Capítulo XI

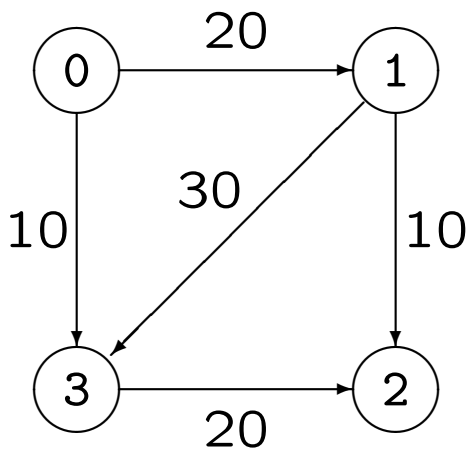
Fluxo Máximo entre Dois Vértices

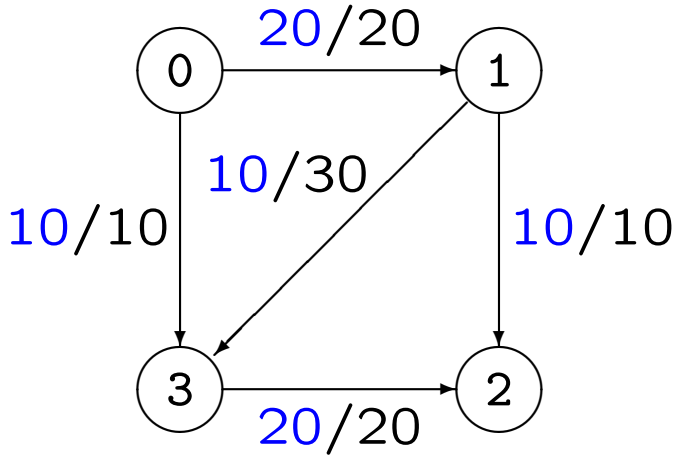
—

Algoritmo de Edmonds-Karp

Problema

Dado um grafo **orientado** e **pesado** (com pesos não negativos) e dois vértices f e d, como encontrar um **fluxo máximo de f para d**?



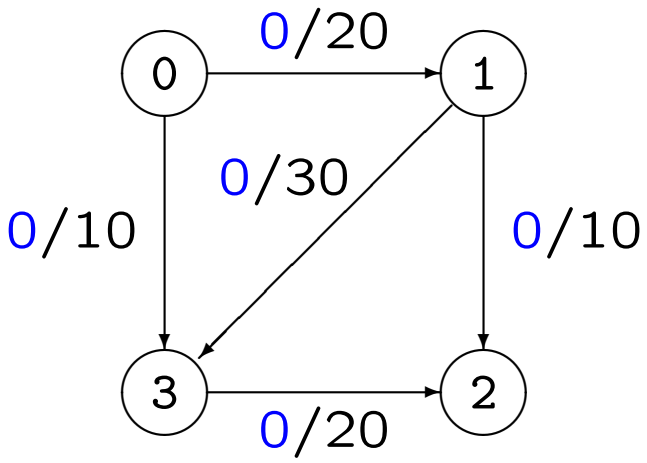


Valor de um Fluxo Máximo de 0 para 2: 30

Assume-se que qualquer vértice pertence a um caminho de f para d.

Portanto, o grafo é **simplesmente conexo** e $|A| \geq |V| - 1$.

Ideia Geral (de 0 para 2)



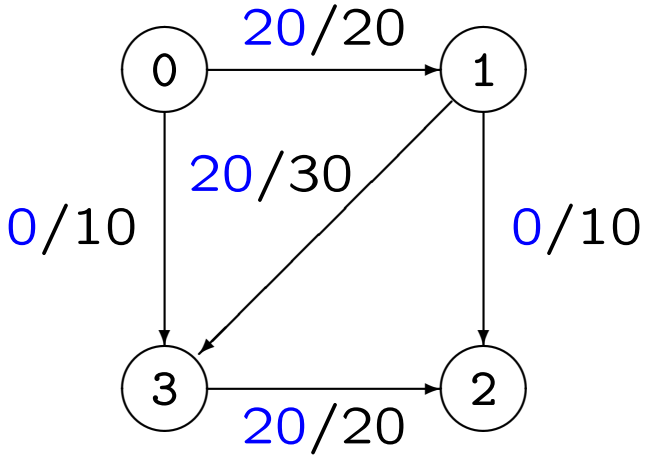
Descobrir um caminho para drenar:

0, 1, 3, 2.

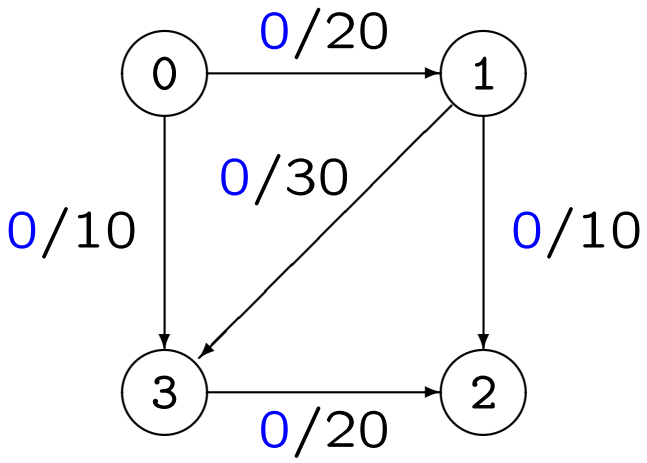
Incremento máximo permitido:

20.

Atualizar o fluxo.



Ideia Geral (de 0 para 2)



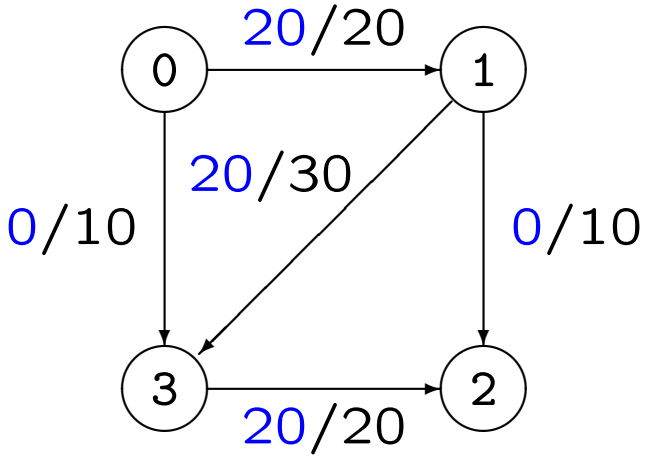
Descobrir um caminho para drenar:

0, 1, 3, 2.

Incremento máximo permitido:

20.

Atualizar o fluxo.



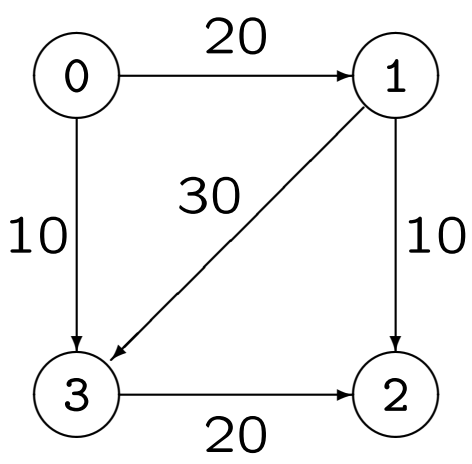
PROBLEMA:

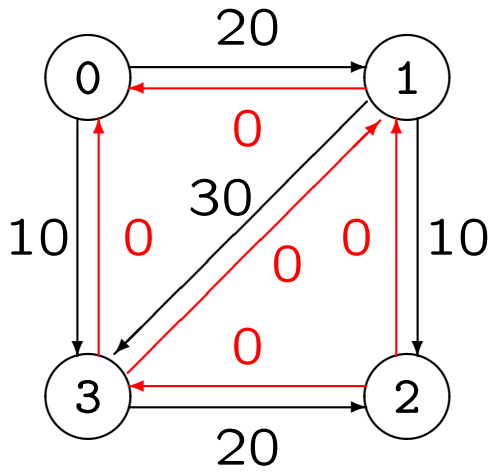
- já não há caminho para drenar; e
- o valor de um fluxo máximo é superior a 20.

Rede de Fluxos

Seja $G = (V, A)$ um grafo orientado e pesado, cujos arcos têm um peso não negativo (que representa a capacidade do arco). A **rede de fluxos** de G é o grafo $R = (V, A')$, orientado e pesado, tal que:

- $A \subseteq A'$ (a rede tem todos os arcos de G);
- Se $(v, w) \in A$ e $(w, v) \notin A$, a rede tem o arco (w, v) com peso zero.





Fluxo

Sejam:

- $R = (V, A')$ uma rede de fluxos;
- $f \in V$ o vértice fonte;
- $d \in V$ o vértice dreno; e
- $c(v, w)$ a capacidade do arco $(v, w) \in A'$.

Um **fluxo** em R é uma função $\phi : A' \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades.

- (Capacidade) $\phi(v, w) \leq c(v, w)$, para qualquer $(v, w) \in A'$.
- (Simetria) $\phi(v, w) = -\phi(w, v)$, para qualquer $(v, w) \in A'$.
- (Conservação) $\sum_{\{w|(v,w)\in A'\}} \phi(v, w) = 0$, para qualquer $v \in V \setminus \{f, d\}$.

O **valor do fluxo** ϕ da fonte f para o dreno d é:

$$\sum_{\{v|(f,v)\in A'\}} \phi(f, v).$$

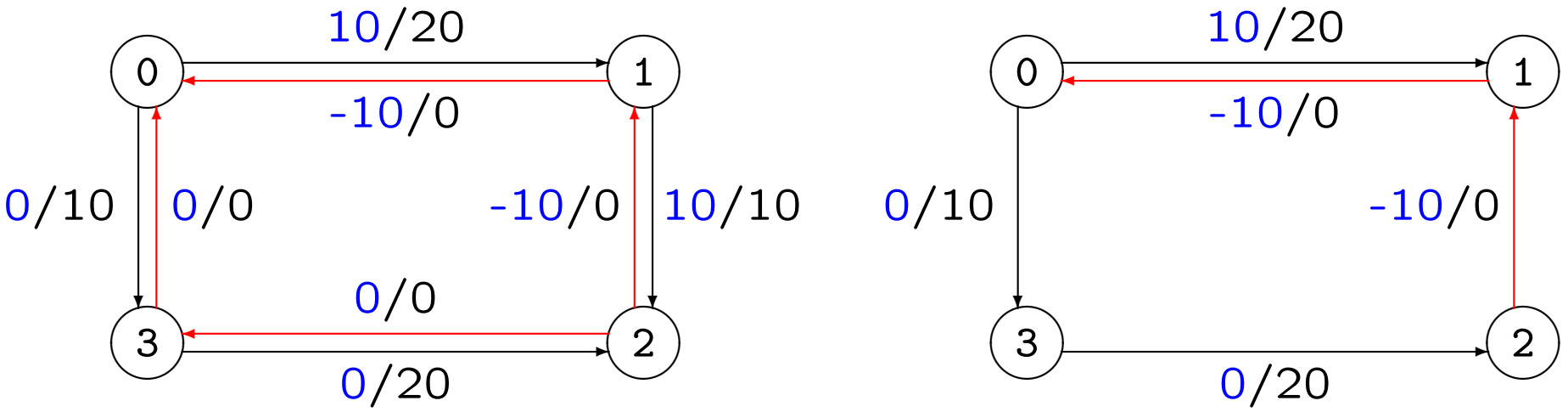
Rede Residual

Sejam:

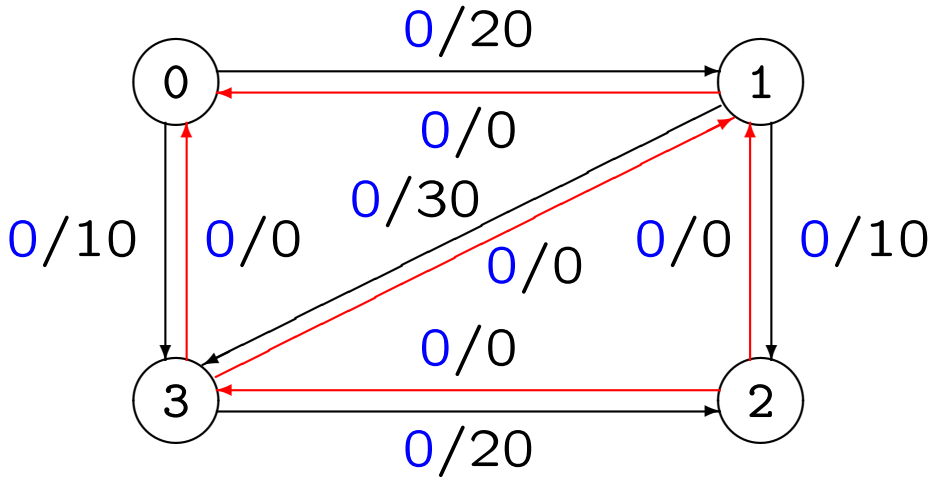
- $R = (V, A')$ uma rede de fluxos;
- $c(v, w)$ a capacidade do arco $(v, w) \in A'$; e
- ϕ um fluxo em R.

A **rede residual** de R induzida por ϕ é o grafo orientado $R_\phi = (V, A'')$, onde:

$$A'' = \{(v, w) \in A' \mid c(v, w) - \phi(v, w) > 0\}.$$



Método de Ford-Fulkerson [1962]



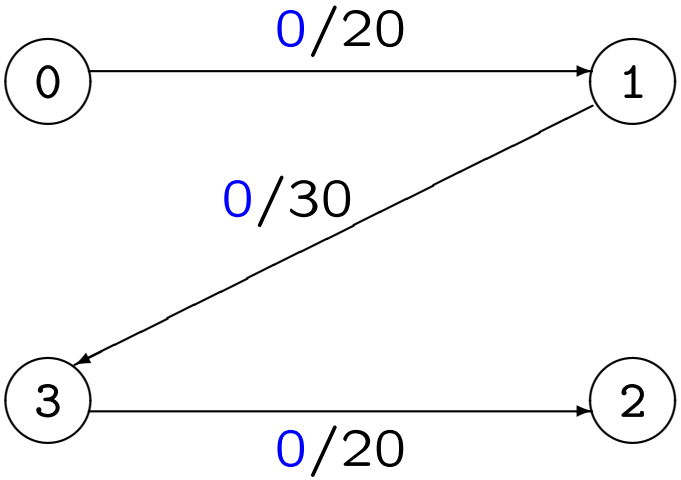
Caminho na rede residual:

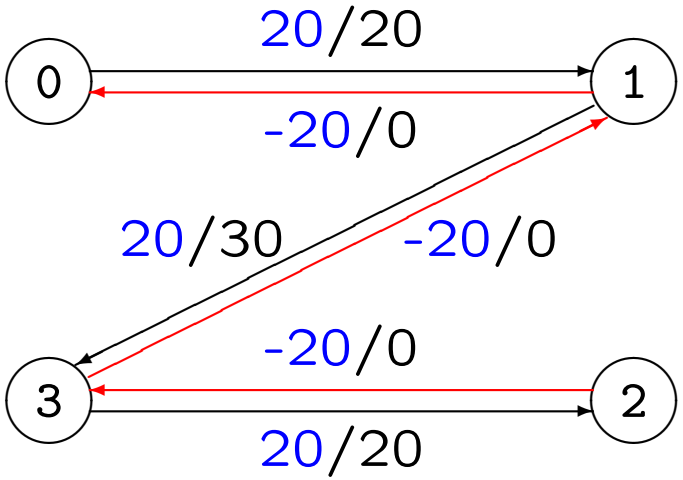
0, 1, 3, 2.

Incremento máximo permitido:

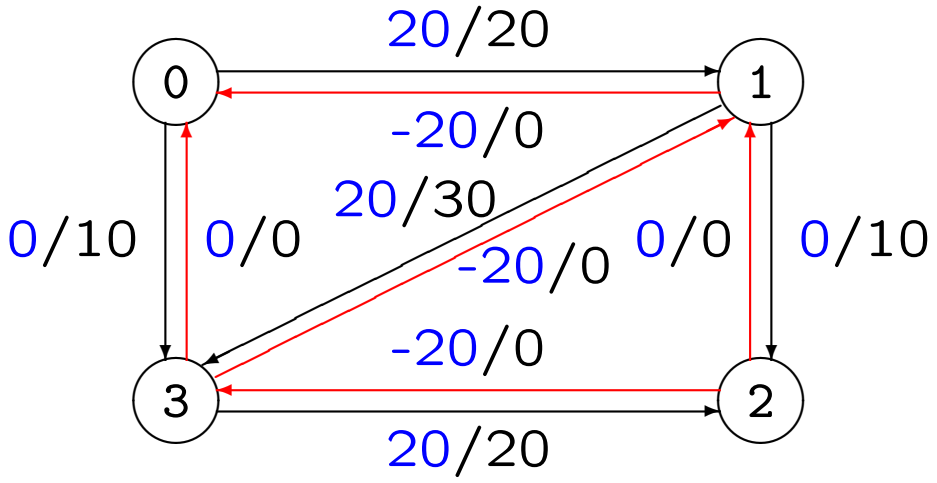
20.

Atualizar o fluxo.





Método de Ford-Fulkerson (2)



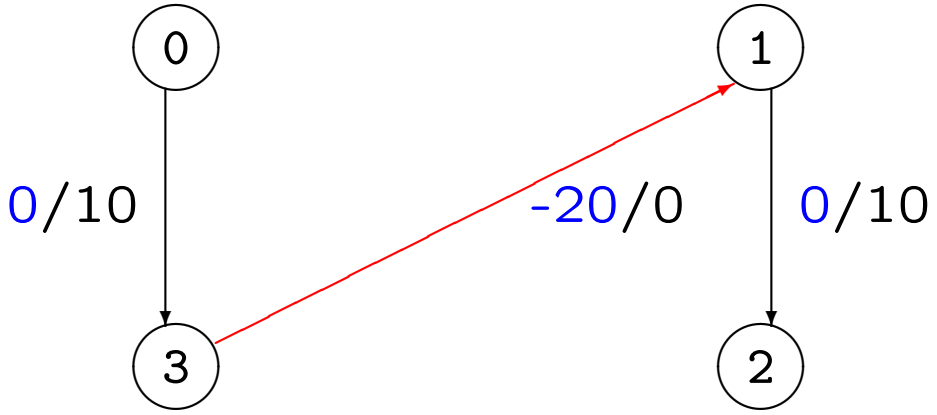
Caminho na rede residual:

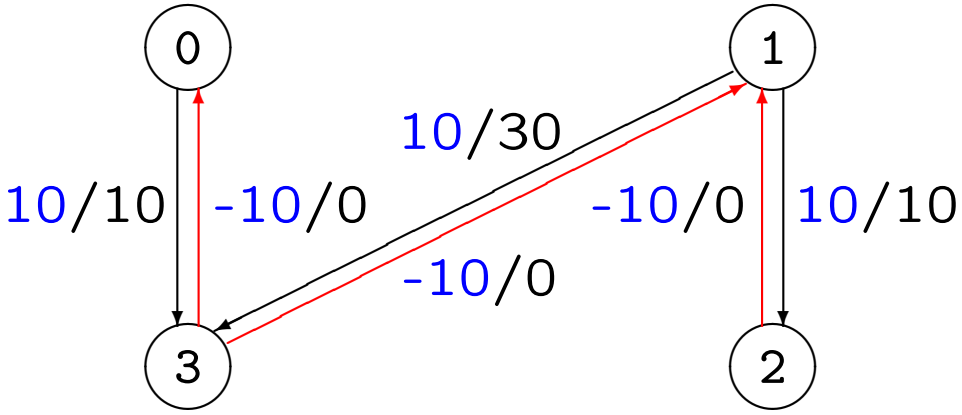
0, 3, 1, 2.

Incremento máximo permitido:

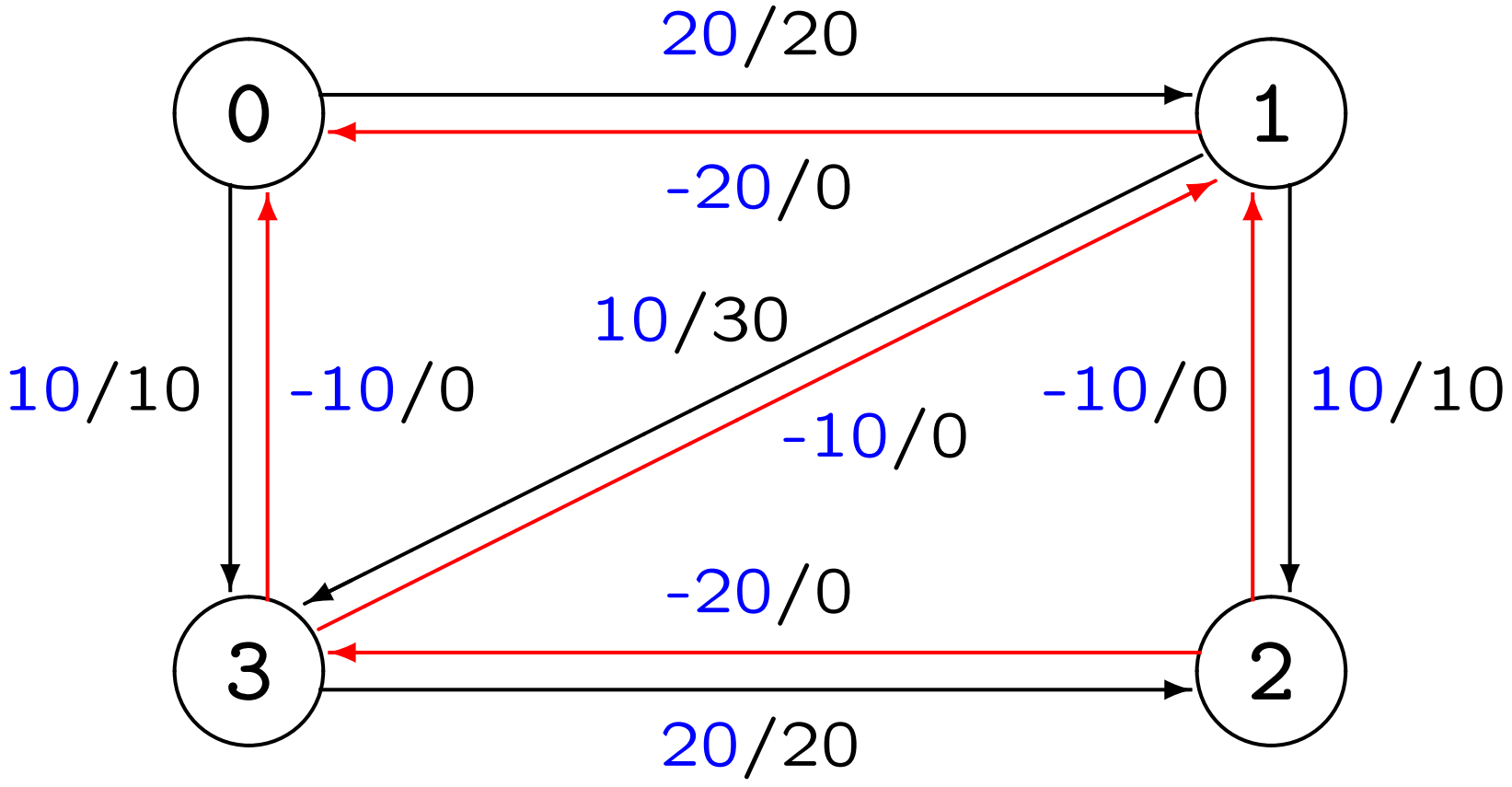
10.

Atualizar o fluxo.





Método de Ford-Fulkerson (3)



Como não há caminho de 0 para 2 na rede residual, o fluxo é máximo (e o seu valor é 30).

Observações

- O **método** de Ford-Fulkerson não especifica como se descobrem os caminhos da fonte f para o dreno d na rede residual.
- Se os pesos dos arcos forem números **irracionais**, o método pode não convergir.
- Se os pesos dos arcos forem números **racionais**, podem ser convertidos para números inteiros.
- Se os pesos dos arcos forem números **inteiros**, o número máximo de iterações não excede ...

  Justificação:

Observações

- O **método** de Ford-Fulkerson não especifica como se descobrem os caminhos da fonte f para o dreno d na rede residual.
- Se os pesos dos arcos forem números **irracionais**, o método pode não convergir.
- Se os pesos dos arcos forem números **racionais**, podem ser convertidos para números inteiros.
- Se os pesos dos arcos forem números **inteiros**, o número máximo de iterações não excede o valor dos fluxos máximos.

  Justificação: no início, o valor do fluxo é zero e, em cada iteração, o valor do fluxo é incrementado em, pelo menos, uma unidade.

Algoritmo de Edmonds-Karp [1972]

Aplica o método de Ford-Fulkerson,

descobrindo os caminhos da fonte f para o dreno d

com uma pesquisa em largura na rede residual.

Esses caminhos têm comprimento mínimo,

considerando que cada arco tem custo (distância) um.

Construir a Rede de Fluxos

```
Digraph<L> buildNetwork( Digraph<L> graph )
{
    // The network has every vertex and every edge in the graph.
    Digraph<L> network = graph.clone();

    // For every edge (v1, v2) in the graph (V, E),   if (v2, v1) ∉ E,
    // insert edge (v2, v1) with capacity zero in the network.
    for every Edge<L> e in graph.edges()
    {
        Vertex[] endPoints = e.endVertices();
        if ( !graph.edgeExists(endPoints[1], endPoints[0]) )
            network.insertEdge(endPoints[1], endPoints[0], 0);
    }
    return network;
}
```

Fluxo Máximo

```
Pair<L, L[][]> edmondsKarp( Digraph<L> graph, Vertex source,
    Vertex sink )
{
    Digraph<L> network = buildNetwork(graph);
    int numVert = network.numVertices();
    L[][] flow = new L[numVert][numVert];
    for every Edge<L> e in network.edges()
    {
        Vertex[] endPoints = e.endVertices();
        flow[ endPoints[0] ][ endPoints[1] ] = 0;
    }
    Vertex[] via = new Vertex[numVert];
    L flowValue = 0;
    L increment;
```

```
    while ( ( increment = findPath(network, flow, source, sink, via) )
              != 0 )
    {
        flowValue += increment;
        // Update flow.
        Vertex vertex = sink;
        while ( vertex != source )
        {
            Vertex origin = via[vertex];
            flow[origin][vertex] += increment;
            flow[vertex][origin] -= increment;
            vertex = origin;
        }
    }
    return new PairClass<L, L[][]>(flowValue, flow);
}
```

```
L findPath( Digraph<L> network,  L[][] flow,  Vertex source,
    Vertex sink,  Vertex[] via )
{
    int numVert = network.numVertices();

    Queue<Vertex> waiting = new QueueIn...<Vertex>(?);

    boolean[] found = new boolean[numVert];
    for every Vertex v in network.vertices()
        found[v] = false;

    L[] pathIncr = new L[numVert];

    waiting.enqueue(source);
    found[source] = true;
    via[source] = source;
    pathIncr[source] = +∞;
```

```
    do {
        Vertex origin = waiting.dequeue();
        for every Edge<L> e in network.outIncidentEdges(origin)
        {
            Vertex destin = e.endVertices()[1];
            L residue = e.label() − flow[origin][destin];
            if ( !found[destin]  &&  residue > 0 )
            {
                via[destin] = origin;
                pathIncr[destin] = Math.min(pathIncr[origin], residue);
                // destin == sink? Tratamento diferente.
            }
        }
    }
    while ( !waiting.isEmpty() );
    return 0;
}
```

```
for every Edge<L> e in network.outIncidentEdges(origin)
{
    Vertex destin = e.endVertices()[1];
    L residue = e.label() − flow[origin][destin];
    if ( !found[destin]  &&  residue > 0 )
    {
        via[destin] = origin;
        pathIncr[destin] = Math.min(pathIncr[origin], residue);
        if ( destin == sink )
            return pathIncr[destin];

        waiting.enqueue(destin);
        found[destin] = true;
    }
}
```

Complexidade do Algoritmo de Edmonds-Karp

Grafo $G = (V, A)$ em Listas de Adjacências

construir a rede de fluxos	$O(\|V\| \times \|A\|)$
inicializar o fluxo	$\Theta(\|A\|)$
k $\times$ descobrir um caminho	$O(k \times \|A\|)$
k $\times$ atualizar o fluxo	$O(k \times \|V\|)$
TOTAL	$O((\|V\| + k) \times \|A\|)$

Complexidade do Algoritmo de Edmonds-Karp

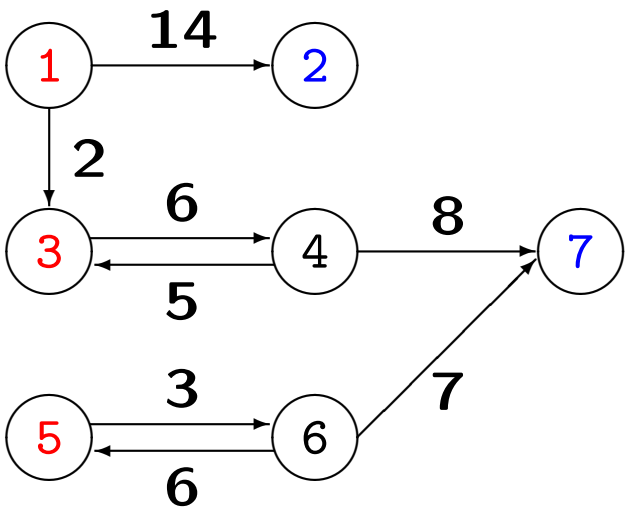
Grafo $G = (V, A)$ em Listas de Adjacências

construir a rede de fluxos	$O(\|V\| \times \|A\|)$
inicializar o fluxo	$\Theta(\|A\|)$
k $\times$ descobrir um caminho	$O(k \times \|A\|)$
k $\times$ atualizar o fluxo	$O(k \times \|V\|)$
TOTAL	$O((\|V\| + k) \times \|A\|)$

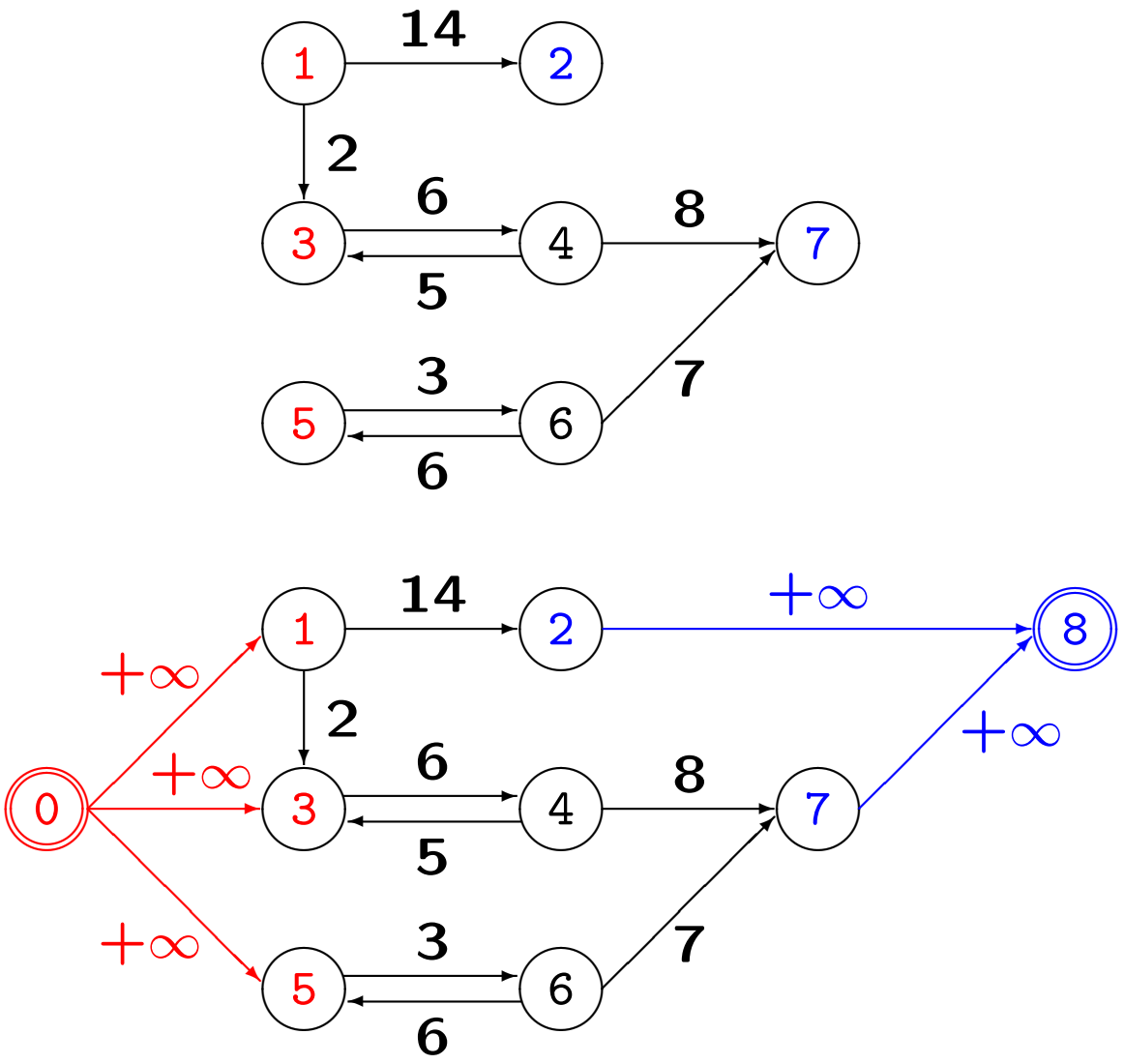
Resultado: O número de iterações (k) do algoritmo de Edmonds-Karp não excede $|V| \times |A|$ (nem excede o valor dos fluxos máximos).

Portanto, a complexidade do algoritmo é $O(|V| \times |A|^2)$.

Generalização para Múltiplas Fontes ou Drenos



Generalização para Múltiplas Fontes ou Drenos



Transformação e Conquista

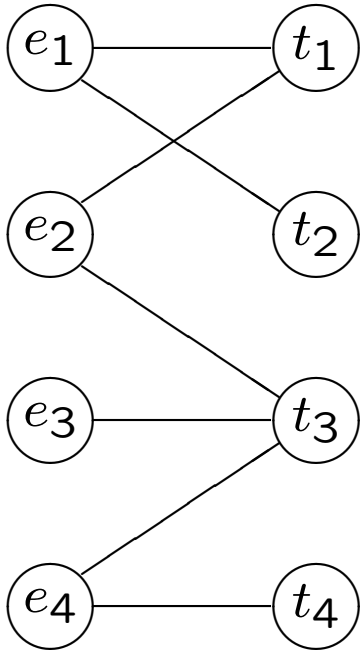
—

Emparelhamento Máximo num grafo bipartido

Exemplo de Problema

Cada empregado pode executar, no máximo, uma tarefa e cada tarefa só pode ser atribuída a um empregado.

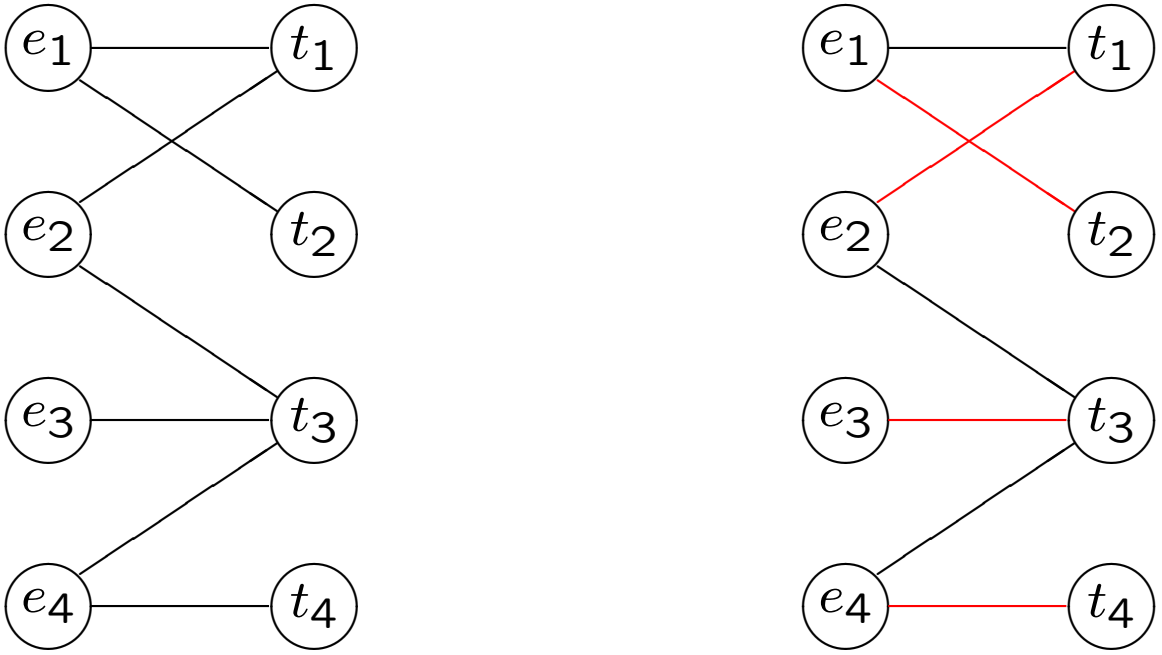
Como distribuir as tarefas pelos empregados, maximizando o número de tarefas atribuídas (ou seja, maximizando o número de empregados com trabalho)?



Exemplo de Problema

Cada empregado pode executar, no máximo, uma tarefa e cada tarefa só pode ser atribuída a um empregado.

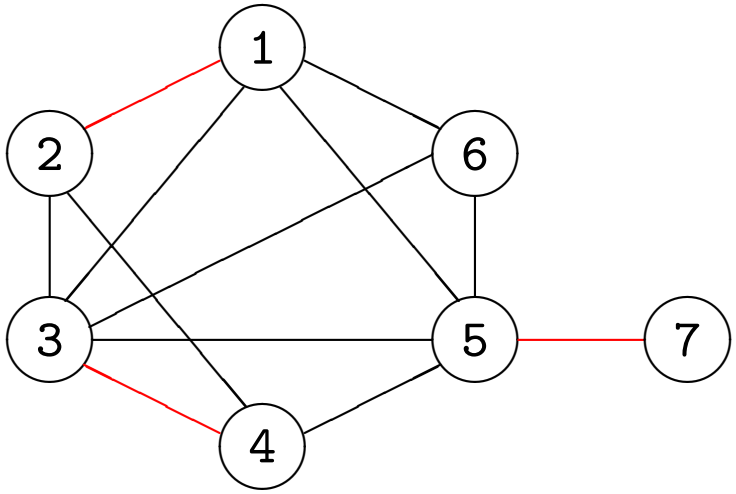
Como distribuir as tarefas pelos empregados, maximizando o número de tarefas atribuídas (ou seja, maximizando o número de empregados com trabalho)?



Emparelhamento

Seja $G = (V, A)$ um grafo **não orientado**. Um **emparelhamento** E em G é um subconjunto de arcos de G não adjacentes entre si. Ou seja,

- $E \subseteq A$ e
- para todo o vértice $v \in V$, existe no máximo um arco em E que tem uma extremidade em v.



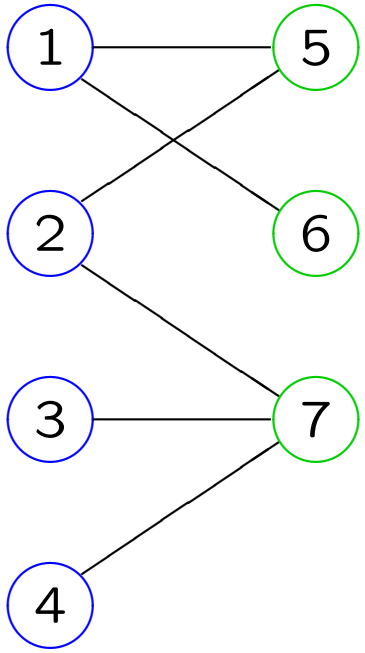
Um **emparelhamento máximo** é um emparelhamento de cardinalidade máxima.

Grafo Bipartido

Um grafo **não orientado** $G = (V, A)$ diz-se **bipartido**, se existir uma partição de vértices $\{X, Y\}$

(ou seja, $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$, $X \cup Y = V$ e $X \cap Y = \emptyset$)

tal que todos os arcos de G têm uma extremidade em X e outra em Y.

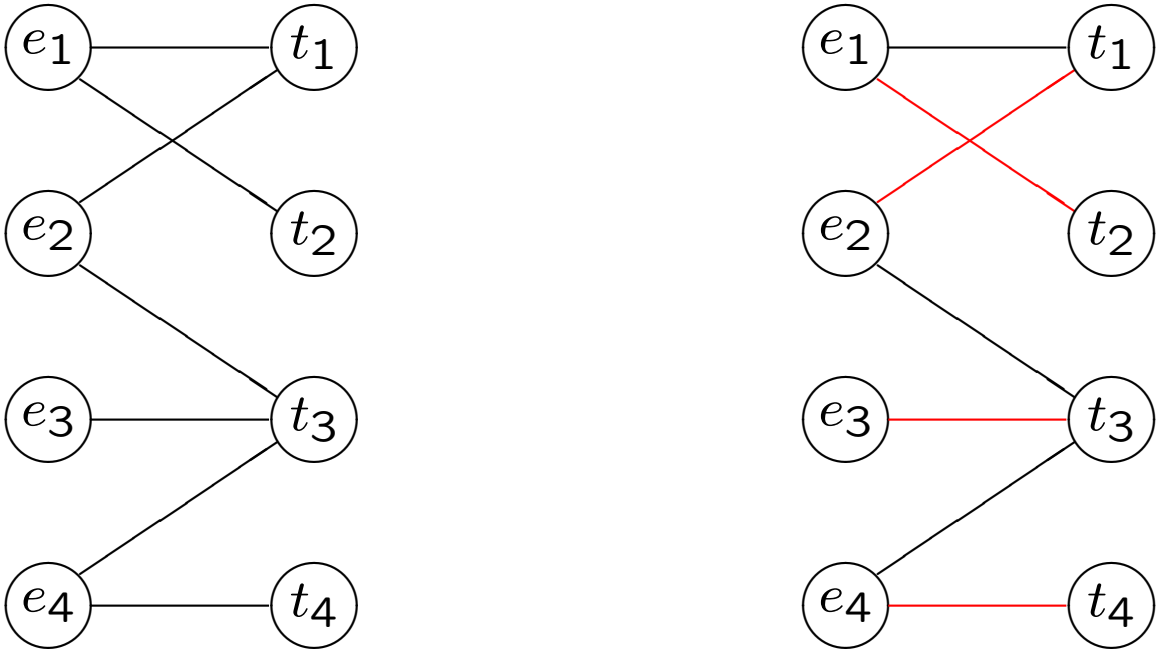


$X = \{1, 2, 3, 4\}$

$Y = \{5, 6, 7\}$

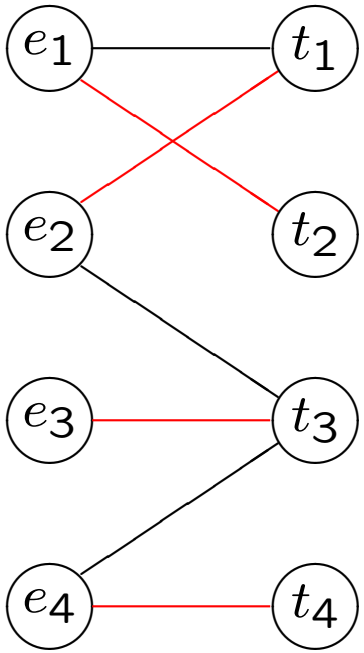
Problema

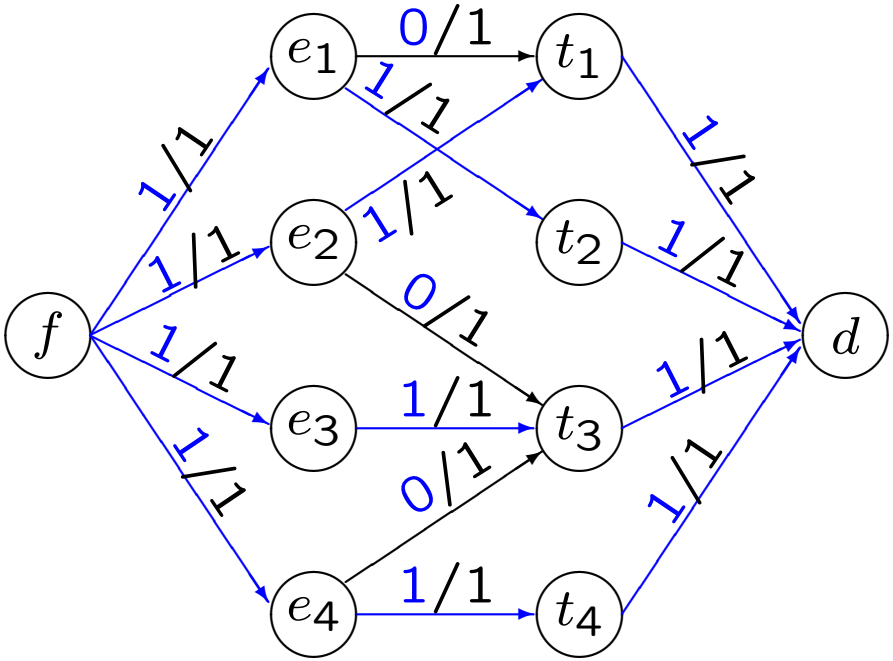
Como distribuir as tarefas pelos empregados, maximizando o número de tarefas atribuídas (ou seja, maximizando o número de empregados com trabalho)?



Como encontrar um emparelhamento máximo num grafo não orientado e bipartido?

Fluxo Máximo num Grafo Orientado e Pesado





Há uma correspondência "perfeita" entre o emparelhamento máximo E e o fluxo máximo ϕ de f para d:

- o número de arcos de E é o valor de ϕ;
- para todos os arcos da forma (e, t), $(e, t) \in E \Leftrightarrow \phi(e, t) = 1$.

Emparelhamento Máximo num Grafo Bipartido

Sejam $G = (V, A)$ um grafo não orientado e bipartido, e $\{X, Y\}$ uma partição de V. Seja $G' = (V', A')$ o grafo orientado e pesado tal que:

$V' = V \cup \{f, d\}$, onde f e d são dois novos vértices ($f, d \notin V$);

$A' = \{(f, x) \mid x \in X\} \cup \{(x, y) \mid (x, y) \in A, x \in X, y \in Y\} \cup \{(y, d) \mid y \in Y\}$;

e todos os arcos de A' têm peso 1.

Proposição

Há uma correspondência biunívoca entre cada emparelhamento máximo E em G e cada fluxo máximo ϕ de f para d em G':

- o número de arcos de E é o valor de ϕ;
- para todos os arcos $(x, y) \in A$, com $x \in X$ e $y \in Y$,

$$(x, y) \in E \Leftrightarrow \phi(x, y) = 1.$$

Complexidade do Emparelhamento Máximo com o Algoritmo de Edmonds-Karp

Grafo $G = (V, A)$ em Listas de Adjacências

cuja partição de vértices $\{X, Y\}$ verifica

$X = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ e $Y = \{n, n+1, \ldots, |V|-1\}$

construir a rede de fluxos	$\Theta(\|V\| + \|A\|)$
inicializar o fluxo	$\Theta(\|V\| + \|A\|)$
k $\times$ descobrir um caminho	$O(k \times (\|V\| + \|A\|))$
k $\times$ atualizar o fluxo	$O(k \times \|V\|)$
TOTAL	$O(k \times (\|V\| + \|A\|))$

Como o número de iterações (k) não excede ....,

a complexidade do algoritmo é .....

Complexidade do Emparelhamento Máximo com o Algoritmo de Edmonds-Karp

Grafo $G = (V, A)$ em Listas de Adjacências

cuja partição de vértices $\{X, Y\}$ verifica

$X = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ e $Y = \{n, n+1, \ldots, |V|-1\}$

construir a rede de fluxos	$\Theta(\|V\| + \|A\|)$
inicializar o fluxo	$\Theta(\|V\| + \|A\|)$
k $\times$ descobrir um caminho	$O(k \times (\|V\| + \|A\|))$
k $\times$ atualizar o fluxo	$O(k \times \|V\|)$
TOTAL	$O(k \times (\|V\| + \|A\|))$

Como o número de iterações (k) não excede $\frac{|V|}{2}$,

a complexidade do algoritmo é $O(|V| \times (|V| + |A|))$.

Transformação e Conquista

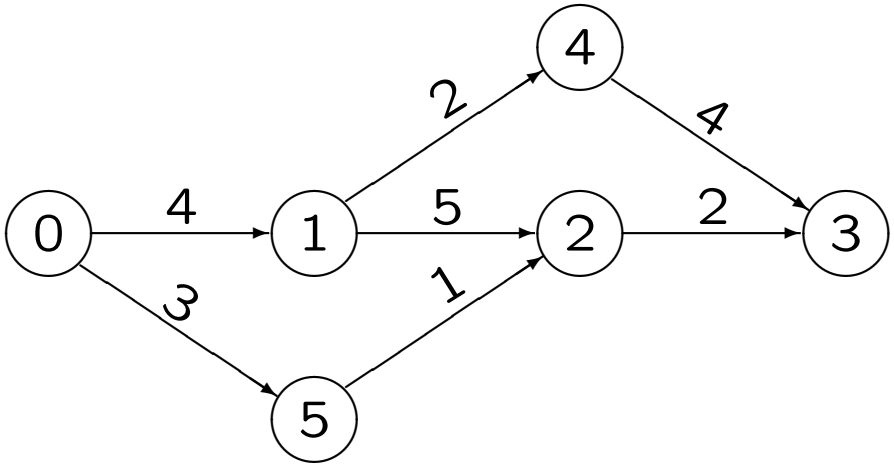
—

Corte Mínimo num grafo orientado e pesado

Exemplo de Problema

Pretende-se remover um conjunto de arcos do grafo de forma a deixar de haver caminho do vértice 0 para o vértice 3.

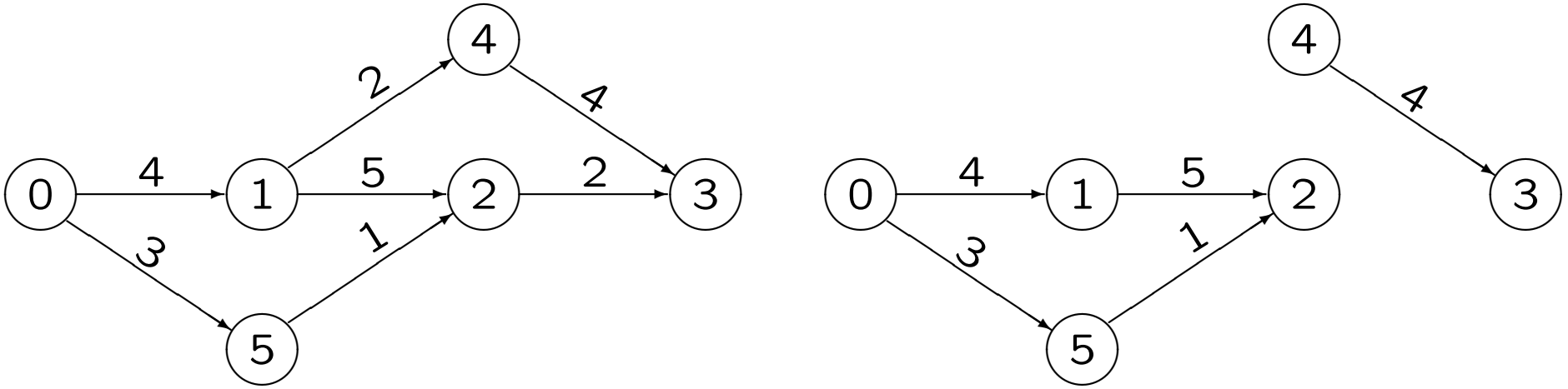
Que conjunto desses minimiza a soma dos pesos dos arcos removidos?



Exemplo de Problema

Pretende-se remover um conjunto de arcos do grafo de forma a deixar de haver caminho do vértice 0 para o vértice 3.

Que conjunto desses minimiza a soma dos pesos dos arcos removidos?



Conjunto $C = \{(1,4),(2,3)\}$

Soma dos pesos dos arcos de C: 4

Corte

Sejam $G = (V, A)$ um grafo **orientado** e **pesado** (com pesos não negativos) e $f, d \in V$. Assume-se que qualquer vértice de G pertence a um caminho de f para d.

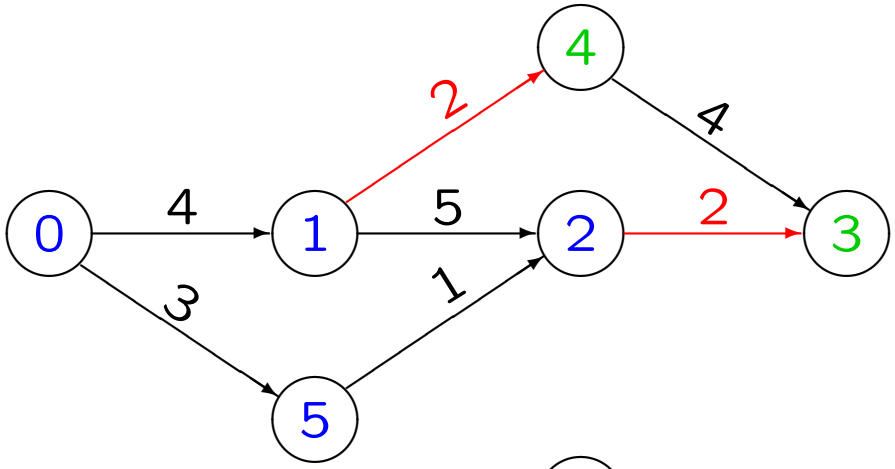
Dada uma partição de vértices $\{X, Y\}$ tal que $f \in X$ e $d \in Y$, o **corte** $f-d$ induzido por $\{X, Y\}$ em G é o conjunto dos arcos de G com origem em X e destino em Y:

$$C_{X,Y} = \{(v, w) \in A \mid v \in X, w \in Y\}.$$

A **capacidade de** $C_{X,Y}$ é a soma dos pesos dos arcos do corte:

$$\text{capacidade}(C_{X,Y}) = \sum_{(v,w) \in C_{X,Y}} \text{peso}(v, w).$$

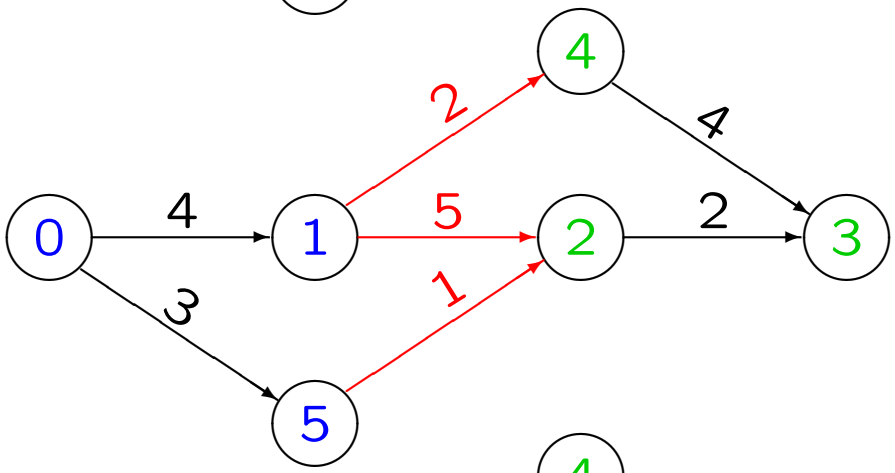
Um **corte mínimo** é um corte cuja capacidade é mínima.



$X = \{0, 1, 2, 5\}, \quad Y = \{3, 4\}$

$C_{X,Y} = \{(1, 4), (2, 3)\}$

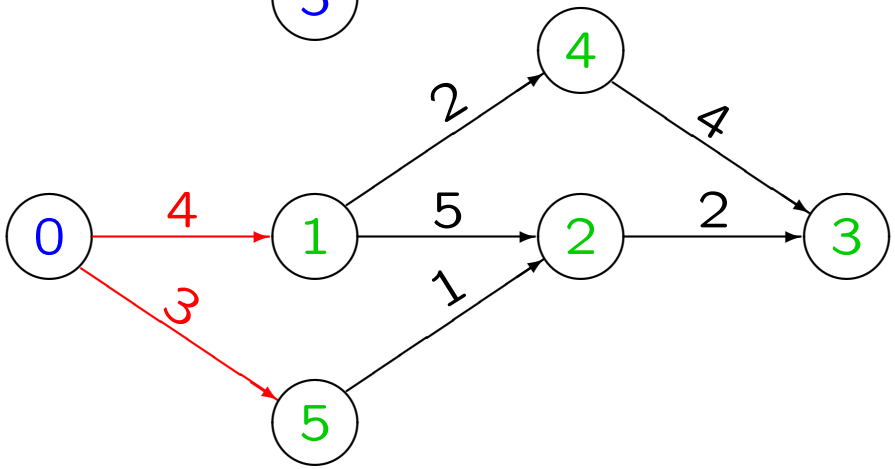
capacidade$(C_{X,Y}) = 4$



$X = \{0, 1, 5\}, \quad Y = \{2, 3, 4\}$

$C_{X,Y} = \{(1, 4), (1, 2), (5, 2)\}$

capacidade$(C_{X,Y}) = 8$



$X = \{0\}, \quad Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

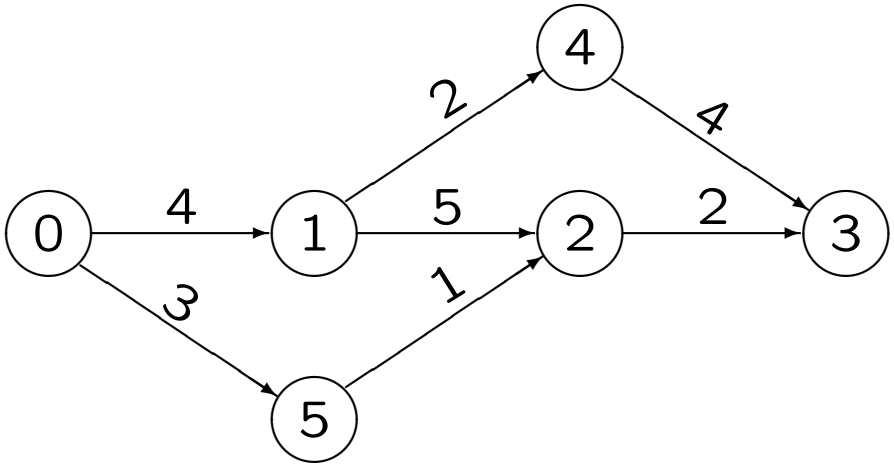
$C_{X,Y} = \{(0, 1), (0, 5)\}$

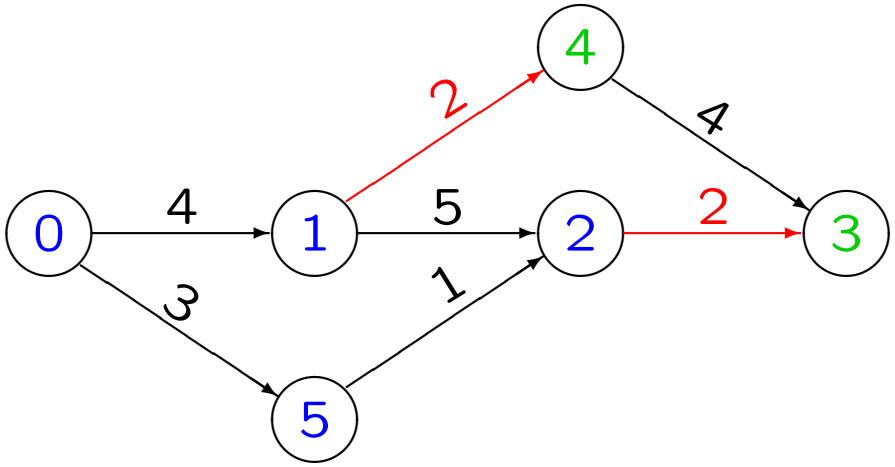
capacidade$(C_{X,Y}) = 7$

Problema

Pretende-se remover um conjunto de arcos do grafo de forma a deixar de haver caminho do vértice 0 para o vértice 3.

Que conjunto desses minimiza a soma dos pesos dos arcos removidos?





Como encontrar um corte $0-3$ mínimo num grafo orientado e pesado?

Teorema do fluxo-máximo corte-mínimo (*max-flow min-cut theorem*)

Sejam:

- $G = (V, A)$ um grafo orientado e pesado (com pesos não negativos);
- $f, d \in V$.

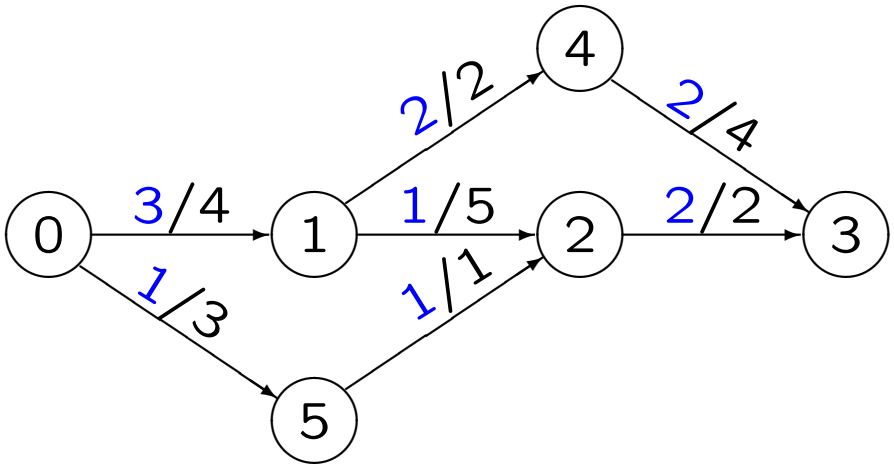
Assume-se que qualquer vértice pertence a um caminho de f para d.

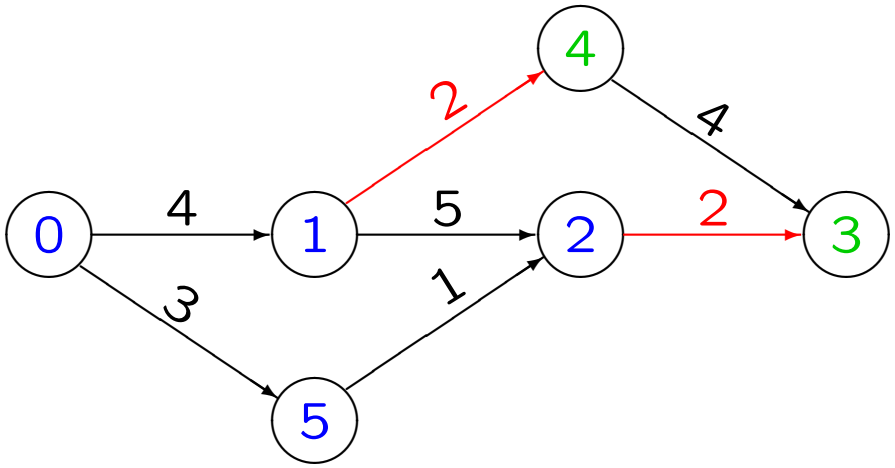
> O valor de um fluxo máximo de f para d em G **é igual** à capacidade dos cortes $f-d$ mínimos em G.

Se ϕ for um fluxo máximo de f para d em G e X for o conjunto dos vértices para os quais há caminho a partir de f na rede residual induzida por ϕ, então $C_{X,V\setminus X}$ é um corte $f-d$ mínimo em G.

Fluxo-Máximo / Corte-Mínimo

Se ϕ for um fluxo máximo de f para d em G e X for o conjunto dos vértices para os quais há caminho a partir de f na rede residual induzida por ϕ, então $C_{X,V\setminus X}$ é um corte $f-d$ mínimo em G.





$$X = \{0,1,2,5\}$$

$$Y = V \setminus X = \{3,4\}$$