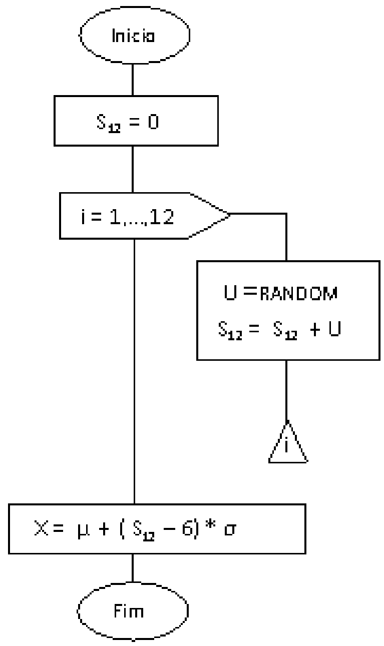

Figura 4: Fluxograma do exercício 1 c).

(e) Utilizando o método da rejeição
x= Random
Pa $= -4x^2 + 4x$
Gerar u
Se Pa $\geq u$, aceitar x . Caso contrário, voltar ao passo inicial.

(f) Utilizando o método da rejeição
x= Random
Pa $= x^2 - 2x + 1$
Gerar u
Se Pa $\geq u$, aceitar x. Caso contrário, voltar ao passo inicial.

(g) Caso particular de a).
Alternativamente, mas mais trabalhoso, poderia utilizar-se o método da inversão
Gerar u
Se $u < \frac{1}{6}, \quad x = -1 + \sqrt{6u};$
Se $u < \frac{5}{6}, \quad x = 3u - \frac{1}{2}.$ Caso contrário, $x = 3 - \sqrt{6(1-u)}.$

(h) $F_X(x) = 0.25x^2 + 0.5x + 0.25$, para $x \in [-1; 1]$. Pelo método de inversão $x = -1 + 2\sqrt{u}$.

2. (a) Gerar u
Se $u < \frac{1}{6}, \quad x = 1;$
Se $u < \frac{1}{3}, \quad x = 2;$
Se $u < \frac{1}{2}, \quad x = 3;$
Se $u < \frac{2}{3}, \quad x = 4;$
Se $u < \frac{5}{6}, \quad x = 5.$ Caso contrário, $x = 6$.

(b) Se tivermos em conta que $X \sim Bin(n=5; p=0.3) \sim Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_5$, com Y_i i.i.d. e $Y_i \sim Bernoulli(0,3)$, poderemos fazer
$k = 0$; $x = 0$
Repetir $k = 1, \ldots, 5$

- Gerar u
- Se $u < 0.3$, então $x = x + 1$.

Alternativa: Calcular as probabilidades

k	0	1	2	3	4	5
P(X = k)	0.1681	0.3602	0.3087	0.1323	0.0284	0.0023
P(X < k)	0.1681	0.5283	0.8370	0.9693	0.9977	1.0000

Gerar u
Se $u < 0.1681$, $x = 0$;
Se $u < 0.5282$, $x = 1$;
Se $u < 0.8369$, $x = 2$;
Se $u < 0.9692$, $x = 3$;
Se $u < 0.9976$, $x = 4$. Caso contrário, $x = 5$.

(c) Para um dado valor de **m** só temos de calcular as probabilidades e utilizar o Método da Inversão, aplicado a uma variável discreta. Cuidado, porque a v.a. Poisson(m) toma os valores $0, 1, 2, 3, \ldots$. Como m é o valor médio e a variância desta v.a., recomendamos que determine probabilidades para o domínio $m \pm 3\sqrt{m}$ (naturalmente, considerando apenas valores pertencentes a $\mathbb{N}_0$.
A v.a. Poisson($m = \lambda\, \Delta T$) pode ser utilizada para descrever o número de ocorrências num Processo Poissoniano com taxa média de chegadas igual a λ num intervalo de tempo ΔT.
Ora, como num Processo Poissoniano com taxa média de chegadas igual a λ os intervalos de tempo entre chegadas consecutivas são descritos pela v.a. Exponencial(λ), poderemos adotar o seguinte procedimento para gerar valores da v.a. Poisson(m):

i. $T = 0$; $x = 0$
ii. Gerar u
iii. $DT = -\dfrac{1}{m} \ln(u)$
iv. $T = T + DT$
v. Se $T > 1$, terminar. Caso contrário, $x = x + 1$. Voltar ao passo i.

(d) Gerar u
Se $u < \dfrac{1}{3}$, $x =$Azul;
Se $u < \dfrac{1}{2}$, $x =$Verde;
Se $u < \dfrac{2}{3}$, $x =$Amarelo. Caso contrário, $x =$Branco.

3. (a) $F_X(x) = -0.25x^2 + 0.5x + 0.75$ para $x \in [-1; 1]$. Pelo método de inversão $x = 1 - 2\sqrt{u}$.
(b) Método da rejeição
Gerar u
$x = -1 + u$
$\text{Pa} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{5}x^2$

Gerar u
Se Pa $> u$, aceitar x. Caso contrário, voltar ao passo inicial.

(c) $F_X(x) = -0.5\cos(x) + 0.5$ para $x \in [0;\pi]$. Pelo método da inversão $x = \text{arcos}(1-2u)$.

(d) $F_X(x) = -x^2 + 1$ para $x \in [-1;0]$. Método da inversão $x = -\sqrt{1-u}$.

(e) $F_X(x) = \ln(x)$ para $x \in [1;e]$. Método de inversão $x = e^u$.

(f) $x=$ Random
Pa $= \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2$
Gerar u
Se Pa $\geq u$, aceitar x. Caso contrário, voltar ao passo inicial.

4. $X \sim Lognormal(m,\sigma)$ $\quad x = m.e^{(\sigma.z)}$, com $z = u_1 + u_2 + \ldots + u_{12} - 6$, o que se resume aos seguintes passos:
$S_{12} = 0$
Repetir $i = 1, \ldots, 12$

- Gerar u
- $S_{12} = S_{12} + u$

$x = m\, e^{\,\sigma(S_{12}-6)}$.

5. $X \sim Gama(n = 5, \lambda = 0,5)$ $\quad x = -\frac{\ln(u_1)}{0.5} - \frac{\ln(u_2)}{0.5} - \frac{\ln(u_3)}{0.5} - \frac{\ln(u_4)}{0.5} - \frac{\ln(u_5)}{0.5}$

(a) $x = 0$
Repetir $i = 1, \ldots, 5$
- Gerar u
- $x = x - 2\ln(u)$.

(b) Considerem-se 24 classes (CL) de valores do máximo, com amplitude 3 cada uma. A Figura 5 esquematiza o fluxograma pedido.

6. (a) $Z \sim Normal(0;1)$ $\quad z = u_1 + u_2 + \ldots + u_{12} - 6$
$S_{12} = 0$
Repetir $i = 1, \ldots, 12$
- Gerar u
- $S_{12} = S_{12} + u$

$Z = (S_{12} - 6)$.

(b) $X \sim \chi^2_n$ $\quad x = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2$
QUI5 $= 0$
Repetir $i = 1, \ldots, 5$
- $Z =$ NOR01
- QUI5 $=$ QUI5 $+Z^2$

(c) <u>Rotina Maximo</u>
Max =0
Repetir $i = 1, \ldots, 3$
- Q5= QUI5
- Se Q5 $>$ Max, então Max= Q5.

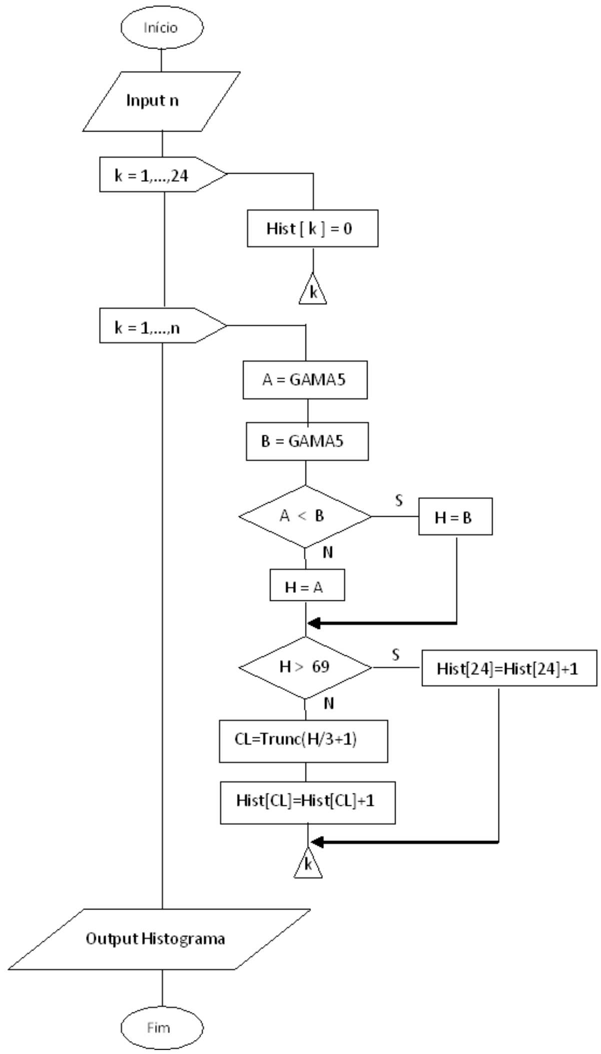

Figura 5: Fluxograma do exercício 5 b).

<u>Rotina Estatística</u>
$w = $ Max
$S_1 = S_1 + w; \quad S_2 = S_2 + w^2; \quad S_3 = S_3 + w^3; \quad S_4 = S_4 + w^4$
Se $w \geq 42$, então, $CL = 15$. Caso contrário, $CL = Trunc\left(\dfrac{w}{3} + 1\right)$
Hist$[CL]$ =Hist$[CL] + 1$

<u>Programa Principal</u>
Input n (n=1000, por exemplo)
Repetir $k = 1, \ldots, 15$

- Hist$[k] = 0$

$S_1 = 0$; $S_2 = 0$; $S_3 = 0$; $S_4 = 0$
Repetir $k = 1, \ldots, n$

- w=Maximo
- Estatistica

$$\text{Med} = \frac{S_1}{n}$$

$$\text{Desv} = \sqrt{\frac{n}{n-1}\left(\frac{S_2}{n} - \text{Med}^2\right)}$$

$$G_1 = \frac{\frac{S_3}{n} - 3S_1\frac{S_2}{n^2} + 2\frac{{S_1}^3}{n^3}}{\text{Desv}^3}$$

$$G_2 = \frac{\frac{S_4}{n} - 4S_1\frac{S_3}{n^2} + 6{S_1}^2\frac{S_2}{n^3} - 3\frac{{S_1}^4}{n^4}}{\text{Desv}^4}$$

Output Med, Desv, G_1, G_2, Hist[k].

7. (a) $X \sim Normal(\mu = 2; \sigma = 3)$ e $Y \sim Exponencial(\lambda = 0.5)$.
   Gerar x como em 1 c) e gerar y como em 1 d).
   $w = x - y$.

   (b) Determinar a frequência com que $w > 0$ (número de casos em que a desigualdade seja verdadeira, a dividir pelo número de simulações).

8. Idêntico ao exercício 6.

9. Rotina Máximo de Intensidade Anual

   i. Max =0;   T= 0
   ii. Gerar u
   iii. $\text{DT} = -\frac{1}{156}\ln(u)$
   iv. T = T + DT
   v. Se T> 1, ir para rotina Estatistica e sair.
   vi. Caso contrário, $S_{12} = 0$.
   vii. Repetir $k = 1, \ldots, 12$
      – Gerar u
      – $S_{12} = S_{12} + u$
   viii. $\text{I} = 2(S_{12} - 6) + 10$
   ix. Se I > Max, então Max= I e voltar ao Passo ii. Caso contrário, voltar ao Passo ii.

10. Inicializar.

    Repetir 1000 vezes:

    Gerar u; se $u <$ 0,1, então x = "azul"; caso contrário, se $u <$ 0,3, então x = "branco"; se $u <$ 0,7, então x = "verde"; caso contrário, x = "negro".

    Gerar u; se $u <$ 0,5, então y = "azul"; caso contrário, se $u <$ 0,55, então y = "branco"; se $u <$ 0,62, então y = "verde"; caso contrário, y = "castanho".

    Se x = y = "azul", então Prémio = 100 u.m.; caso contrário, se x = y = "branco", então Prémio = 500 u.m.; caso contrário, se x = y = "verde", então Prémio = 200 u.m.; caso contrário, Prémio = 0.

    Lucro = Prémio - 20 u.m.

    Registar o valor do Lucro.

    Tratar estatisticamente os 1000 valores de lucro.

    Apresentar resultados.

11. Assumir que a rotina DADO afeta à variable D um NPA Unif $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

    Inicializar.

    Repetir 1000 vezes:

    N$_{lançamentos}$ = 0
    5 N$_{lançamentos}$ = N$_{lançamentos}$ + 1
    DADO
    X1 = D
    DADO
    X2 = D
    Se X1 = X2, então flag$_a$ = 1; caso contrário, flag$_a$ = 0.
    DADO
    Y1 = D
    DADO
    Y2 = D
    Se Y1 = Y2, então flag$_b$ = 1; caso contrário, flag$_b$ = 0.
    Se flag$_a$ + flag$_b$ $\neq$ 1 então vai para a linha 5
    Registar o valor de N$_{lançamentos}$.

    Tratar estatisticamente os 1000 valores de N$_{lançamentos}$.

    Apresentar resultados.

12. (a) De 501 a 1500 (incluindo ambos) temos 1000 números inteiros.
    Gerar u. Se $u < 1/1000$, então x = 501; caso contrário, se $u < 2/1000$, então x = 502; ...; caso contrário, se $u < 999/1000$, então x = 1499; caso contrário, x = 1500.

    (b) Assumir que a rotina UNIF501_1500 afeta à variable X um NPA Unif $\{501; ...; 1500\}$
    Asumir que a rotina NOR01 afeta à variable Z um NPA N(0;1)
    Assumir que o stock, S, é inicialmente igual a zero: S = 0
    Inicializar.
    Dia = 0
    Repetir 1000 vezes:
        Dia = Dia + 1
        Se o resto da divisão inteira de Dia por 5 for 0 ou 1, então med = 800 e dp = 150; caso contrário, se o resto da divisão inteira de Dia por 5 for 2, então med = 1000 e dp = 180; caso contrário, med = 1200 e dp = 220. (Estamos a assumir semanas de 5 dias)
        UNIF501_1500
        Produção = X
        S = S + Produção
        NOR01
        Procura = Z*dp + med
        Se Procura S, então vai para a linha 5; caso contrário, vai para a linha 10
      5 S = S - Procura
        NF = 0 (n$^{\text{o}}$ unidades não fornecidas)
        vai para a linha 20

10 NF = Procura - S
   S = 0
20 Registar os valores de S e de NF.

Tratar estatisticamente os 1000 pares de valores de S e NF.

Apresentar resultados.

13. Consultar os "Elementos de Apoio às Aulas Teóricas", onde este exemplo é tratado. A construção de um modelo de Simulação de Filas de Espera não é trivial e não é objecto desta unidade curricular. Trataremos exclusivamente da simulação manual de Filas de Espera.

14. Como o processo de chegadas de clientes é Poissoniano com taxa média igual a 0,7 por minuto, então teremos o intervalo de tempo entre duas chegadas consecutivas, DT $\sim$ Exponencial(= 0,7) em minutos. Ou seja, poderemos gerar DT muito facilmente: $dt = -\dfrac{\ln(u)}{\lambda} = -\dfrac{\ln(u)}{0,7}$(em minutos).

    A duração do atendimento de cada cliente é Tiangular [30; 60; 90] (*) segundos e, assim, podemos gerar: da = (u_1 + u_2)*30 + 30 (em segundos).

(a)

u	**dt (min)**	**t (hh:mm:ss)**
		09:00:00
0,1526	2,6856	09:02:41
0,3063	1,6903	09:04:22
0,4413	1,1686	09:05:32
0,8898	0,1668	09:05:42
0,0202	5,5744	09:11:17
0,7723	0,3691	09:11:39
0,1453	2,7556	09:14:24
0,702	0,5055	09:14:54
0,4005	1,3072	09:16:13
0,3174	1,6394	09:17:51

(b)

u_1	u_2	**da (seg)**	$\rightarrow$	**da (seg)** (*)
0,2114	0,394	48,162		48
0,8961	0,1503	61,392		61
0,0415	0,074	33,465		33
0,7574	0,3742	63,948		64
0,4862	0,9603	73,395		73
0,4763	0,7584	67,041		67
0,9575	0,6057	76,896		77
0,0823	0,2855	41,034		41
0,9456	0,5159	73,845		74
0,2451	0,9534	65,955		66

Nota (*): Arredondando para valores inteiros

(c)

T	Acontecimento	N	T espera	T fim	Tlivre
09:00:00	Início do Serviço				
09:02:41	Chegada do Cliente nº 1 1				
09:02:41	Início do Atendimento do Cliente nº 1	1	0	09:03:29	00:02:41
09:03:29	Final do Atendimento do Cliente nº 1	0			
09:04:22	Chegada do Cliente nº 2 1				
09:04:22	Início do Atendimento do Cliente nº 2	1	0	09:05:23	00:00:53
09:05:23	Final do Atendimento do Cliente nº 2	0			
09:05:32	Chegada do Cliente nº 3 1				
09:05:32	Início do Atendimento do Cliente nº 3	1	0	09:06:05	00:00:42
09:05:42	Chegada do Cliente nº 4 2				
09:06:05	Final do Atendimento do Cliente nº 3	1			
09:06:05	Início do Atendimento do Cliente nº 4	1	00:00:23	09:07:09	00:00:00

Proseguir até à entrada do 10º cliente.

(d) Determinar as medidas de desempenho da fila de espera, a partir dos valores do quadro da alínea anterior.