Introdução à Investigação Operacional

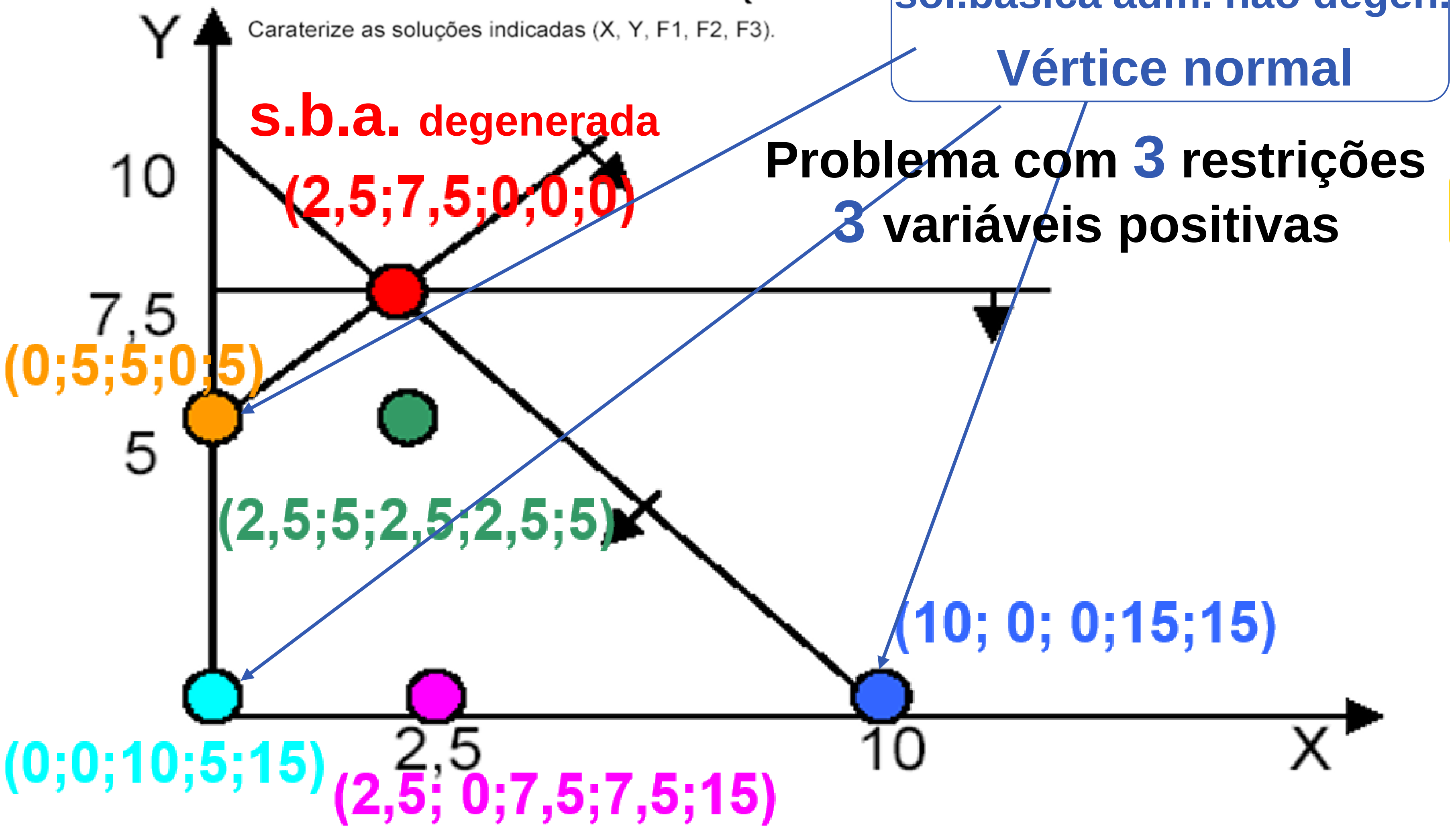
3ª aula T - Resumo

Resumo – IIO – T3

P.L. – Conceitos Fundamentais

Considere o seguinte conjunto de restrições: $\begin{cases} X + Y \leq 10 \\ -X + Y \leq 5 \\ 2Y \leq 15 \end{cases}$

Caraterize as soluções indicadas (X, Y, F1, F2, F3).



s.b.a. Degenerada – menos vars positivas do que o nº de restrições

Resumo – IIO – T3

P.L. – Conceitos Fundamentais

Se um problema de PL admitir uma **única solução ótima**, ela **é obrigatoriamente um vértice** do espaço de soluções admissíveis.

Numa situação de **multiplicidade de soluções ótimas**, sabe-se que pelo menos uma das soluções ótimas é um vértice do espaço de soluções admissíveis.

Todo o vértice do espaço de soluções admissíveis é uma solução básica.

Um **algoritmo** para resolver um problema de PL deverá analisar as soluções básicas admissíveis para encontrar a(s) solução(ões) ótima(s).

O espaço de soluções admissíveis de um problema de PL é um polítopo convexo!

Uma **solução admissível** de um problema de PL é um ponto desse polítopo convexo; **uma s.b.a. é um vértice desse polítopo convexo**.

O **Algoritmo Simplex** analisa apenas vértices do espaço de sols adms.

Resumo – IIO – T3

Introdução ao Algoritmo Simplex

- 1º - Re-escrever o problema na forma standard

- 2º - Arbitrar uma solução básica inicial

- 3º - Verificação da otimalidade da solução em análise

- 4º - Seleção da variável que entra na base

- 5º - Seleção da variável que sai da base

Quando obtém uma nova base, novo vértice, começa nova iteração:

Será que a solução em análise **é ótima?**

Sim → **Parar** ; Não → **Prosseguir**

Qual a **variável** que deve **entrar na base?**

Qual a **variável** que deve **sair da base?**

Obtemos, assim, a nova **base**. **Nova iteração**.

Resumo – IIO – T3
Algoritmo Simplex Primal – Quadros do Simplex

Maximizar $F = 4.X + 3.Y$

sujeito a:

$-1.X + 1.Y \leq 3$
$4.X + 1.Y \leq 8$

$X, Y \geq 0$

	X	Y	F_1	F_2	T.I.
	-1	1	1	0	3
	4	1	0	1	8
F	- 4	-3	0	0	0

$\text{Max } F = 4.X+3.Y \rightarrow F - 4.X - 3.Y = 0$

	X	Y	F_1	F_2	T.I.	Δ_i
F_1	-1	1	1	0	3	—
F_2	4	1	0	1	8	8 / 4
F	- 4	-3	0	0	0	$\Delta = 2$

	X	Y	F_1	F_2	T.I.	Δ_i
F_1	**0**	5/4	**1**	1/4	5	5/(5/4)
X	**1**	**1/4**	**0**	**1/4**	**2**	2/(1/4)
F	**0**	-2	**0**	1	8	$\Delta = 4$

	X	Y	F_1	F_2	T.I.
Y	**0**	**1**	**4/5**	**1/5**	**4**
X	1	**0**	-1/5	1/5	1
F	0	**0**	**+8/5**	**+7/5**	16

(X* = 1 ; Y* = 4 ; F1* = 0 ; F2* = 0), com F* = 16

Resumo – IIO – T4
Alg. Simplex – Multiplicidade de Soluções Ótimas

Maximizar F = 3. X + 3. Y

sujeito a:

1 . X + 3 . Y ≤ 12
1 . X + 1 . Y ≤ 6
2 . X + 1 . Y ≤ 10

X , Y ≥ 0

	X	Y	F_1	F_2	F_3	T.I.	Δ_j		Quadro Inicial
F_1	1	3	1	0	0	12	12/1		
F_2	1	1	0	1	0	6	6/1		
F_3	2	1	0	0	1	10	10/2	←	X = 0 ; Y = 0
F	- 3	-3	0	0	0	0	Δ = 5		F = 0
	↑	↑							

	X	Y	F_1	F_2	F_3	T.I.	Δ_j		
F_1	0	5/2	1	0	-1/2	7	7/(5/2)		1ª Iteração
F_2	0	1/2	0	1	-1/2	1	1/(1/2)	←	
X	1	1/2	0	0	1/2	5	5/(1/2)		X = 5; Y = 0
F	0	-3/2	0	0	3/2	15	Δ = 2		F = 15
		↑							

	X	Y	F_1	F_2	F_3	T.I.	Δ_j		2ª Iteração
F_1	0	0	1	-5	2	2	2 / 2	←	
Y	0	1	0	2	-1	2	—		X* = 4 ; Y* = 2
X	1	0	0	-1	1	4	4 / 1		F* = 18
F	0	0	0	3	0	18	Δ = 1		Sol. óptima
					↑				

	X	Y	F_1	F_2	F_3	T.I.	Δ_j		3ª Iteração
F_3	0	0	1/2	-5/2	1	1	1/(1/2)	←	
Y	0	1	1/2	-1/2	0	3	3/(1/2)		X* = 3 ; Y* = 3
X	1	0	-1/2	3/2	0	3	—		F* = 18
F	0	0	0	3	0	18	Δ = 2		Sol. óptima
			↑						

$$(X^*, Y^*) = \lambda . (4, 2) + (1 - \lambda) . (3, 3) \quad ; \lambda \in [0, 1]$$

Ruy Costa

Resumo – IIO – T4
Alg. Simplex – casos particulares

	X	Y	F_1	F_2	T.I.	Δ_j
Y	0	1	-1/6	2/3	23/6	—
X	**1**	**0**	**-1/3**	**1/3**	**5/3**	—
F	0	0	**- 7/6**	8/3	89/6	Δ = ?

↑

1ª Iteração

X= 5/3 ; Y = 23/6

F = 89/6

Sol. não óptima

Problema com espaço de soluções ilimitado e sem sol. ótima limitada!

	X	Y	F_1	F_2	T.I.	Δ_j
Y	0	1	-1/6	2/3	23/6	—
X	**1**	**0**	**-1/3**	**1/3**	**5/3**	—
F	0	0	**0**	2	12	Δ = ?

↑

1ª Iteração

X*= 5/3 ; Y* = 23/6

F* = 12

Sol. óptima não única !

(X* = 5/3; Y* = 23/6) é a única s.b.a que é ótima. Mas, há infinitas soluções ótimas <u>não</u> básicas ... (espaço de soluções ilimitado).

Resumo – IIO – T4
Formulação Matricial do Simplex

Var.s Básicas | **Var.s Não Básicas** | **TI**

$$\left[\begin{array}{c:c|c} B & D & b \\ \hdashline -\,C_B & -\,C_D & 0 \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

X_B – variáveis básicas

$$\begin{array}{c:c|c} \mathrm{I} & B^{-1} \times D & B^{-1} \times b \\ \hdashline 0 & -\,C_D + C_B \times B^{-1} \times D & (+\,C_B) \times B^{-1} \times b \end{array}$$

r - coeficientes de otimalidade

F – valor da f.o.

Resumo – IIO – T4

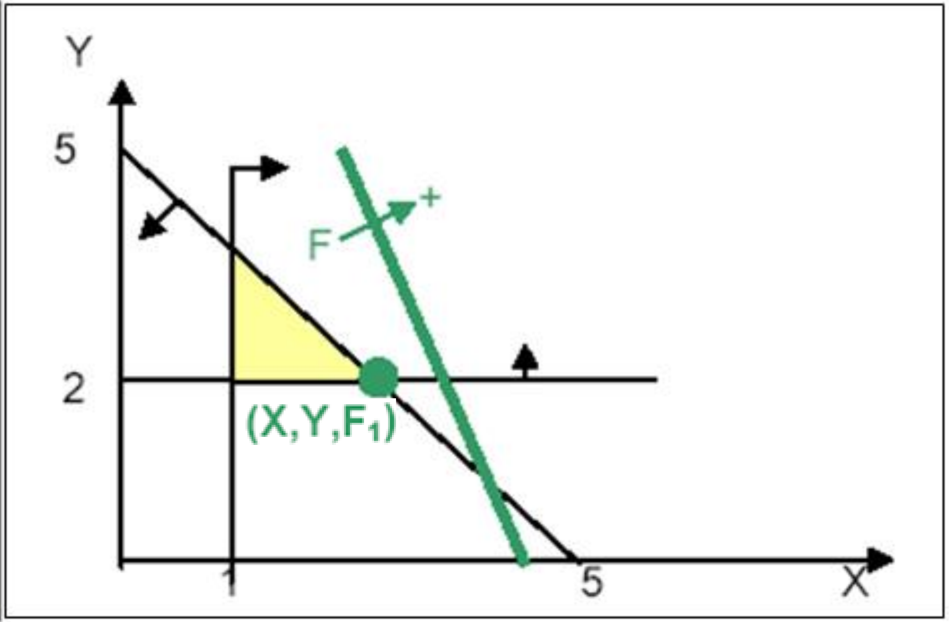
Formulação Matricial do Simplex

Consideremos o seguinte problema de Programação Linear:

Maximizar $F = 3 . X + Y$

sujeito a:

$$\begin{aligned} X & \geq 1 \\ Y & \geq 2 \\ X + Y & \leq 5 \\ X , Y & \geq 0 \end{aligned}$$



Var.s Básicas: (X ; Y ; F_1) **Var.s Não Básicas: (F_2 ; F_3)**

Representação Inicial do Problema:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|cc} X & Y & F_1 & F_2 & F_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array} \qquad b = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 5 \end{array} \right]$$

$$C = \left[\begin{array}{ccc|cc} +3 & +1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Resumo – IIO – T4

Formulação Matricial do Simplex

Var.s Básicas: (X ; Y ; F_1)   Var.s Não Básicas: (F_2 ; F_3)

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1}.D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad X_B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$r = \begin{bmatrix} +2 & +3 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 11 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \mathrm{I} & B^{-1} \times D & B^{-1} \times b \\ \hline 0 & -C_D + C_B \times B^{-1} \times D & (+C_B) \times B^{-1} \times b \end{array}\right]$$

	X	Y	F_1	F_2	F_3	TI
X	1	0	0	1	1	3
Y	0	1	0	-1	0	2
F_1	0	0	1	1	1	2
F	0	0	0	+ 2	+ 3	11

Resumo – IIO – T3

TPC, Leitura adicional

Leituras de apoio:

Elementos de apoio às aulas de IIO – Caps IV, V, VI e VII – PL:Conceitos Fundamentais; Introdução ao Alg. Simplex; Alg. Simplex; Formulação Matricial do Simplex – ficheiro pdf pp. 34 a 77.

Disponível atividade semanal de apoio à aprendizagem no moodle!