Capítulo VI

Tipo Abstrato de Dados
Partição

(Union-Find, Disjoint Sets or Partition ADT)

TAD Partição (com n elementos)

Os elementos dos conjuntos são $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Cada conjunto é identificado por um dos seus elementos, denominado **o representante** do conjunto.

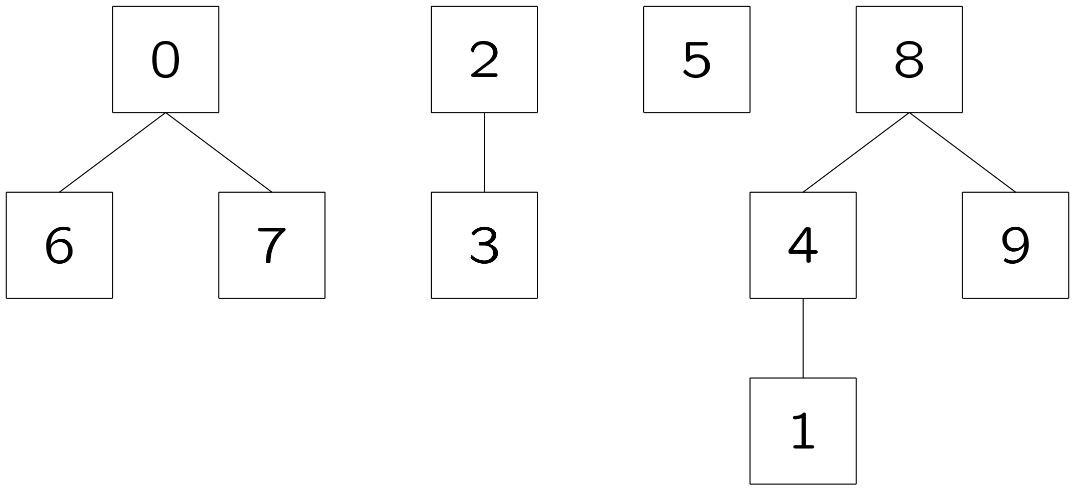
$$\text{Domínio} = \{0, 1, ..., n-1\}$$

// Cria a partição $\{\{0\}, \{1\}, \ldots, \{n-1\}\}$.
Partição **cria**(**int** n);

// Devolve o representante do conjunto ao qual e pertence.
Domínio **representante**(Domínio e);

// Substitui os conjuntos C_e e C_f, cujos representantes são e e f,
// respetivamente, pelo conjunto $C_e \cup C_f$.
// **Pré-condição:** $e \neq f$ (ou seja, $C_e \neq C_f$).
void **reunião**(Domínio e, Domínio f);

Implementação em Floresta



Complexidade (com n elementos)

criação $\Theta(?)$

reunião $\Theta(?)$

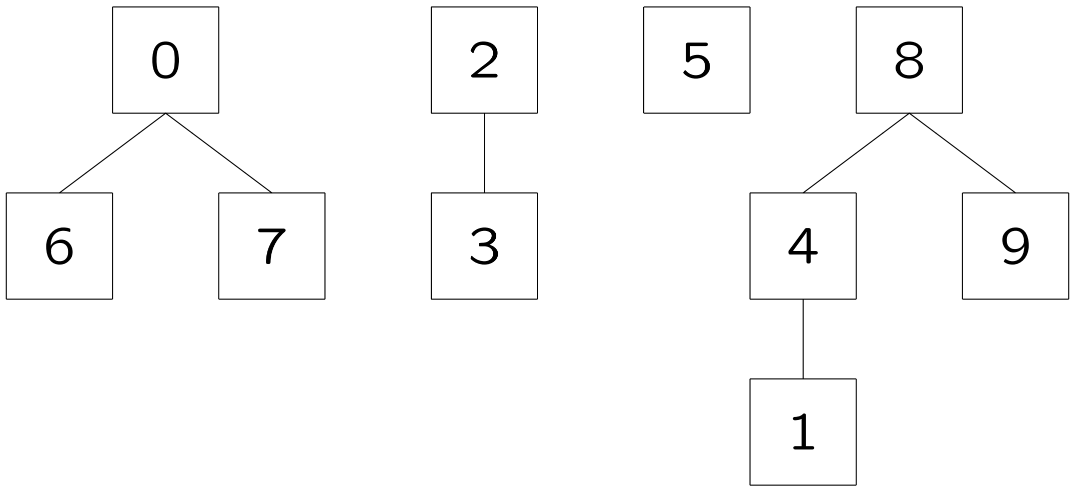
representante $O(?)$

(no pior caso)

Implementação em Floresta

(implementada em vetor)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-1	4	-1	2	8	-1	0	0	-1	8



Complexidade (com n elementos)

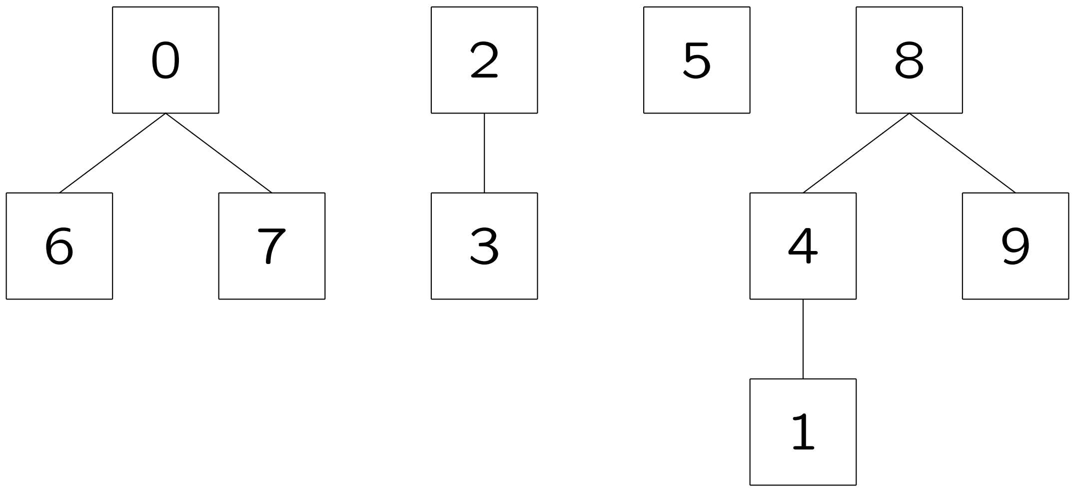
criação $\Theta(?)$ **representante** $O(?)$

reunião $\Theta(?)$ (no pior caso)

Implementação em Floresta

(implementada em vetor)

-1	4	-1	2	8	-1	0	0	-1	8
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9



Complexidade (com n elementos)

criação $\Theta(n)$ **representante** $O(n)$

reunião $\Theta(1)$ (no pior caso)

Complexidade do Algoritmo de Kruskal

Reunião sem Estratégia

Representante sem Efeitos Laterais

criação do heap	$\Theta(\lvert A\rvert)$
criação da partição	$\Theta(\lvert V\rvert)$
criação do vetor resultado	$\Theta(1)$
Ciclo (executado entre $\lvert V\rvert - 1$ e $\lvert A\rvert$ vezes)	
1 remoção do mínimo	$O(\log \lvert A\rvert)$
2 representante	$O(\lvert V\rvert)$
Ciclo (executado $\lvert V\rvert - 1$ vezes)	
1 inserção no vetor	$\Theta(1)$
1 reunião	$\Theta(1)$
TOTAL	$O(\lvert A\rvert \times \lvert V\rvert)$

Complexidade do Algoritmo de Kruskal

Reunião sem Estratégia

Representante sem Efeitos Laterais

Complexidade do Primeiro Ciclo

$$O(\quad |A| \times \log |A| \quad + \quad |A| \times (2\mathbf{R}) \quad)$$

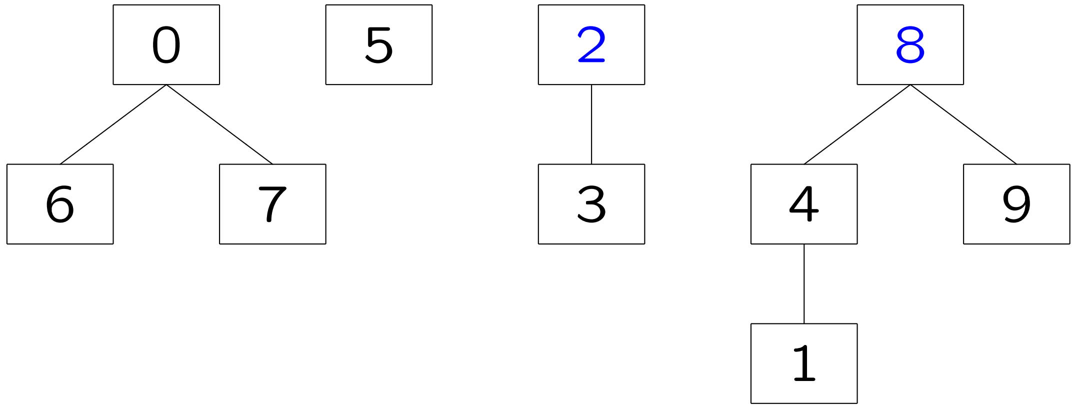
$$O(\quad |A| \times \underbrace{\log |A|}_{\log |A| < 2 \log |V| \text{ porque } |A| < |V|^2} \quad + \quad |A| \times |V| \quad)$$

$$O(\quad |A| \times \log |V| \quad + \quad |A| \times |V| \quad)$$

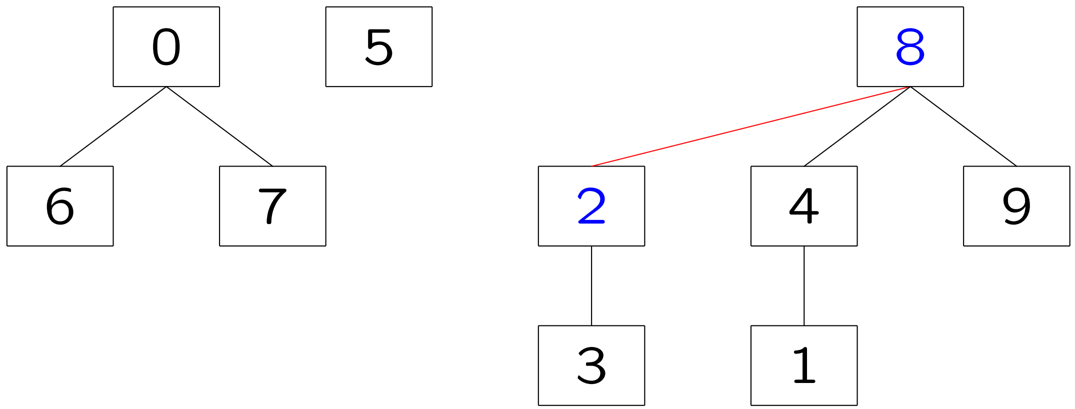
$$O(\quad |A| \times |V| \quad)$$

Reunião por Altura $(2, 8)$

-2	4	-2	2	8	-1	0	0	-3	8
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9



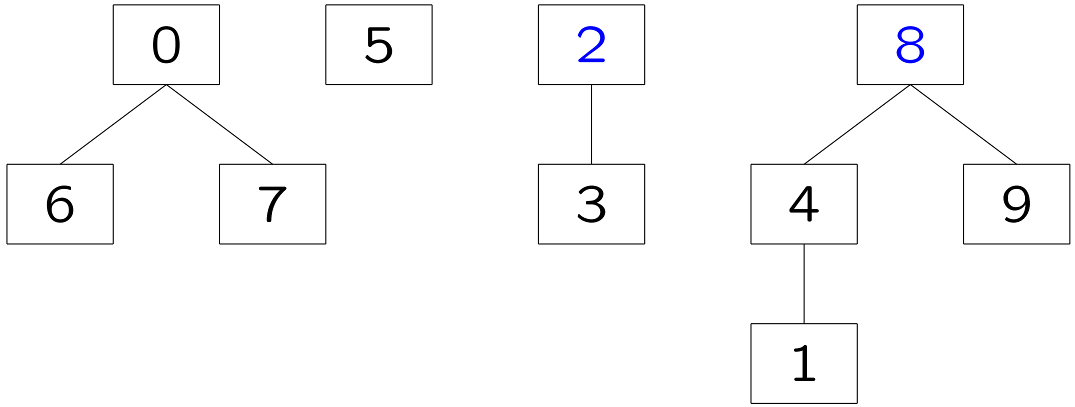
-2	4	8	2	8	-1	0	0	-3	8
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9



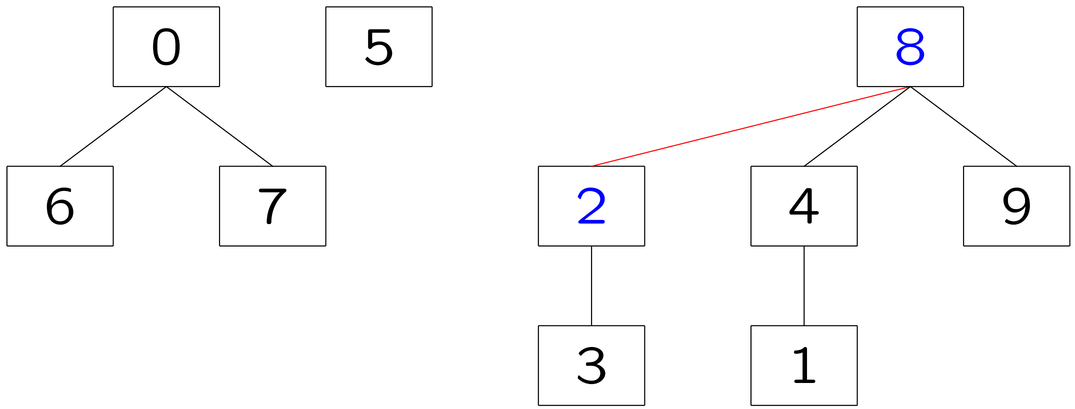
Reunião por Tamanho

$(2, 8)$

−3	4	−2	2	8	−1	0	0	−4	8
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9



−3	4	8	2	8	−1	0	0	−6	8
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9



Interface Partição (com n elementos)

```
public interface UnionFind
{
   // Creates the partition {{0},{1},...,{domainSize − 1}}.
   // UnionFind( int domainSize );

   // Returns the representative of the set that contains
   // the specified element.
   int find( int element ) throws InvalidElementException;

   // Removes the two distinct sets S1 and S2 whose representatives
   // are the specified elements, and inserts the set S1 ∪ S2.
   // The representative of the new set S1 ∪ S2 can be any of
   // its members.
   void union( int representative1, int representative2 ) throws
      InvalidElementException, NotRepresentativeException,
      EqualSetsException;
}
```

Classe Partição em Vetor

```
public class UnionFindInArray implements UnionFind
{
    // The partition is a forest implemented in an array.
    protected int[] partition;

    // Definition of the range of valid elements.
    protected String validRangeMsg;
```

Criar a Partição

```
// Creates the partition {{0},{1},...,{domainSize − 1}}.
public UnionFindInArray( int domainSize )
{
    partition = new int[domainSize];
    for ( int i = 0;   i < domainSize;   i++ )
        partition[i] = −1;

    int lastElement = domainSize − 1;
    validRangeMsg =
        "Range of valid elements: 0, 1, ..., " + lastElement;
}
```

Métodos de Validação

```
protected boolean isInTheDomain( int number )
{
    return ( number >= 0 ) && ( number < partition.length );
}


// Pre-condition: 0 <= element < partition.length.
protected boolean isRepresentative( int element )
{
    return partition[element] < 0;
}
```

Representante — Recursivo

```
public int find( int element ) throws InvalidElementException
{
    if ( !this.isInTheDomain(element) )
        throw new InvalidElementException(validRangeMsg);

    return this.findRec(element);
}

// Pre-condition: 0 <= element < partition.length.
protected int findRec( int element )
{
    if ( partition[element] < 0 )
        return element;

    return this.findRec( partition[element] );
}
```

Representante — Iterativo

```
public int find( int element ) throws InvalidElementException
{
    if ( !this.isInTheDomain(element) )
        throw new InvalidElementException(validRangeMsg);

    int node = element;
    while ( partition[node] >= 0 )
        node = partition[node];
    return node;
}
```

Reunião por Tamanho (*Union by Size*)

```
public void union( int rep1, int rep2 ) throws
    InvalidElementException, NotRepresentativeException,
    EqualSetsException
{
    if ( !this.isInTheDomain(rep1) || !this.isInTheDomain(rep2) )
        throw new InvalidElementException(validRangeMsg);
    if ( !this.isRepresentative(rep1) )
        throw new NotRepresentativeException("First argument");
    if ( !this.isRepresentative(rep2) )
        throw new NotRepresentativeException("Second argument");
    if ( rep1 == rep2 )
        throw new EqualSetsException("The two arguments are equal");
```

Reunião por Tamanho

```
    if ( partition[rep1] <= partition[rep2] )
    {
        // Size(S1) >= Size(S2).
        partition[rep1] += partition[rep2];
        partition[rep2] = rep1;
    }
    else
    {
        // Size(S1) < Size(S2).
        partition[rep2] += partition[rep1];
        partition[rep1] = rep2;
    }
}
```

Reunião por Altura (*Union by Height*)

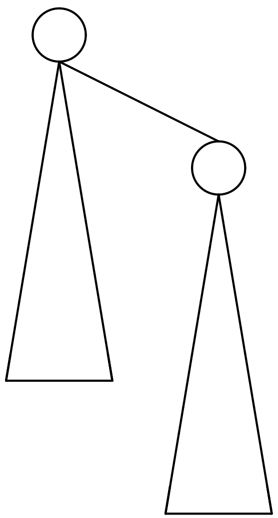
```
public void union( int rep1, int rep2 ) throws
    InvalidElementException, NotRepresentativeException,
    EqualSetsException
{
    if ( !this.isInTheDomain(rep1) || !this.isInTheDomain(rep2) )
        throw new InvalidElementException(validRangeMsg);
    if ( !this.isRepresentative(rep1) )
        throw new NotRepresentativeException("First argument");
    if ( !this.isRepresentative(rep2) )
        throw new NotRepresentativeException("Second argument");
    if ( rep1 == rep2 )
        throw new EqualSetsException("The two arguments are equal");
```

Reunião por Altura

```
if ( partition[rep1] <= partition[rep2] )
{
    // Height(S1) >= Height(S2).
    if ( partition[rep1] == partition[rep2] )
        partition[rep1]--;
    partition[rep2] = rep1;
}
else
    // Height(S1) < Height(S2).
    partition[rep1] = rep2;
}
```

Complexidade do Representante com Reunião por **Altura**

Número Mínimo de Nós de uma Árvore com Altura h



$N(1) = 1$

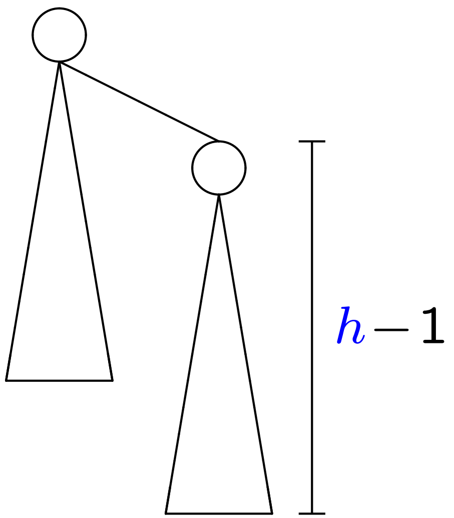
$N(2) = 2$

$N(h) =$

(para $h \geq 2$)

Complexidade do Representante com Reunião por **Altura**

Número Mínimo de Nós de uma Árvore com Altura h



$N(1) = 1$

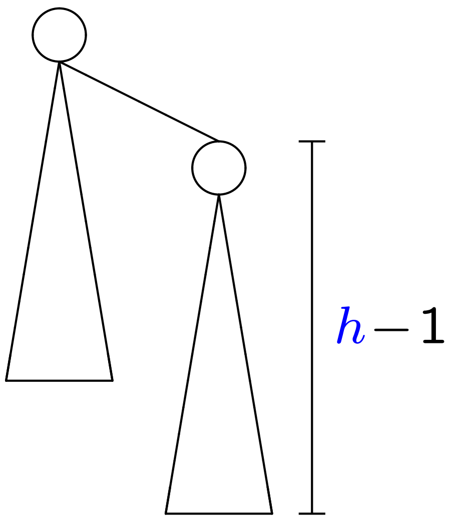
$N(2) = 2$

$N(h) =$

(para $h \geq 2$)

Complexidade do Representante com Reunião por **Altura**

Número Mínimo de Nós de uma Árvore com Altura h



$$N(1) = 1$$

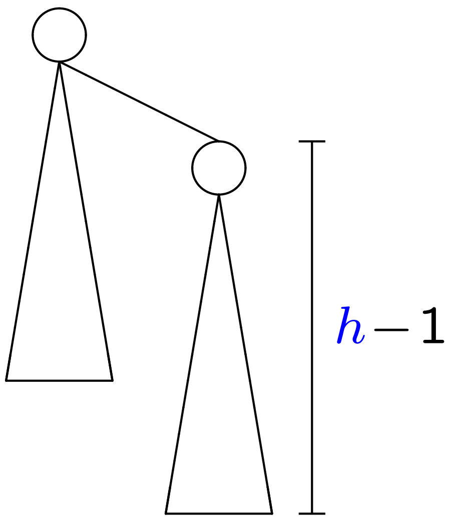
$$N(2) = 2$$

$$N(h) = 2 \times N(h-1)$$

$$(\text{para } h \geq 2)$$

Complexidade do Representante com Reunião por **Altura**

Número Mínimo de Nós de uma Árvore com Altura h



$$N(1) = 1 \qquad = 2^0$$

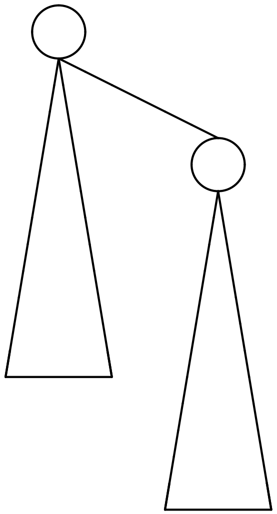
$$N(2) = 2 \qquad = 2^1$$

$$N(h) = 2 \times N(h-1) \overset{H.I.}{=} 2 \times 2^{h-2} = 2^{h-1}$$

(para $h \geq 2$)

Complexidade do Representante com Reunião por **Tamanho**

Número Mínimo de Nós de uma Árvore com Altura h



$$N(1) = 1$$

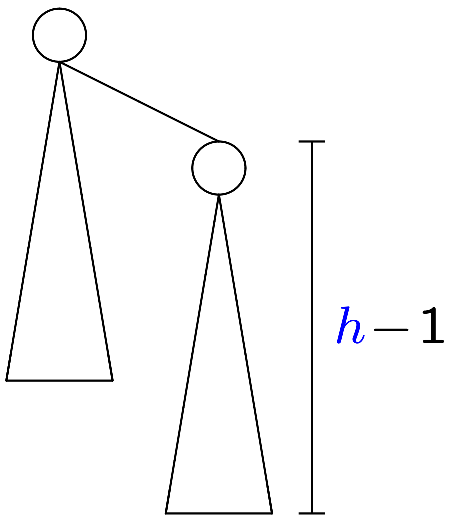
$$N(2) = 2$$

$$N(h) =$$

(para $h \geq 2$)

Complexidade do Representante com Reunião por **Tamanho**

Número Mínimo de Nós de uma Árvore com Altura h



$N(1) = 1$

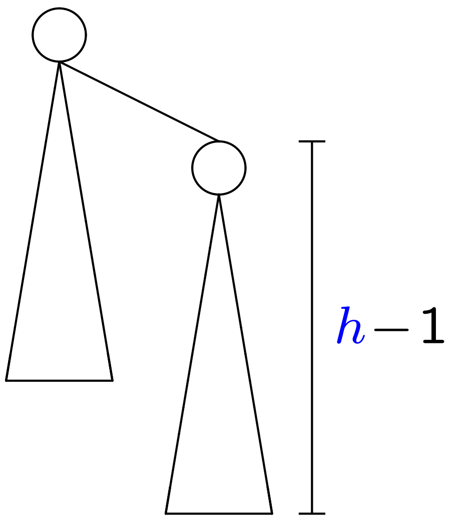
$N(2) = 2$

$N(h) =$

(para $h \geq 2$)

Complexidade do Representante com Reunião por **Tamanho**

Número Mínimo de Nós de uma Árvore com Altura h



$$N(1) = 1$$

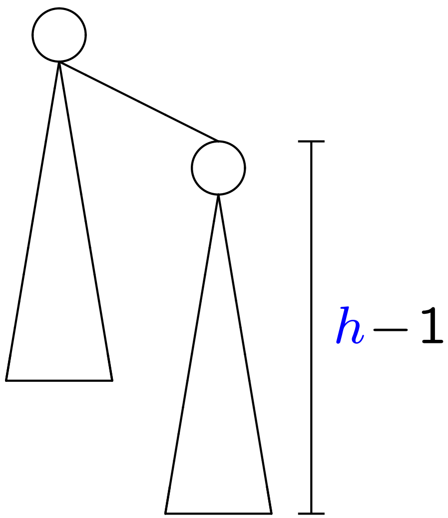
$$N(2) = 2$$

$$N(h) = 2 \times N(h-1)$$

(para $h \geq 2$)

Complexidade do Representante com Reunião por **Tamanho**

Número Mínimo de Nós de uma Árvore com Altura h



$$
\begin{aligned}
N(1) &= 1 && = 2^0 \\
N(2) &= 2 && = 2^1 \\
N(h) &= 2 \times N(h-1) && \stackrel{H.I.}{=} 2 \times 2^{h-2} = 2^{h-1}
\end{aligned}
$$

(para $h \geq 2$)

Complexidade do Representante com Reunião por **Altura** ou por **Tamanho**

Altura Máxima de uma Árvore com n nós

Dado n (o número total de nós), existe h tal que:

$$\underbrace{2^{h-1}}_{\substack{h \text{ é a maior altura} \\ \text{com } n \text{ nós}}} \quad \leq \quad n \quad < \quad \underbrace{2^{h}}_{\substack{\text{número mínimo de nós} \\ \text{para altura } h+1}}$$

$$2^{h-1} \;\leq\; n$$

$$h-1 \;\leq\; \log(n)$$

$$\boxed{h \;\leq\; 1+\log(n)}$$

Complexidade do Algoritmo de Kruskal

Reunião por Altura ou por Tamanho

Representante sem Efeitos Laterais

criação do heap	$\Theta(\|A\|)$
criação da partição	$\Theta(\|V\|)$
criação do vetor resultado	$\Theta(1)$
Ciclo (executado entre $\|V\|-1$ e $\|A\|$ vezes)	
1 remoção do mínimo	$O(\log \|A\|)$
2 representante	$O(\log \|V\|)$
Ciclo (executado $\|V\|-1$ vezes)	
1 inserção no vetor	$\Theta(1)$
1 reunião	$\Theta(1)$
TOTAL	$O(\|A\| \times \log \|V\|)$

Complexidade do Algoritmo de Kruskal

Reunião por Altura ou por Tamanho

Representante sem Efeitos Laterais

Complexidade do Primeiro Ciclo

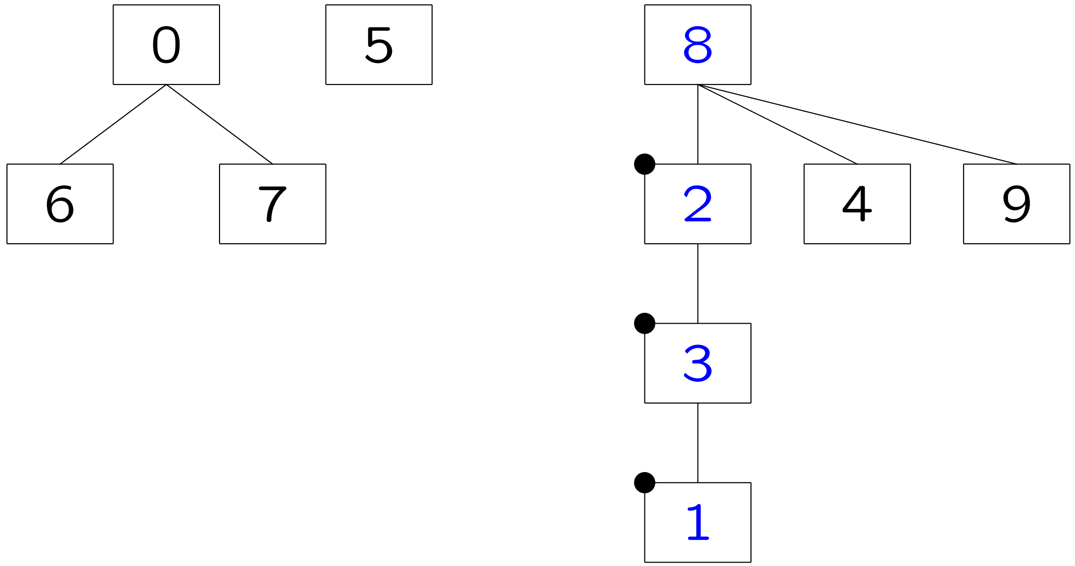
$$O(\quad |A| \times \log |A| \quad + \quad |A| \times (2\mathbf{R}) \quad)$$

$$O(\quad |A| \times \log |V| \quad + \quad |A| \times \log |V| \quad)$$

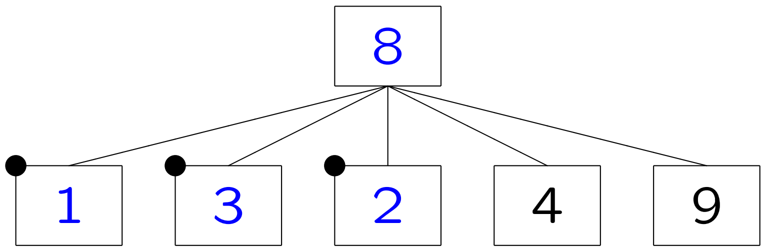
$$O(\quad |A| \times \log |V| \quad)$$

Compressão do Caminho find(1)

−3	3	8	2	8	−1	0	0	−6	8
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9



−3	8	8	8	8	−1	0	0	−6	8
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9



Representante com Compressão do Caminho

```
public int find( int element ) throws InvalidElementException
{
   if ( !this.isInTheDomain(element) )
      throw new InvalidElementException(validRangeMsg);

   return this.findPathCompr(element);
}

protected int findPathCompr( int element )
{
   if ( partition[element] < 0 )
      return element;

   partition[element] = this.findPathCompr( partition[element] );
   return partition[element];
}
```

Complexidade no PIOR CASO de U operações de **reunião** e R operações de **representante** (com n elementos)

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Reunião sem Estratégia} & \Theta(1) \\ \text{Representante sem Efeitos Laterais} & O(n)\end{array}\right\} O(U + R\, n)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Reunião por Altura ou Tamanho} & \Theta(1) \\ \text{Representante sem Efeitos Laterais} & O(\log n)\end{array}\right\} O(U + R \log n)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Reunião por \textbf{Nível} (código Altura) ou Tamanho} & \Theta(1) \\ \text{Representante com Compressão do Caminho} & O(\log n)\end{array}\right\} O(k\, \alpha(k,n))$$

se $k = U + R \geq n$ [Tarjan 75].

Valor de $\alpha(k,n)$ $\quad (k \geq n \geq 1)$

2^2		4
2^{2^2}	2^4	16
$2^{2^{2^2}}$	2^{16}	65536
$\left.2^{2^{2^{2}}}\right\}4$	2^{65536}	$\approx 20\,000$ algarismos

Na prática,

$$\boxed{\alpha(k,n) \leq 4}$$

porque

$$\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\}16 \quad > \quad \log n.$$

Complexidade do Algoritmo de Kruskal

Reunião por Nível ou por Tamanho

Representante com Compressão do Caminho

criação do heap	$\Theta(\|A\|)$
criação da partição	$\Theta(\|V\|)$
criação do vetor resultado	$\Theta(1)$
Ciclo (executado entre $\|V\| - 1$ e $\|A\|$ vezes)	
1 remoção do mínimo	$O(\log \|A\|)$
2 representante	$O(\log \|V\|)$
Ciclo (executado $\|V\| - 1$ vezes)	
1 inserção no vetor	$\Theta(1)$
1 reunião	$\Theta(1)$
TOTAL	$O(\|A\| \times \log \|V\|)$

Complexidade do Algoritmo de Kruskal

Reunião por Nível ou por Tamanho

Representante com Compressão do Caminho

Complexidade do Primeiro Ciclo

$$O\left(\; |A| \times \log |A| \; + \; \underbrace{|A| \times (2\mathbf{R})}_{2|A| \geq 2(|V|-1) \geq |V|} \; \right)$$

$$O\left(\; |A| \times \log |V| \; + \; (2|A|)\, \underbrace{\alpha(2|A|, |V|)}_{\leq 4} \; \right)$$

$$O\left(\; |A| \times \log |V| \; + \; |A| \; \right)$$

$$O\left(\; |A| \times \log |V| \; \right)$$