Capítulo VIII

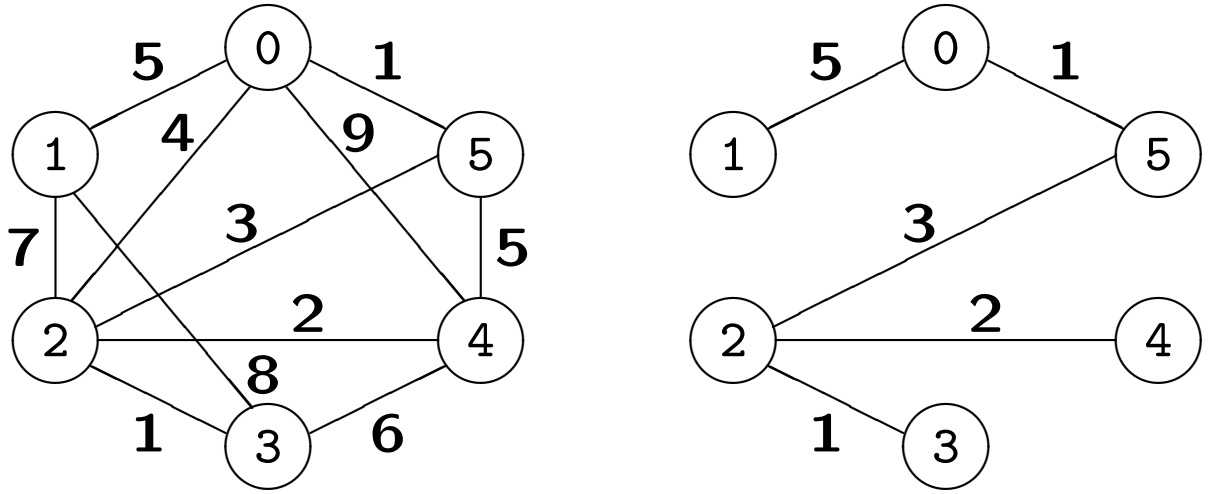
Árvore Mínima de Cobertura (num grafo não orientado)

—

Algoritmo de Prim

Problema

Como ligar um dado equipamento, minimizando a soma dos comprimentos das ligações?

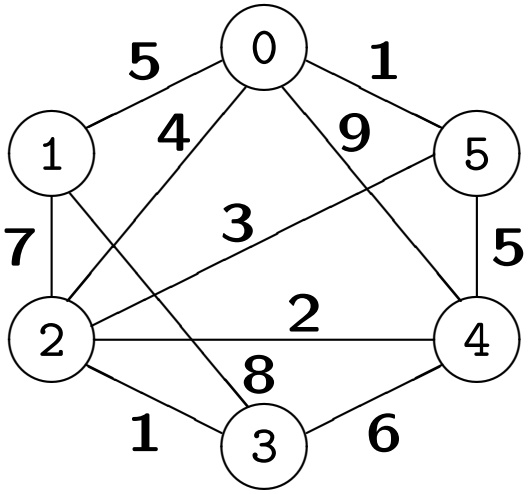


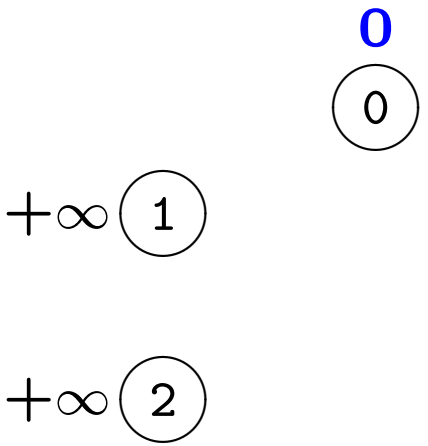
Árvore de Cobertura (sub-grafo acíclico e conexo com todos os vértices) de custo Mínimo (nenhuma árvore de cobertura tem custo menor).

Dado um grafo **não orientado e conexo**, como encontrar uma

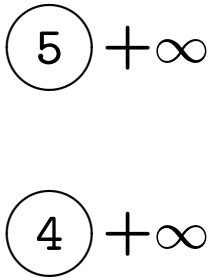
Árvore Mínima de Cobertura?

Algoritmo de Prim [1957]

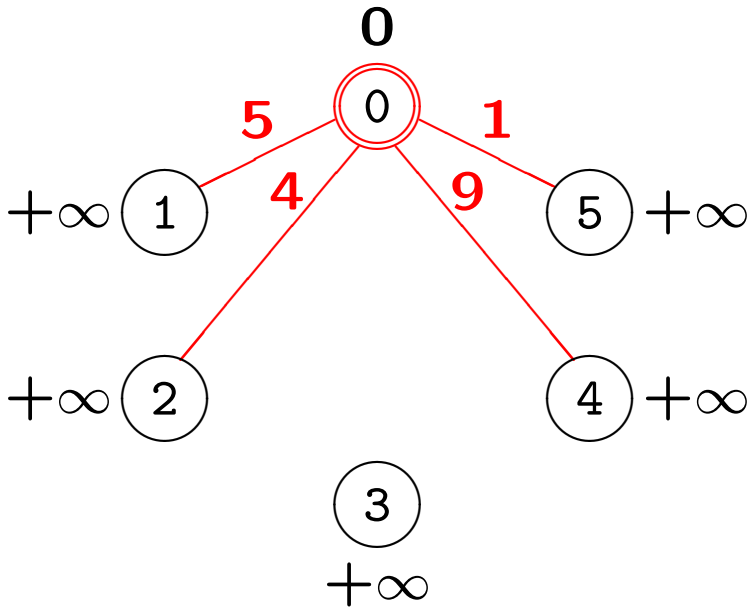


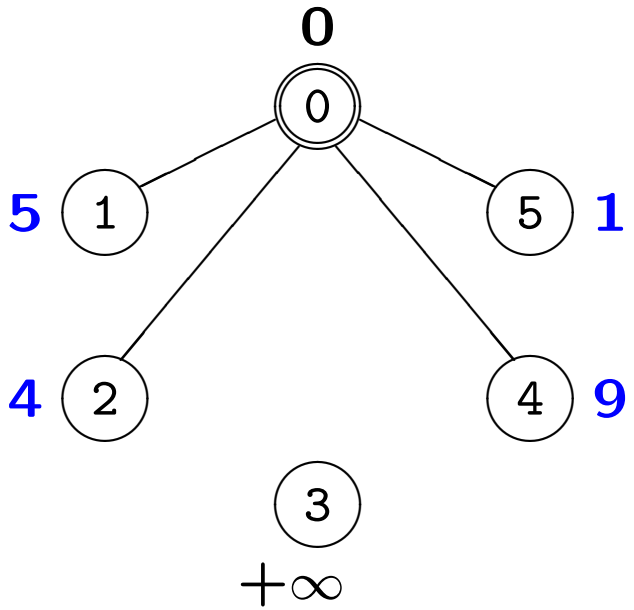


Inicialização

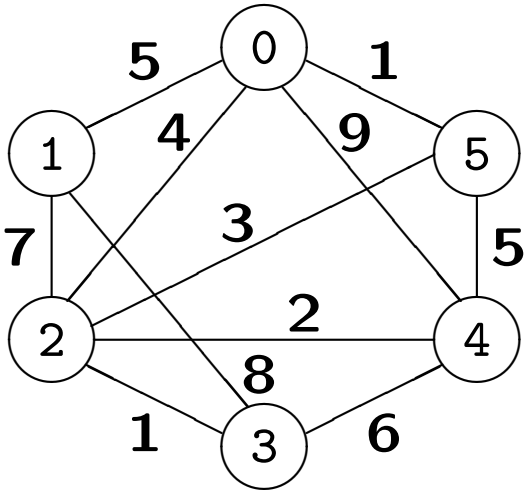


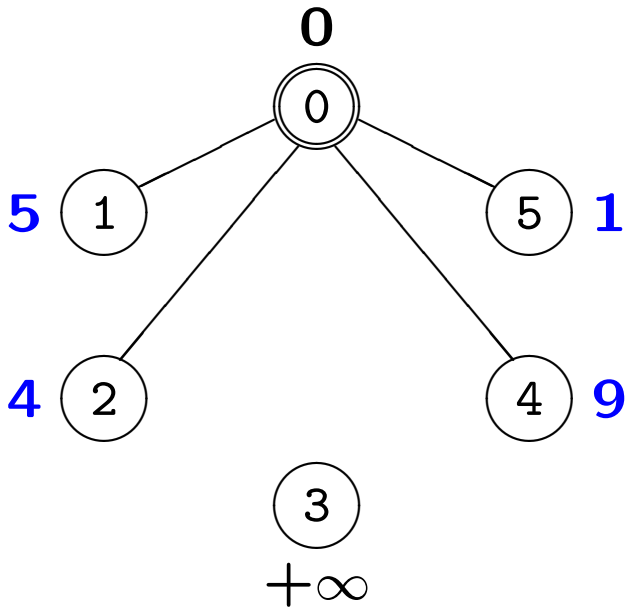
Seleção de 0





Algoritmo de Prim (2)

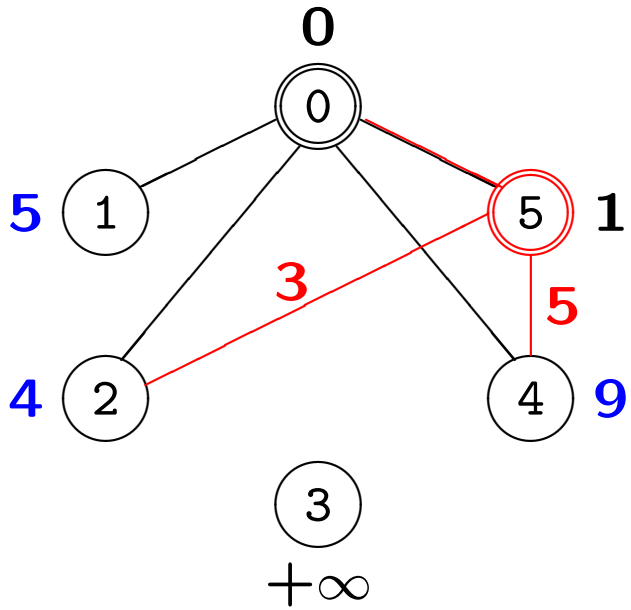


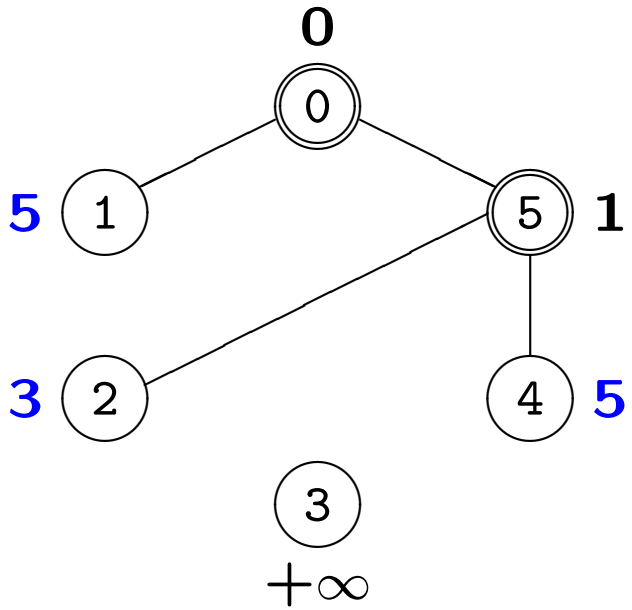


Situação

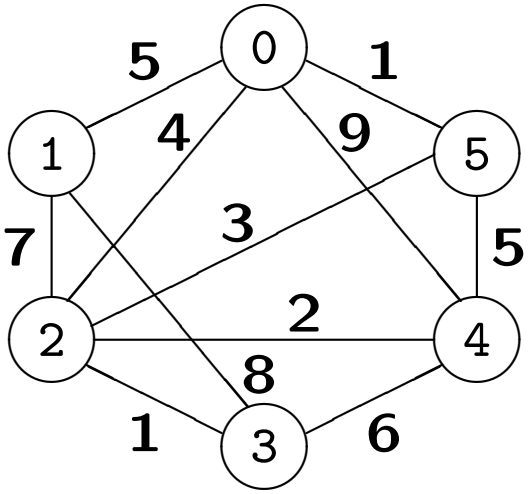
Corrente

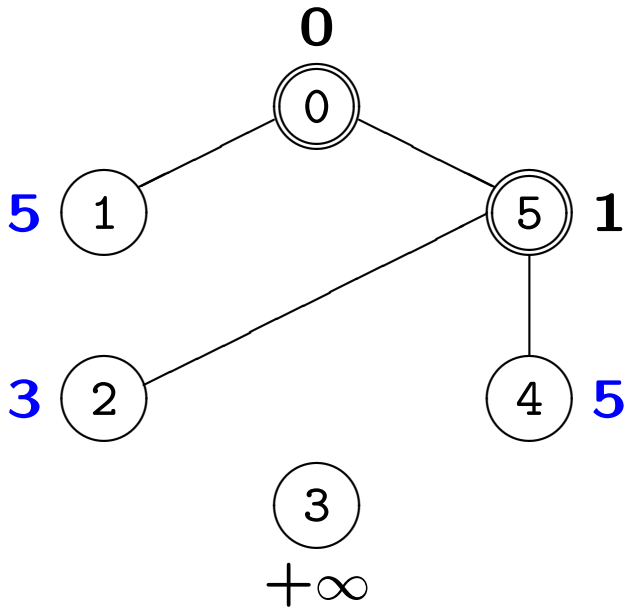
Seleção de 5





Algoritmo de Prim (3)



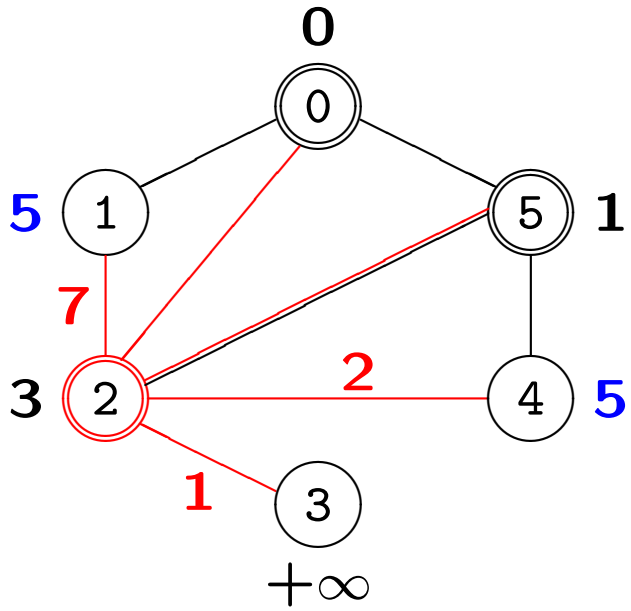


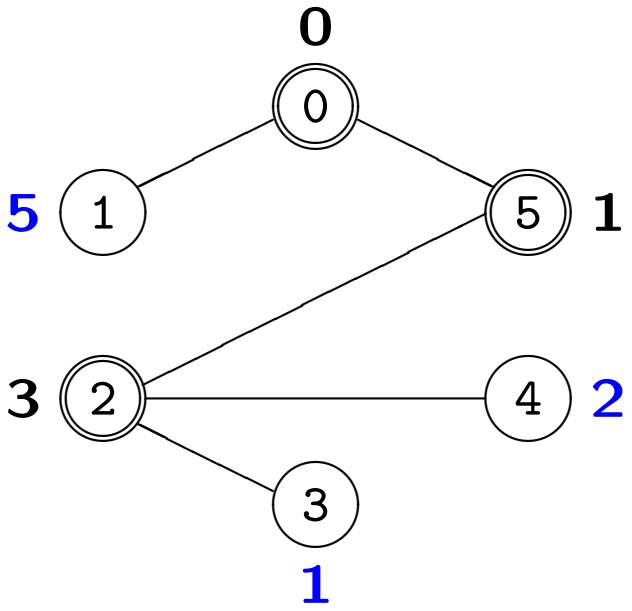
Situação

Corrente

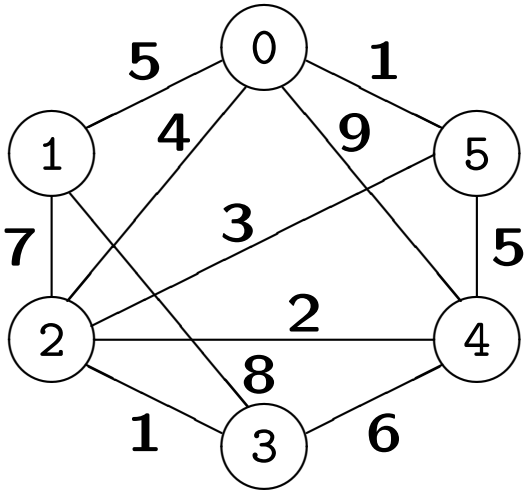
Seleção

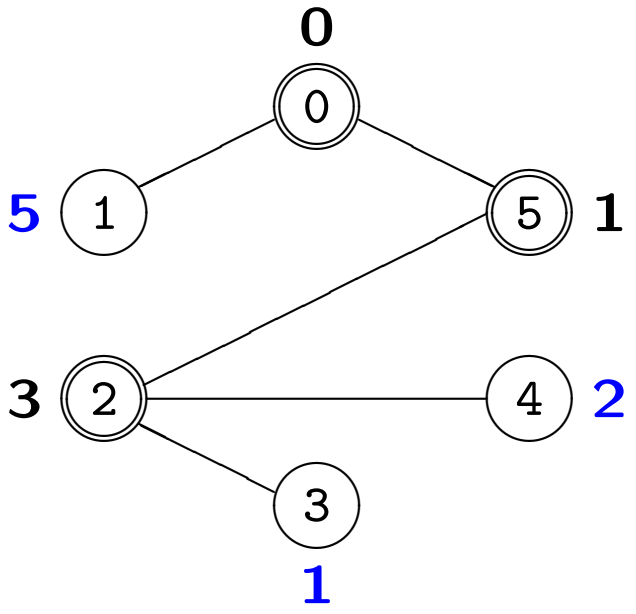
de 2





Algoritmo de Prim (4)



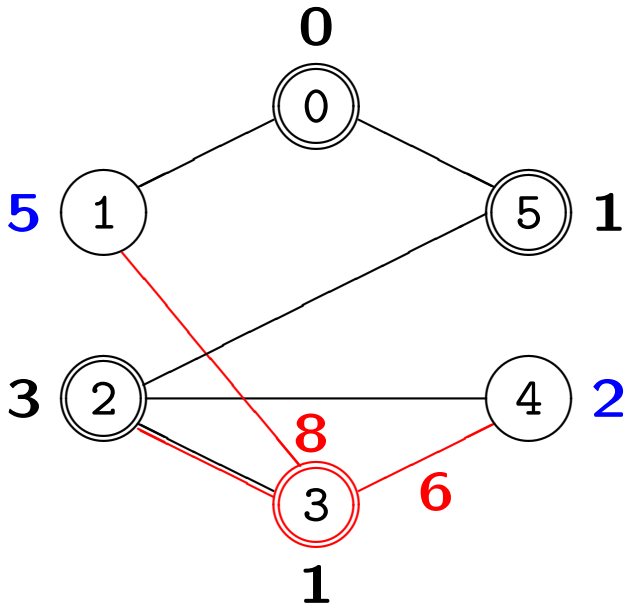


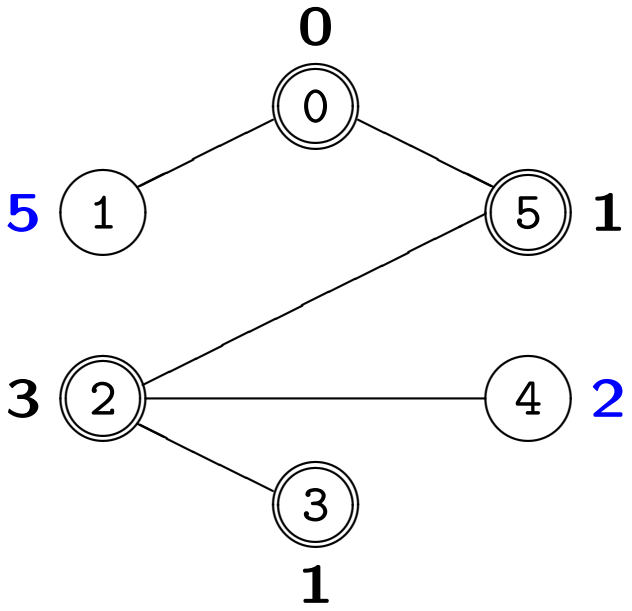
Situação

Corrente

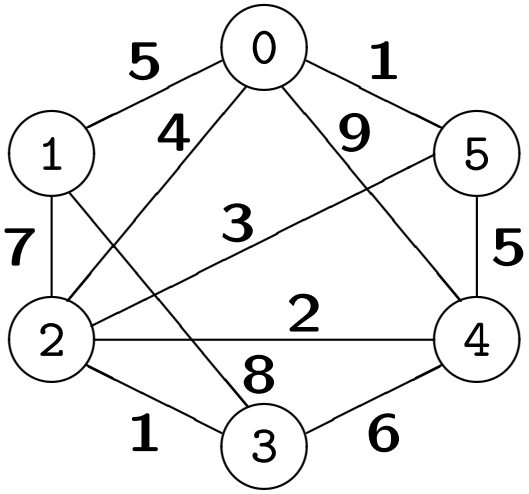
Seleção

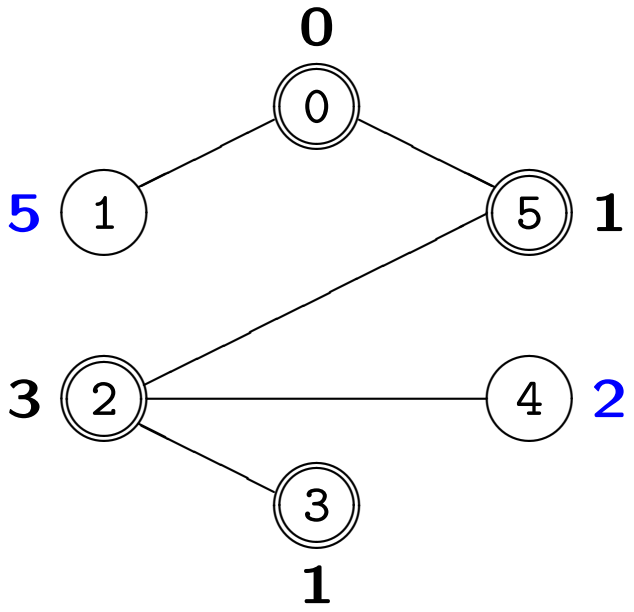
de 3





Algoritmo de Prim (5)



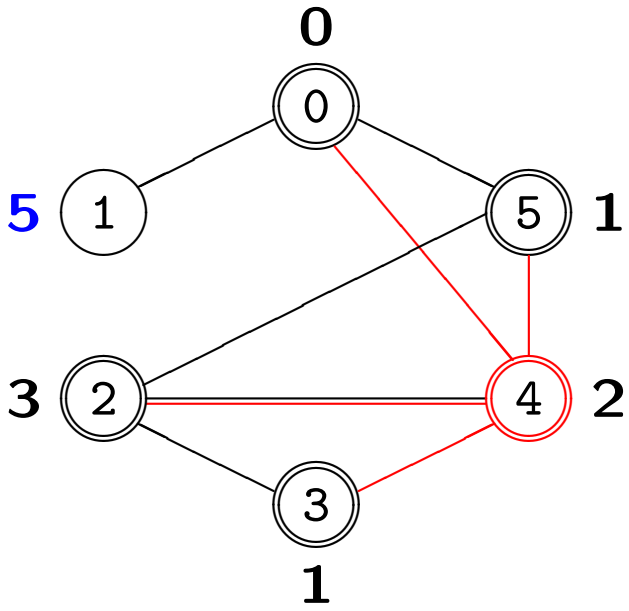


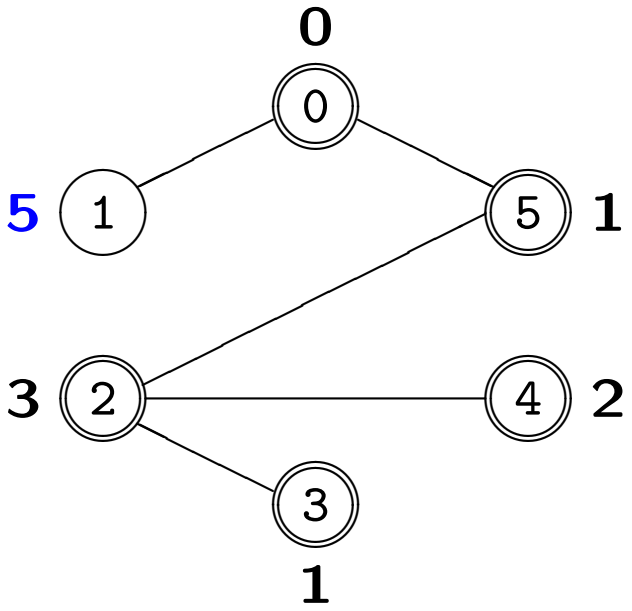
Situação

Corrente

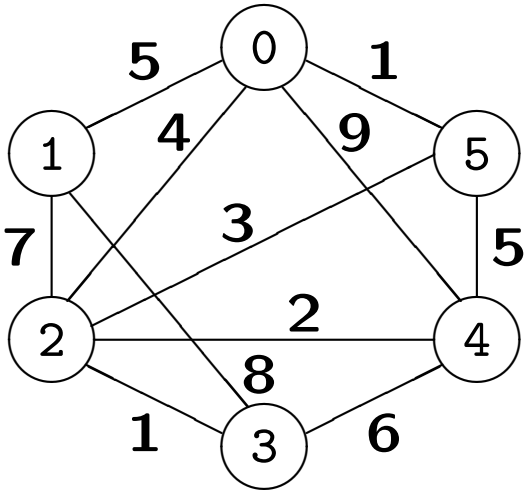
Seleção

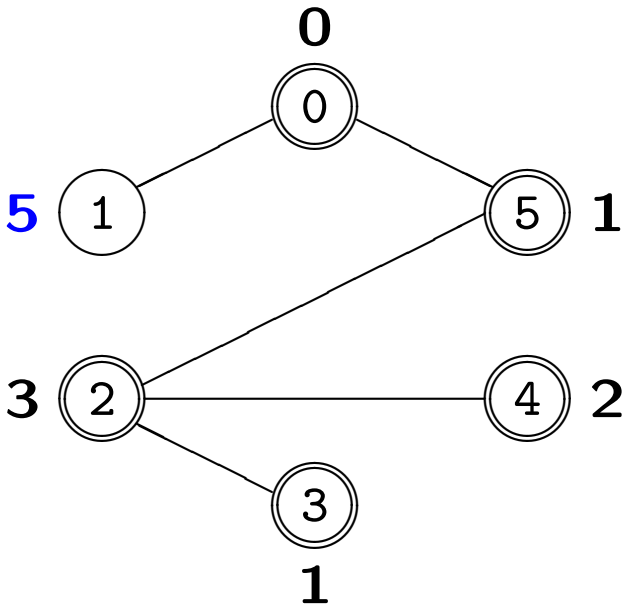
de 4





Algoritmo de Prim (6)

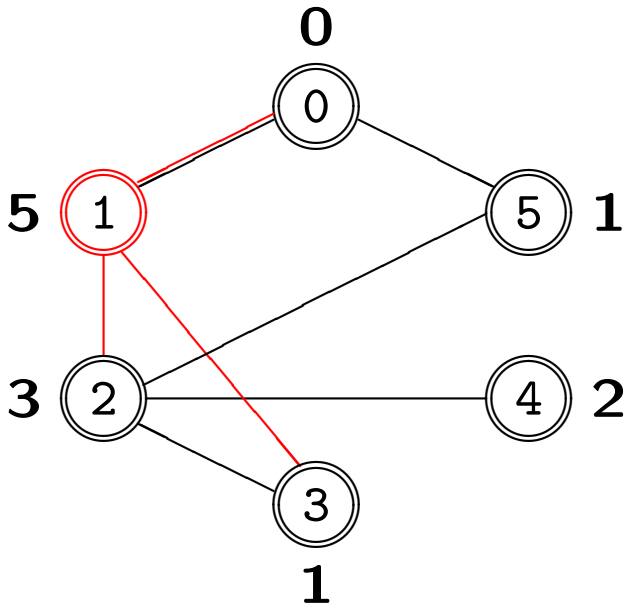


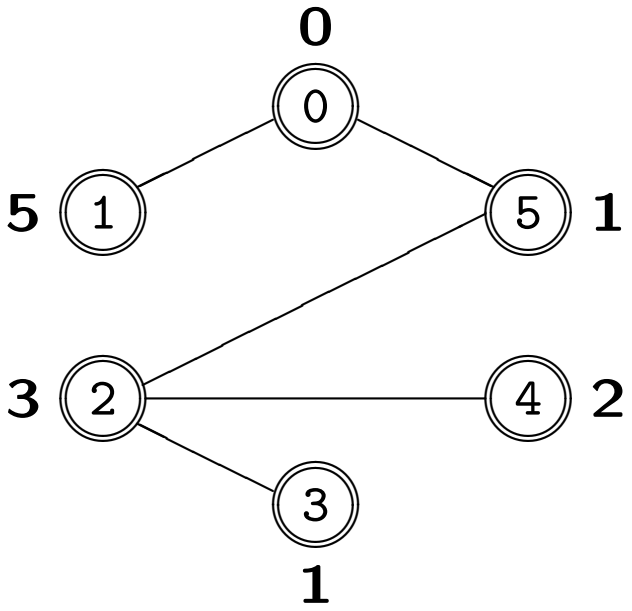


Situação

Corrente

Seleção de 1





Ideia Geral

Construir a árvore,

partindo de um vértice origem qualquer o

e selecionando, em cada passo, um novo vértice

(e um novo arco exceto quando o vértice selecionado é o).

Informação Necessária

Global: ligados

Conjunto dos vértices nunca selecionados para os quais já há caminho a partir de o.

Por cada vértice x:

- **boolean** selecionado[x]

  Indica se x já foi selecionado, i.e., se já "faz parte da árvore final".

- $\mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$ custo[x]

  - **ou** é $+\infty$, quando ainda não há caminho de o para x;
  - **ou** é o peso do arco via[x], no caso contrário.

- Edge via[x]

  Se estiver definido, via[x] é um arco de peso mínimo (até ao momento) que liga x à árvore.

Situação Inicial

Global: ligados $= \{o\}$.

Informação para o vértice o**:**

- selecionado[o] = **false**;
- custo[o] $= 0$;
- via[o] não está definido.

Informação para todos os vértices $x \in V \setminus \{o\}$**:**

- selecionado[x] = **false**;
- custo[x] $= +\infty$;
- via[x] não está definido.

Em Cada Iteração

Seleciona-se um vértice x de **ligados** tal que custo[x] é mínimo.

Árvore Mínima de Cobertura (1)

(Minimum Spanning Tree)

```
Edge<L>[] mstPrim( UndiGraph<L> graph )
{
    Edge<L>[] mst = new Edge<L>[ graph.numNodes() - 1 ];

    int mstSize = 0;

    boolean[] selected = new boolean[ graph.numNodes() ];

    L[] cost = new L[ graph.numNodes() ];

    Edge<L>[] via = new Edge<L>[ graph.numNodes() ];

    AdaptMinPriQueue<L, Node> connected =
        new AdaptMinHeap<L, Node>( graph.numNodes() );
```

Árvore Mínima de Cobertura (2)

```
for every Node v in graph.nodes()
{
    selected[v] = false;
    cost[v] = +∞;
}
Node origin = graph.aNode();
cost[origin] = 0;
connected.insert(0, origin);
```

Árvore Mínima de Cobertura (3)

```
    do {
            Node node = connected.removeMin().getValue();
            selected[node] = true;
            if ( node != origin )
                mst[ mstSize++ ] = via[node];
            exploreNode(graph, node, selected, cost, via, connected);
        }
    while ( !connected.isEmpty() );

    return mst;
}
```

```
void exploreNode( UndiGraph<L> graph,   Node source,
    boolean[] selected,   L[] cost,   Edge<L>[] via,
    AdaptMinPriQueue<L, Node> connected )
{
    for every Edge<L> e in graph.incidentEdges(source)
    {
        Node node = e.oppositeNode(source);
        if ( !selected[node]   &&   e.label() < cost[node] )
        {
            boolean nodeIsInQueue = cost[node] < +∞;
            cost[node] = e.label();
            via[node] = e;
            if ( nodeIsInQueue )
                connected.decreaseKey(node, cost[node]);
            else
                connected.insert(cost[node], node);
        }
    }
}
```

Complexidade do Algoritmo de Prim

Grafo em vetor de listas de "incidências"

Identificação das Operações

criação de 4 vetores	$\Theta(1)$
criação da fila com prioridade	?
inicialização de 2 vetores (selected e cost)	$\Theta(\|V\|)$
inserção da origem na fila	?
$\|V\|$ remoção do mínimo da fila	?
$\|V\| - 1$ inserção no vetor resultado	$\Theta(\|V\|)$
$\|V\|$ obtenção dos arcos incidentes	$\Theta(\|A\|)$
$\leq \|A\|$ inserção ou decremento da chave na fila	?

TAD Fila com Prioridade por Mínimos (K,V)

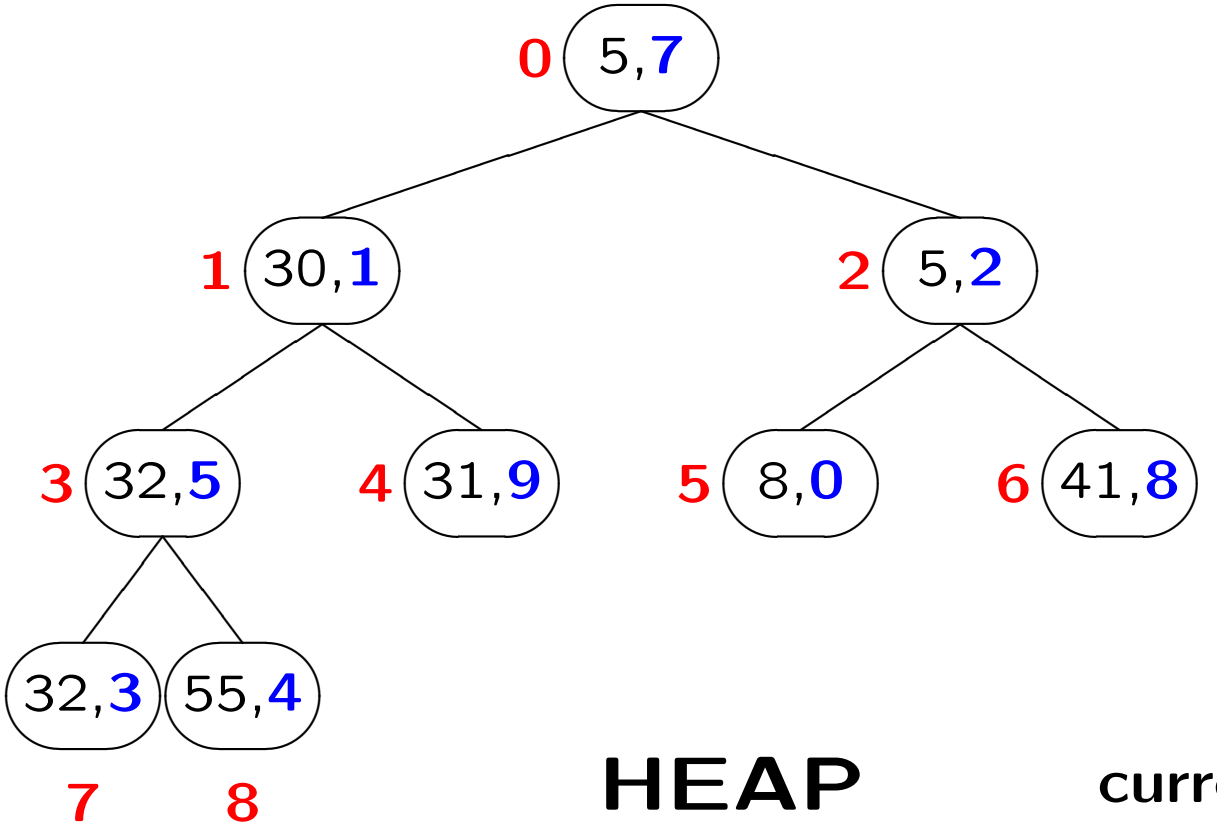
```
public interface MinPriorityQueue<
        K extends Comparable<? super K>, V>
    extends Serializable
{
    // Returns true iff the priority queue contains no entries.
    boolean isEmpty( );

    // Returns the number of entries in the priority queue.
    int size( );

    // Returns an entry with the smallest key in the priority queue.
    Entry<K,V> minEntry( ) throws EmptyQueueException;

    // Inserts the entry (key, value) in the priority queue.
    void insert( K key, V value );

    // Removes an entry with the smallest key from the priority queue
    // and returns that entry.
    Entry<K,V> removeMin( ) throws EmptyQueueException;
}
```

TAD Fila com Prioridade Adaptável por Mínimos (K,V)

```
public interface AdaptMinPriQueue<
        K extends Comparable<? super K>, V>
    extends MinPriorityQueue<K,V>
{
    // If the priority queue contains an entry with the specified value,
    // returns the associated key and replaces it by the specified key
    // (which is less than the old one). Otherwise, returns null.
    K decreaseKey( V value, K newKey ) throws InvalidKeyException;
}
```

Nota: Por questões de eficiência, é usual exigir-se que os valores sejam todos distintos. Nesses casos, o método **insert** levanta uma exceção quando se tenta inserir uma entrada cujo valor já existe na fila.

Implementação com Heap (K,**V**)

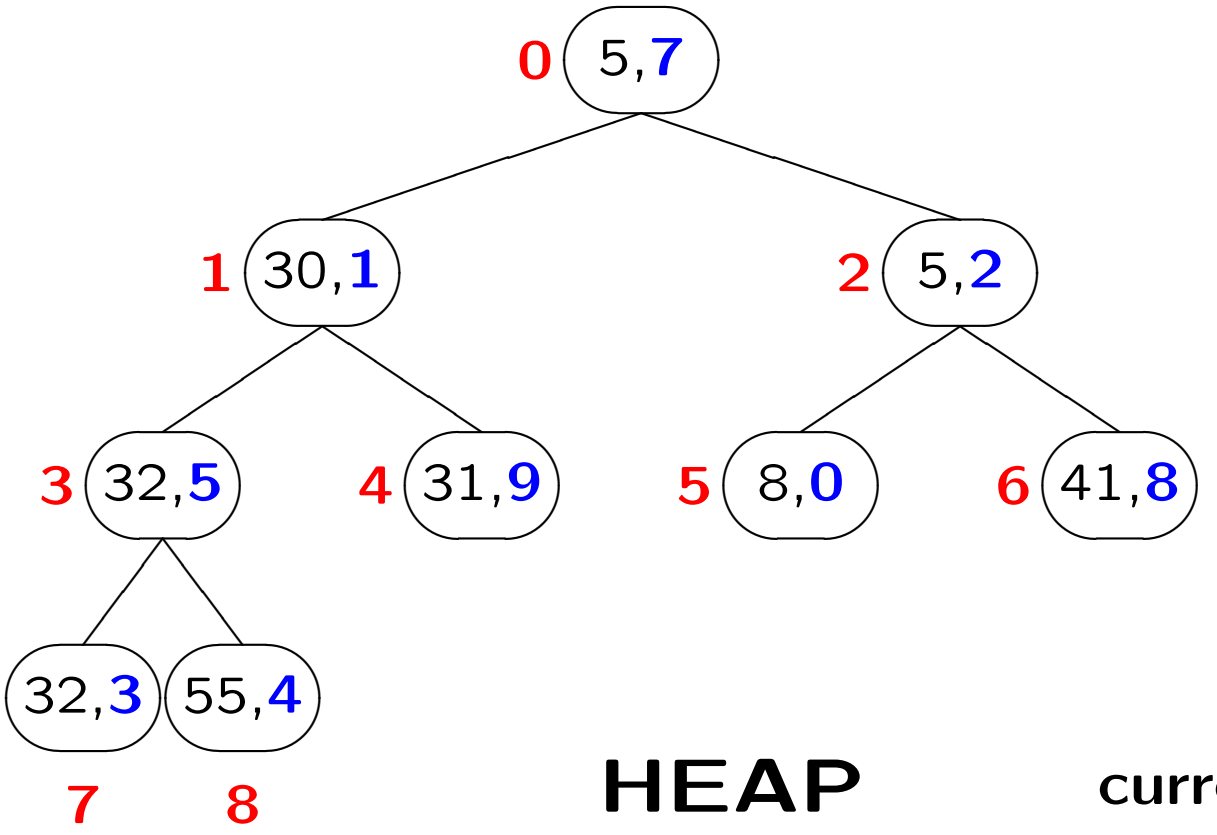


HEAP

currentSize 9

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,7	30,1	5,2	32,5	31,9	8,0	41,8	32,3	55,4	

Implementação com Heap e Vetor (K,**V**)



HEAP

currentSize 9

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5,7	30,1	5,2	32,5	31,9	8,0	41,8	32,3	55,4	

DIC

0	5
1	1
2	2
3	7
4	8
5	3
6	-1
7	0
8	6
9	4

Descrição das Operações com Sucesso (1)

- **void insert**(K key, V value) **throws** InvalidValueException

  Dicionário: Pesquisa-se o valor, para descobrir se já existe.

  Heap: Coloca-se a nova entrada no fim do heap e executa-se o borbulhar ascendente a partir dessa posição (a última ocupada).

- Entry<K,V> **removeMin**( ) **throws** EmptyQueueException

  Heap: Retorna-se a primeira entrada do heap (posição zero). Coloca-se a última entrada no início do heap e executa-se o borbulhar descendente a partir da posição zero.

Altera-se o dicionário sempre que uma entrada é inserida, é removida ou muda de posição no heap.

Descrição das Operações com Sucesso (2)

- K **decreaseKey**(V value, K newKey) **throws** InvalidKeyExcept.

  Dicionário: Pesquisa-se o valor, para descobrir a posição da entrada no heap.

  Heap: Executa-se o borbulhar ascendente a partir dessa posição.

Altera-se o dicionário sempre que uma entrada muda de posição no heap.

Complexidades da Fila com Prioridade Adaptável com **Heap** e **Vetor** (n entradas)

	Melhor Caso	Pior Caso	Caso Esperado
isEmpty	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
size	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
minEntry	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
insert	$\Theta(1)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$
removeMin	$\Theta(1)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$
decreaseKey	$\Theta(1)$	$O(\log n)$	$O(\log n)$

Complexidades da Fila com Prioridade Adaptável com **Heap** e **Tabela de Dispersão** (n entradas)

	Melhor Caso	Pior Caso	Caso Esperado
isEmpty	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
size	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
minEntry	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
insert	$\Theta(1)$	$O(n \log n)$	$O(\log n)$
removeMin	$\Theta(1)$	$O(n \log n)$	$O(\log n)$
decreaseKey	$\Theta(1)$	$O(n \log n)$	$O(\log n)$

Complexidade do Algoritmo de Prim

Grafo em vetor de listas de "incidências"

Fila implementada com Heap e Vetor

criação de 4 vetores	$\Theta(1)$
criação da fila com prioridade	$\Theta(\|V\|)$
inicialização de 2 vetores (selected e cost)	$\Theta(\|V\|)$
inserção da origem na fila	$\Theta(1)$
$\|V\|$ remoção do mínimo da fila	$O(\|V\| \times \log \|V\|)$
$\|V\| - 1$ inserção no vetor resultado	$\Theta(\|V\|)$
$\|V\|$ obtenção dos arcos incidentes	$\Theta(\|A\|)$
$\leq \|A\|$ inserção ou decremento da chave na fila	$O(\|A\| \times \log \|V\|)$
TOTAL	

Complexidade do Algoritmo de Prim

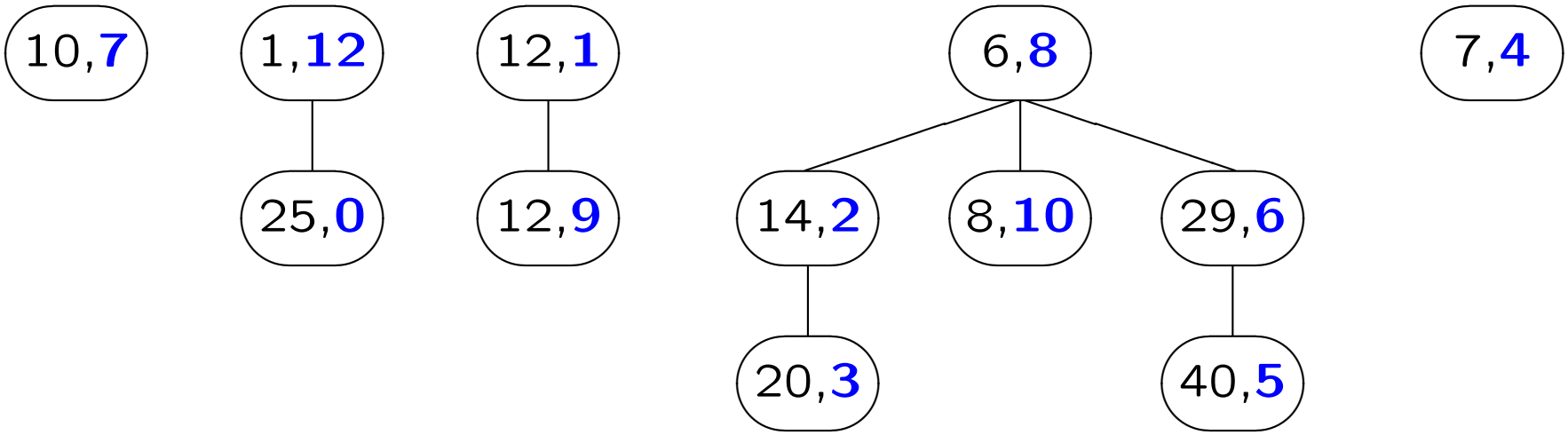
Grafo em vetor de listas de "incidências"

Fila implementada com Heap e Vetor

criação de 4 vetores	$\Theta(1)$
criação da fila com prioridade	$\Theta(\|V\|)$
inicialização de 2 vetores (selected e cost)	$\Theta(\|V\|)$
inserção da origem na fila	$\Theta(1)$
$\|V\|$ remoção do mínimo da fila	$O(\|V\| \times \log \|V\|)$
$\|V\| - 1$ inserção no vetor resultado	$\Theta(\|V\|)$
$\|V\|$ obtenção dos arcos incidentes	$\Theta(\|A\|)$
$\leq \|A\|$ inserção ou decremento da chave na fila	$O(\|A\| \times \log \|V\|)$
TOTAL	$O(\|A\| \times \log \|V\|)$

Fila de Fibonacci [Fredman e Tarjan 87]

Uma **fila de Fibonacci** (K,**V**) é uma floresta de árvores com prioridade. (Qualquer nó tem uma chave inferior ou igual às chaves que se encontram nas suas sub-árvores.)



Tal como no Heap, é conveniente ter um dicionário que associe a cada valor o nó que tem esse valor.

Complexidades da Fila com Prioridade Adaptável com **Heap/Fila de Fibonacci** e **Vetor** (n entradas)

	Heap (Pior Caso)	Fila de Fibonacci (Pior Caso)	Fila de Fibonacci **Amortizada**
isEmpty	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
size	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
minEntry	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
insert	$O(\log n)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
removeMin	$O(\log n)$	$O(n)$	$O(\log n)$
decreaseKey	$O(\log n)$	$O(n)$	$\Theta(1)$

Complexidade do Algoritmo de Prim

Grafo em vetor de listas de "incidências"

Fila implem. com Fila de Fibonacci e Vetor

criação de 4 vetores	$\Theta(1)$
criação da fila com prioridade	$\Theta(\|V\|)$
inicialização de 2 vetores (selected e cost)	$\Theta(\|V\|)$
inserção da origem na fila	$\Theta(1)$
$\|V\|$ remoção do mínimo da fila	$O(\|V\| \times \log \|V\|)$
$\|V\| - 1$ inserção no vetor resultado	$\Theta(\|V\|)$
$\|V\|$ obtenção dos arcos incidentes	$\Theta(\|A\|)$
$\leq \|A\|$ inserção ou decremento da chave na fila	$O(\|A\| \times 1)$
TOTAL	

Complexidade do Algoritmo de Prim

Grafo em vetor de listas de "incidências"

Fila implem. com Fila de Fibonacci e Vetor

criação de 4 vetores	$\Theta(1)$
criação da fila com prioridade	$\Theta(\|V\|)$
inicialização de 2 vetores (selected e cost)	$\Theta(\|V\|)$
inserção da origem na fila	$\Theta(1)$
$\|V\|$ remoção do mínimo da fila	$O(\|V\| \times \log \|V\|)$
$\|V\| - 1$ inserção no vetor resultado	$\Theta(\|V\|)$
$\|V\|$ obtenção dos arcos incidentes	$\Theta(\|A\|)$
$\leq \|A\|$ inserção ou decremento da chave na fila	$O(\|A\| \times 1)$
TOTAL	$O(\|A\| + \|V\| \times \log \|V\|)$