Capítulo V

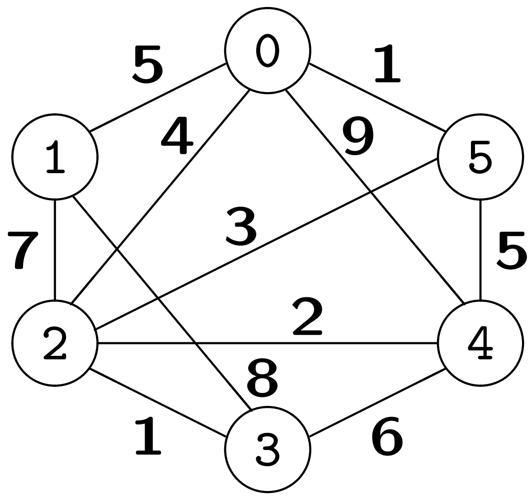
Árvore Mínima de Cobertura (num grafo não orientado)

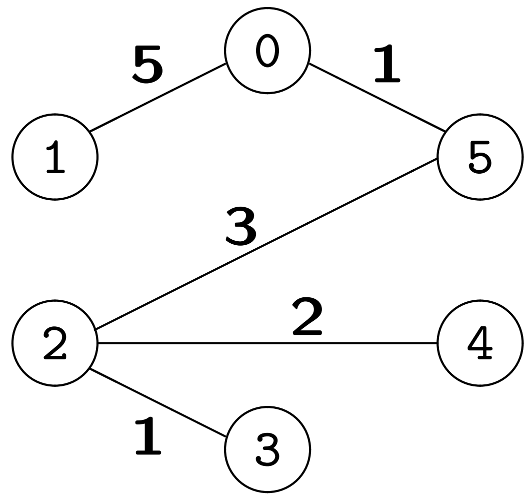
—

Algoritmo de Kruskal

Problema

Como ligar um dado equipamento, minimizando a soma dos comprimentos das ligações?



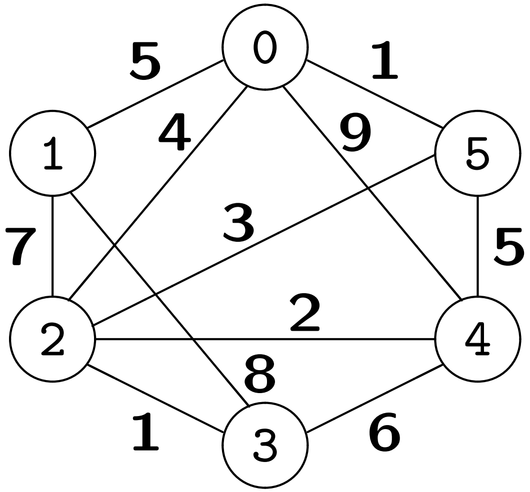


Árvore de Cobertura (sub-grafo acíclico e conexo com todos os vértices) de custo Mínimo (nenhuma árvore de cobertura tem custo menor).

Dado um grafo **não orientado e conexo**, como encontrar uma

Árvore Mínima de Cobertura?

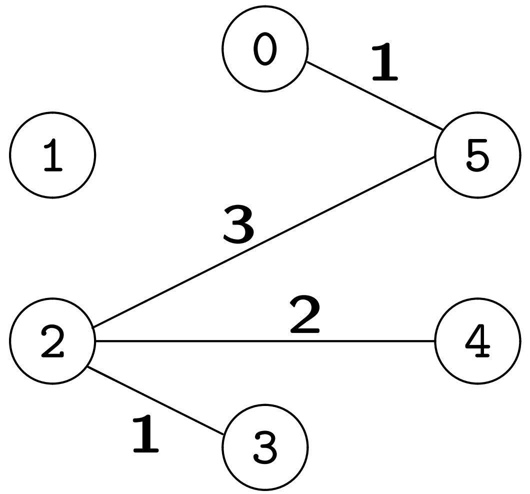
Algoritmo de Kruskal [1956]

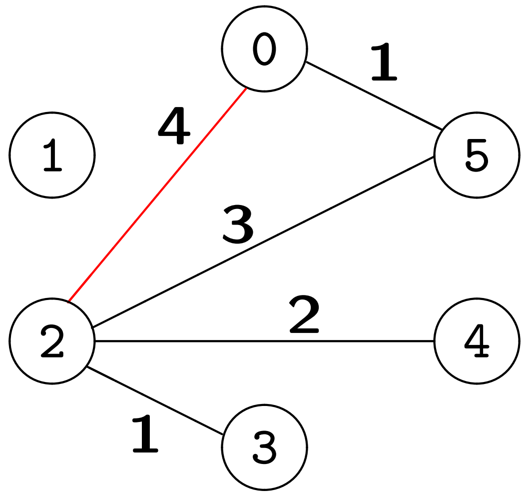


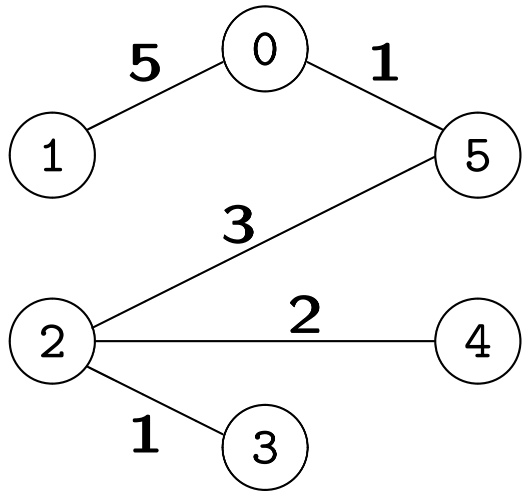
1 $0 \longleftrightarrow 5$ $\surd$
1 $2 \longleftrightarrow 3$ $\surd$
2 $2 \longleftrightarrow 4$ $\surd$
3 $2 \longleftrightarrow 5$ $\surd$
4 $0 \longleftrightarrow 2$
5 $0 \longleftrightarrow 1$ $\surd$

5 $4 \longleftrightarrow 5$
6 $3 \longleftrightarrow 4$
7 $1 \longleftrightarrow 2$
8 $1 \longleftrightarrow 3$
9 $0 \longleftrightarrow 4$

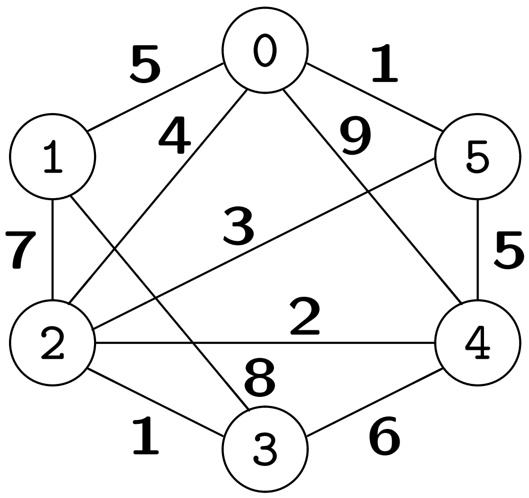
Custo da Árvore: **12**



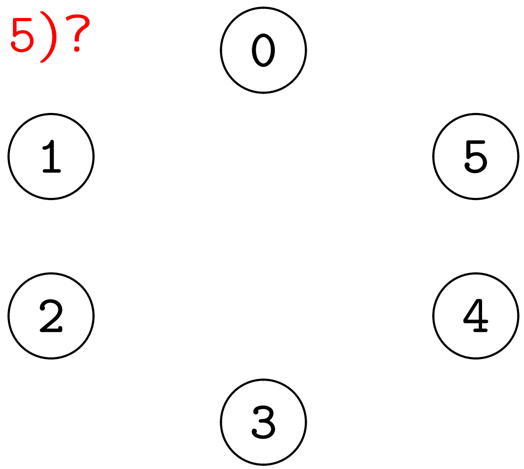




Há ciclo? (1)

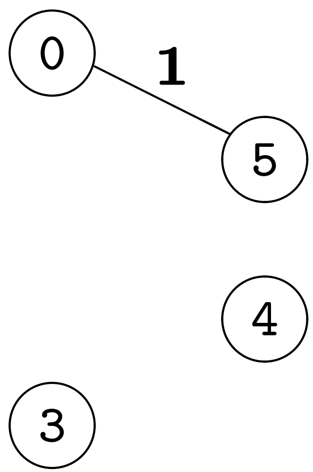


$(0,5)?$

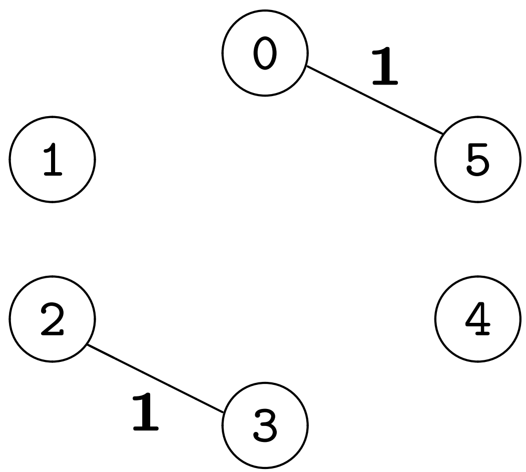


$\{\ \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\ \}$

$(2,3)?$



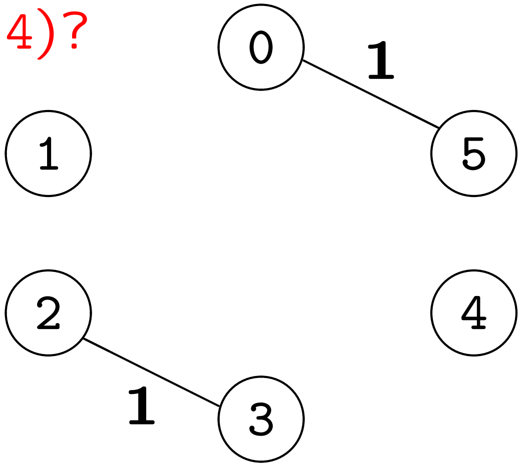
$\{\ \{0,5\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\ \}$



$\{\ \{0,5\}, \{1\}, \{2,3\}, \{4\}\ \}$

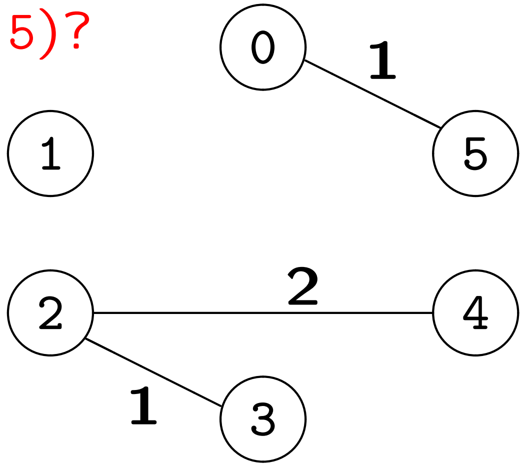
Há ciclo? (2)

$(2,4)$?



$\{\ \{0,5\}, \{1\}, \{2,3\}, \{4\}\ \}$

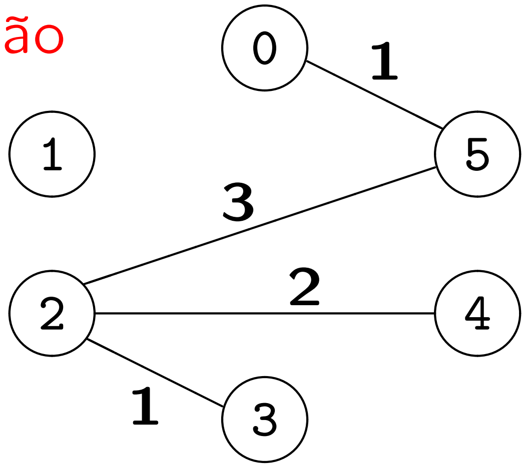
$(2,5)$?



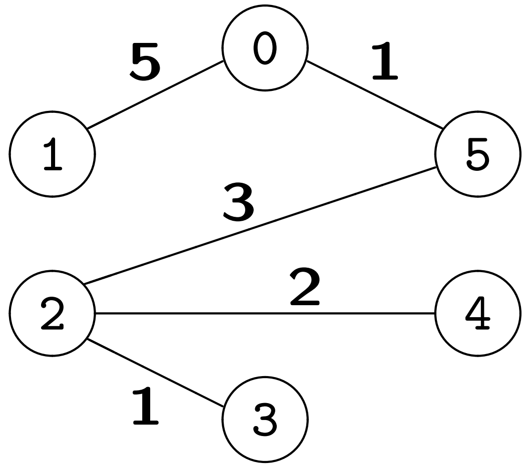
$\{\ \{0,5\}, \{1\}, \{2,3,4\}\ \}$

$(0,2)$? Não

$(0,1)$?



$\{\ \{0,5,2,3,4\}, \{1\}\ \}$



$\{\ \{0,1,2,3,4,5\}\ \}$

TAD Partição (com n elementos)

Os elementos dos conjuntos são $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Cada conjunto é identificado por um dos seus elementos, denominado **o representante** do conjunto.

$$\text{Domínio} = \{0, 1, ..., n-1\}$$

// Cria a partição $\{\{0\}, \{1\}, \ldots, \{n-1\}\}$.

Partição **cria**(**int** n);

// Devolve o representante do conjunto ao qual e pertence.

Domínio **representante**(Domínio e);

// Substitui os conjuntos C_e e C_f, cujos representantes são e e f,
// respetivamente, pelo conjunto $C_e \cup C_f$.
// **Pré-condição:** $e \neq f$ (ou seja, $C_e \neq C_f$).

void **reunião**(Domínio e, Domínio f);

Interface Partição (com n elementos)

```
public interface UnionFind
{
   // Creates the partition {{0},{1},...,{domainSize − 1}}.
   // UnionFind( int domainSize );

   // Returns the representative of the set that contains
   // the specified element.
   int find( int element ) throws InvalidElementException;

   // Removes the two distinct sets S1 and S2 whose representatives
   // are the specified elements, and inserts the set S1 ∪ S2.
   // The representative of the new set S1 ∪ S2 can be any of
   // its members.
   void union( int representative1, int representative2 ) throws
      InvalidElementException, NotRepresentativeException,
      EqualSetsException;
}
```

Construir a Fila com Prioridade de Arcos (Java)

```
@SuppressWarnings( “unchecked” )
MinPriorityQueue<L, Edge<L>> buildQueue( UndiGraph<L> graph )
{
    Entry<L, Edge<L>>[] auxArray =
        (Entry<L, Edge<L>>[]) new Entry[ graph.numEdges() ];
    int pos = 0;
    for every Edge<L> e in graph.edges()
        auxArray[pos++] = new EntryClass<L, Edge<L>>(e.label(), e);
    MinPriorityQueue<L, Edge<L>> priQueue =
        new MinHeap<L, Edge<L>>(auxArray);
    return priQueue;
}
```

Árvore Mínima de Cobertura (1)

(Minimum Spanning Tree)

```
Edge<L>[] mstKruskal( UndiGraph<L> graph )
{
  MinPriorityQueue<L, Edge<L>> allEdges = buildQueue(graph);

  UnionFind nodesPartition =
     new UnionFindInArray( graph.numNodes() );

  int mstFinalSize = graph.numNodes() - 1;

  Edge<L>[] mst = new Edge<L>[ mstFinalSize ];

  int mstSize = 0;
```

Árvore Mínima de Cobertura (2)

```
while ( mstSize < mstFinalSize )
{
    Edge<L> edge = allEdges.removeMin().getValue();
    Node[] endPoints = edge.endNodes();
    int rep1 = nodesPartition.find( endPoints[0] );
    int rep2 = nodesPartition.find( endPoints[1] );
    if ( rep1 != rep2 )
    {
        mst[ mstSize++ ] = edge;
        nodesPartition.union(rep1, rep2);
    }
}

return mst;
}
```

Complexidade

Identificação das Operações

criação do heap	$\Theta(\lvert A \rvert)$
criação da partição	?
criação do vetor resultado	$\Theta(1)$
Ciclo (executado entre $\lvert V \rvert - 1$ e $\lvert A \rvert$ vezes)	
1 remoção do mínimo	$O(\log \lvert A \rvert)$
2 representante	?
Ciclo (executado $\lvert V \rvert - 1$ vezes)	
1 inserção no vetor	$\Theta(1)$
1 reunião	?

Complexidade do Algoritmo de Kruskal

Reunião sem Estratégia

Representante sem Efeitos Laterais

criação do heap	$\Theta(\|A\|)$
criação da partição	$\Theta(\|V\|)$
criação do vetor resultado	$\Theta(1)$
Ciclo (executado entre $\|V\| - 1$ e $\|A\|$ vezes)	
1 remoção do mínimo	$O(\log \|A\|)$
2 representante	$O(\|V\|)$
Ciclo (executado $\|V\| - 1$ vezes)	
1 inserção no vetor	$\Theta(1)$
1 reunião	$\Theta(1)$
TOTAL	$O(\|A\| \times \|V\|)$

Complexidade do Algoritmo de Kruskal

Reunião sem Estratégia

Representante sem Efeitos Laterais

Complexidade do Primeiro Ciclo

$$O(\quad |A| \times \log |A| \quad + \quad |A| \times (2\mathbf{R}) \quad)$$

$$O(\quad |A| \times \underbrace{\log |A|}_{\log |A| < 2 \log |V| \text{ porque } |A| < |V|^2} \quad + \quad |A| \times |V| \quad)$$

$$O(\quad |A| \times \log |V| \quad + \quad |A| \times |V| \quad)$$

$$O(\quad |A| \times |V| \quad)$$

Complexidade do Algoritmo de Kruskal

Reunião por Altura ou por Tamanho

Representante sem Efeitos Laterais

criação do heap	$\Theta(\|A\|)$
criação da partição	$\Theta(\|V\|)$
criação do vetor resultado	$\Theta(1)$
Ciclo (executado entre $\|V\|-1$ e $\|A\|$ vezes)	
1 remoção do mínimo	$O(\log\|A\|)$
2 representante	$O(\log\|V\|)$
Ciclo (executado $\|V\|-1$ vezes)	
1 inserção no vetor	$\Theta(1)$
1 reunião	$\Theta(1)$
TOTAL	$O(\|A\| \times \log\|V\|)$

Complexidade do Algoritmo de Kruskal

Reunião por Altura ou por Tamanho

Representante sem Efeitos Laterais

Complexidade do Primeiro Ciclo

$$O(\ \ |A| \times \log |A| \ + \ |A| \times (2\mathbf{R}) \ \ )$$

$$O(\ \ |A| \times \log |V| \ + \ |A| \times \log |V| \ \ )$$

$$O(\ \ |A| \times \log |V| \ \ )$$

Complexidade do Algoritmo de Kruskal

Reunião por Nível ou por Tamanho

Representante com Compressão do Caminho

criação do heap	$\Theta(\|A\|)$
criação da partição	$\Theta(\|V\|)$
criação do vetor resultado	$\Theta(1)$
Ciclo (executado entre $\|V\|-1$ e $\|A\|$ vezes)	
1 remoção do mínimo	$O(\log \|A\|)$
2 representante	$O(\log \|V\|)$
Ciclo (executado $\|V\|-1$ vezes)	
1 inserção no vetor	$\Theta(1)$
1 reunião	$\Theta(1)$
TOTAL	$O(\|A\| \times \log \|V\|)$

Complexidade do Algoritmo de Kruskal

Reunião por Nível ou por Tamanho

Representante com Compressão do Caminho

Complexidade do Primeiro Ciclo

$$O(\ |A| \times \log|A| \ + \ \underbrace{|A| \times (2\mathbf{R})}_{2|A| \geq 2(|V|-1) \geq |V|} \ )$$

$$O(\ |A| \times \log|V| \ + \ (2|A|)\ \underbrace{\alpha(2|A|, |V|)}_{\leq 4} \ )$$

$$O(\ |A| \times \log|V| \ + \ |A| \ )$$

$$O(\ |A| \times \log|V| \ )$$