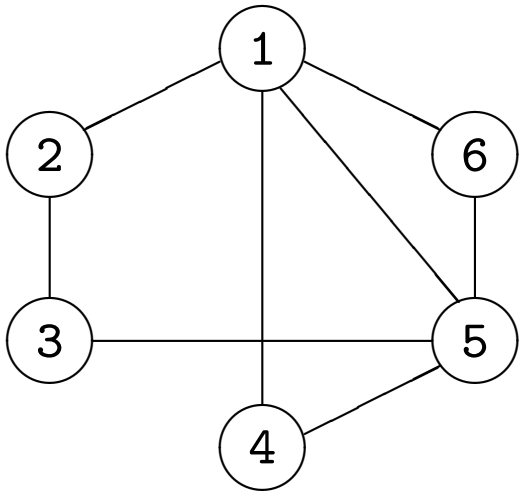
Capítulo XIII

Introdução
à
Teoria da Complexidade

Problema

Dado um grafo **não orientado e conexo**,

existe um circuito que passa uma, e uma só, vez por cada **arco**?



1, 6, 5, 4, 1, 2, 3, 5, 1

Circuito de EULER

- um circuito que passa uma, e uma só, vez por cada **arco**.

Dado um grafo G não orientado e conexo, G tem um circuito de Euler?

Em caso afirmativo, como encontrá-lo?

Proposições

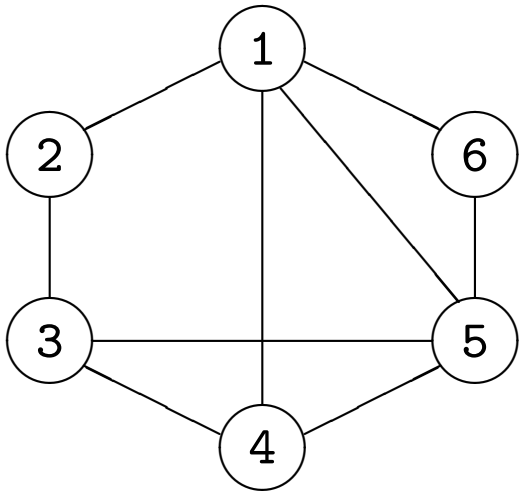
- Um grafo não orientado e conexo tem um circuito de Euler se, e só se, todos os vértices têm grau par.

  Consequência: **Existe** um **algoritmo polinomial** para descobrir se um grafo não orientado e conexo tem um circuito de Euler.

- **Existe** um **algoritmo polinomial** para encontrar um circuito de Euler num grafo não orientado e conexo cujos vértices têm grau par.

Problema

Dado um grafo **não orientado e conexo**,
existe um circuito que passa uma, e uma só, vez por cada **vértice**?



1, 2, 3, 4, 5, 6, 1

Circuito de HAMILTON

- um circuito simples que passa por todos os **vértices**.

Dado um grafo G não orientado e conexo, G tem um circuito de Hamilton? Em caso afirmativo, como encontrá-lo?

Facto

Embora os problemas do Circuito de Euler e do Circuito de Hamilton tenham enunciados muito parecidos, as respetivas soluções computacionais têm ordens de complexidade muito diferentes:

- **existem algoritmos polinomiais** para resolver os problemas do Circuito de Euler; mas
- **todos os algoritmos que se conhecem** para resolver os problemas do Circuito de Hamilton são **exponenciais**.

Problema, Instância & Solução

SAT: **Problema da Satisfazibilidade**

Dada uma fórmula proposicional f, f é satisfazível?

Instância: $p \wedge (q \vee \neg p)$ $p \wedge (q \vee \neg p)$ é satisfazível?

Solução: Sim

#-SAT: **Problema da #-Satisfazibilidade**

Dada uma fórmula proposicional f, quantas atribuições satisfazem f?

Instância: $p \wedge (q \vee \neg p)$ Quantas atribuições satisfazem $p \wedge (q \vee \neg p)$?

Solução: Uma

Um **problema de decisão** é um problema onde qualquer solução é "Sim" ou "Não".

Exemplo: **SAT** é um problema de decisão.

Algoritmo

Um **algoritmo para resolver um problema** é um procedimento que calcula a solução de **qualquer** instância do problema num número **finito** de passos.

Decidibilidade

Um **problema** de decisão diz-se:

- **decidível**, se existir algum algoritmo para o resolver;
- **indecidível**, no caso contrário.

Problema da Terminação

TERM: Dados um programa P e uma entrada E,

P termina com E?

Indecidível **[Turing 1936]**

O Problema da Terminação é indecidível, i.e., é impossível especificar um algoritmo que, dados um programa arbitrário e uma entrada arbitrária, decida se o programa termina com aquela entrada.

Cálculo de Predicados de Primeira Ordem

PRED: Dada uma fórmula f do Cálculo de Predicados de Primeira Ordem,

f é válida?

Instâncias

- $(\forall x\ (Px \Rightarrow Qx)) \Rightarrow ((\exists x Px) \Rightarrow (\exists x Qx))$
- $\forall y\ (\forall x Px \Rightarrow Py)$
- $\exists x(Px \vee Qx) \Rightarrow \exists x(Px \wedge Qx)$

Indecidível [Church 1936, Turing 1936/7]

Décimo Problema de Hilbert

(enunciado em 1900)

HILBERT: Dada uma equação polinomial de coeficientes inteiros,

$P(x_1, \ldots, x_n) = 0$,

$$P(x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ tem solução inteira?}$$

Instâncias

- $x^2 - 3x + 2 = 0$
- $7x^5y^2 - 4x^2y^3 + 14y^2 + 8y - 3 = 0$

Indecidível [Matijacevič 1970]

Ambiguidade de Gramáticas Independentes do Contexto

GIC-AMB: Dada uma gramática independente do contexto G,

G é ambígua?

Instâncias

- $(\{0,1\},\ \{S\},\ S,\ \{S \longrightarrow 0S \mid 1S \mid 0 \mid 1\})$
- $(\{0,1\},\ \{S\},\ S,\ \{S \longrightarrow SS \mid 0 \mid 1\})$

Indecidível [Bar-Hillel, Perles, Shamir 1961]

Algumas Classes de Complexidade

P, **PTIME**: a classe dos problemas de decisão resolúveis em tempo polinomial (i.e., para os quais existe algum algoritmo **determinista** cujo tempo é polinomial).

EXPTIME: a classe dos problemas de decisão resolúveis em tempo exponencial.

PSPACE: a classe dos problemas de decisão resolúveis em espaço polinomial.

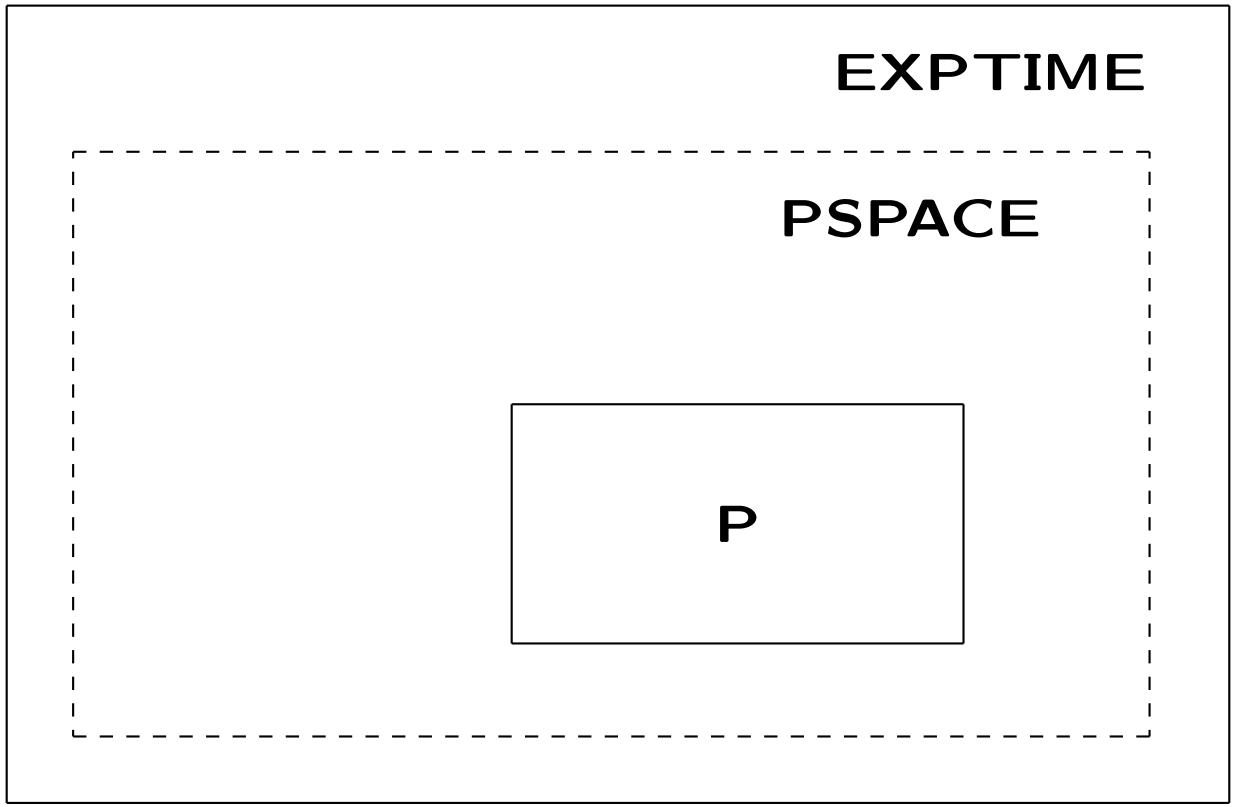
Um **problema** diz-se:

- **tratável**, se existir algum algoritmo (cujo tempo é) polinomial para o resolver;
- **intratável**, se (foi provado que) não existe um algoritmo (cujo tempo é) polinomial para o resolver.

Relações entre **P**, **PSPACE** e **EXPTIME**

$$\mathbf{P} \quad \underset{\subset \text{ or } =?}{\subseteq} \quad \mathbf{PSPACE} \quad \underset{\subset \text{ or } =?}{\subseteq} \quad \mathbf{EXP}$$

$$\mathbf{P} \qquad\qquad \subset \qquad\qquad \mathbf{EXP}$$



Igualdade de Expressões Regulares

ER-=: Dadas duas expressões regulares, E_1 e E_2,

$$\mathcal{L}(E_1) = \mathcal{L}(E_2)?$$

Instâncias

- $(a+b+c)^*$ e $(a+b+c)^*a^*$
- $(a+b)^*a^*$ e $((a+b)^*a)^*$
- $b^*a(a+b)^*$ e $(a+b)^*a(a+b)^*$

Intratável [Stockmeyer, Meyer 1973]

A Classe **NP** — Definição Formal

NP: a classe dos problemas de decisão X para os quais existe:

- um algoritmo polinomial $\mathcal{A}$

  (que verifica se *um candidato é a prova do sim*),

- uma função $\mathcal{P}$ (que fornece a *prova do sim*, quando ela existe) e
- uma constante k

tais que, para qualquer instância I de X:

- se a solução de I for "Sim" e o tamanho de I for n,

  então o tamanho de $\mathcal{P}(I)$ é $O(n^k)$ e $\mathcal{A}(I, \mathcal{P}(I))$ retorna "Sim";

- se a solução de I for "Não",

  então não existe nenhum valor para $\mathcal{P}(I)$

  que faça $\mathcal{A}(I, \mathcal{P}(I))$ retornar "Sim".

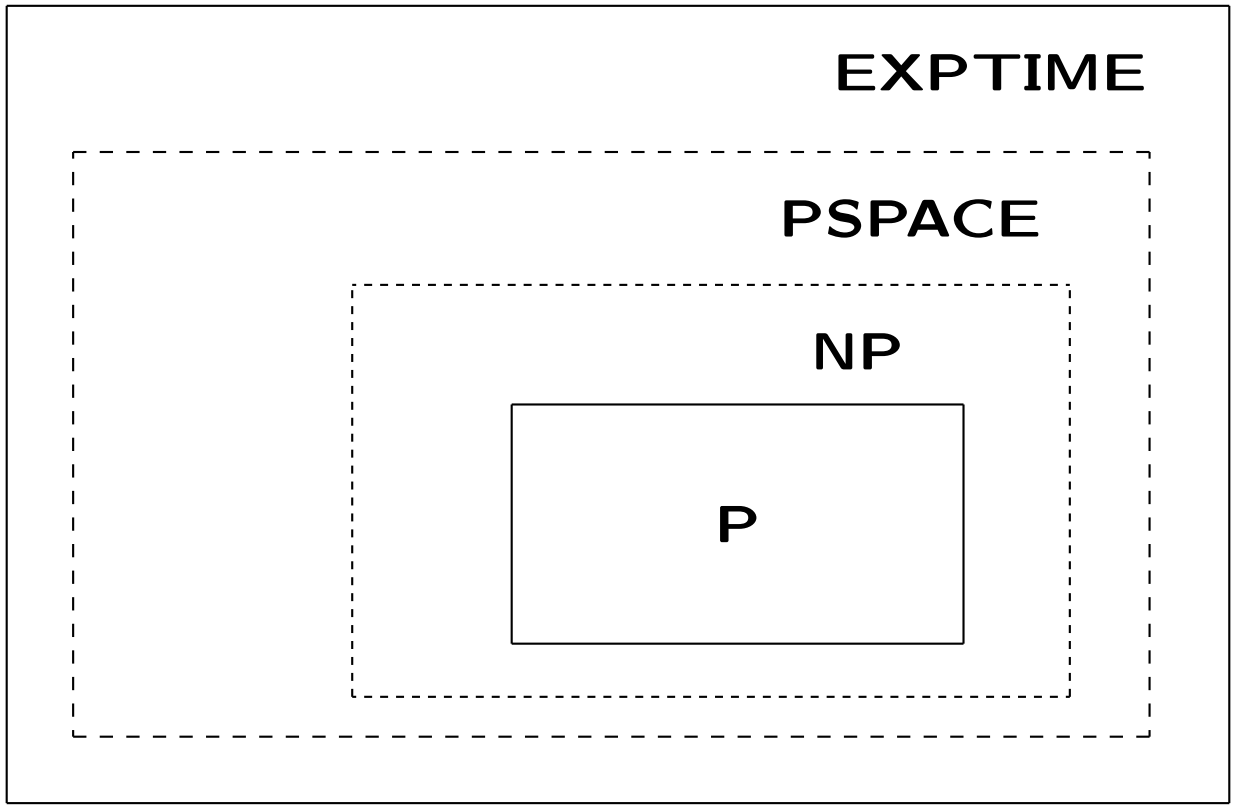
A Classe **NP** — Definições Intuitivas

NP: a classe dos problemas de decisão resolúveis em tempo polinomial **não-determinista**, ou seja, para os quais existe um algoritmo **não determinista** que, "*com muita sorte ou por magia*" , encontra a solução em tempo polinomial.

NP: a classe dos problemas de decisão para os quais é possível verificar em tempo polinomial "*se um qualquer candidato é uma prova do sim*" . (Esta é a definição usada nas demonstrações, como veremos a seguir.)

Onde Colocar a Classe **NP**?

$$\mathbf{P} \underset{\subset \text{ or } =?}{\subseteq} \mathbf{NP} \underset{\subset \text{ or } =?}{\subseteq} \mathbf{PSPACE}$$



Satisfazibilidade / *Satisfiability*

SAT: Dada uma fórmula proposicional na forma normal conjuntiva,

$$f = \bigwedge_{1 \leq i \leq k} C_i,$$

f é satisfazível ?

Instâncias

- $(x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge z$
- $(x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z)$
- $(x \vee y) \wedge (\neg x) \wedge (\neg y)$

Satisfazibilidade / *Satisfiability*

SAT: Dada uma fórmula proposicional na forma normal conjuntiva,

$$f = \bigwedge_{1 \leq i \leq k} C_i,$$

f é satisfazível ?

Instâncias

- $(x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge z$
- $(x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z)$
- $(x \vee y) \wedge (\neg x) \wedge (\neg y)$

Candidato a Prova do Sim: Uma atribuição de valores de verdade às variáveis da fórmula

NP-completo [Cook 1971]

SAT é um Problema **NP** (1)

1. Existe um **algoritmo polinomial** que, dados:
   - uma fórmula proposicional $f = \bigwedge_{1 \leq i \leq k} C_i$, na forma normal conjuntiva, e
   - uma atribuição $\theta = \{(v_1, b_1), (v_2, b_2), \ldots, (v_n, b_n)\}$ de valores de verdade às variáveis de f,

   verifica se θ satisfaz f.

   O algoritmo avalia a fórmula, calculando o valor lógico de cada um dos termos C_i, para $i = 1, 2, \ldots, k$. Para avaliar $C_i = \bigvee_{1 \leq j \leq m_i} D_{ij}$, percorre os literais D_{ij}, para $j = 1, 2, \ldots, m_i$. Se o literal D_{ij} for uma variável v_u, o seu valor lógico é b_u. Se o literal tiver a forma $\neg v_u$, o seu valor lógico é o complementar de b_u. Os valores b_u (com $u = 1, 2, \ldots, n$) são obtidos através de pesquisas em θ. (Continua.)

SAT é um Problema **NP** (2)

(Continuação da descrição do algoritmo.)
A avaliação de um termo C_i é **verdade** se o valor lógico de algum dos literais D_{ij} for **verdade**. O algoritmo retorna **true** se, e só se, a avaliação de todos os termos C_i for **verdade**.

A complexidade temporal do algoritmo é polinomial no número de símbolos de f. Se a atribuição θ estiver guardada num vetor e se f tiver n variáveis distintas, o_v ocorrências dessas variáveis e o_p ocorrências de operadores lógicos ($\neg$, $\vee$ e $\wedge$), o número de passos do algoritmo é $O(o_v\, n + o_p)$.

2. O **tamanho** da atribuição θ é **polinomial** no tamanho de f: θ tem $2n$ elementos, f tem $o_v + o_p$ elementos e $n \leq o_v$.

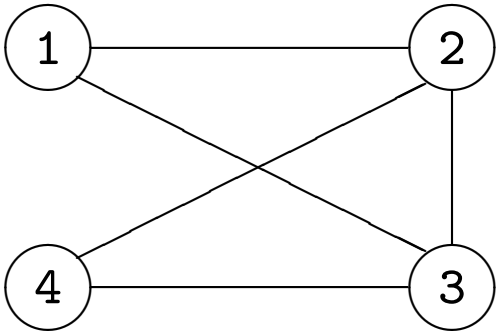
Circuito de Hamilton / *Hamiltonian Cycle*

Seja G um grafo não orientado e conexo. Um **circuito de Hamilton** em G é um circuito simples que passa por todos os vértices de G.

HAMILTON: Dado um grafo G, não orientado e conexo,

G tem um circuito de Hamilton?

Instância



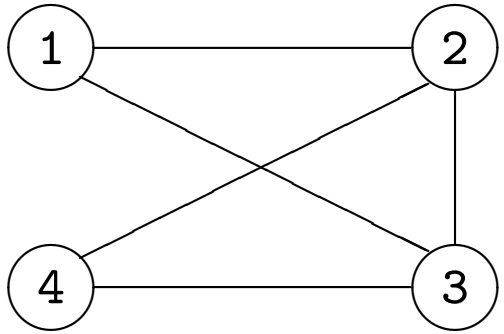
Circuito de Hamilton / *Hamiltonian Cycle*

Seja G um grafo não orientado e conexo. Um **circuito de Hamilton** em G é um circuito simples que passa por todos os vértices de G.

HAMILTON: Dado um grafo G, não orientado e conexo,

G tem um circuito de Hamilton?

Instância



Candidato a Prova do Sim: 1 2 4 3 (uma permutação dos vértices)

NP-completo [Karp 1972]

HAMILTON é um Problema **NP** (1)

1. Existe um **algoritmo polinomial** que, dados:
   - um grafo $G = (V, A)$, não orientado e conexo, e
   - uma permutação $\rho = v_1\, v_2 \cdots v_n$ dos vértices de G,

   verifica se $v_1\, v_2 \cdots v_n\, v_1$ é um circuito de Hamilton em G.

   O algoritmo percorre a permutação ρ, testando se os arcos (v_i, v_{i+1}) pertencem a A, para todo o $i = 1, \ldots, n-1$. Depois, testa se o arco (v_n, v_1) também pertence a A. O algoritmo retorna **true** se, e só se, todos os testes tiverem sucesso.

   A complexidade temporal do algoritmo é polinomial no número de vértices ($|V|$) e no número de arcos ($|A|$). Se o conjunto dos arcos estiver guardado num vetor, o número de passos do algoritmo é $O(n \times |A|) = O(|V| \times |A|)$.

HAMILTON é um Problema **NP** (2)

2. O **tamanho** da permutação ρ é **polinomial** no tamanho de G, porque ρ tem $|V|$ vértices.

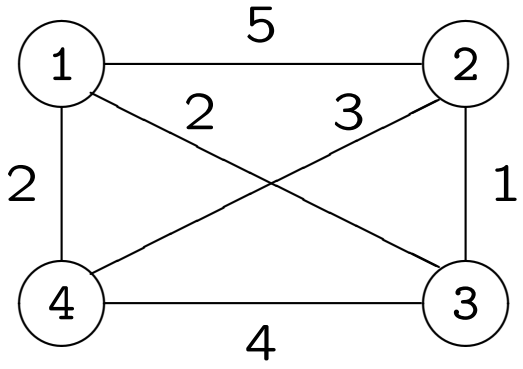
Caixeiro Viajante / *Travelling Salesman*

CAIXEIRO: Dados um grafo G, não orientado, pesado e completo, cujos arcos têm custo positivo, e um inteiro $k \geq 1$,

G tem um circuito de Hamilton

cujo comprimento pesado não excede k?

Instância



$k = 8$

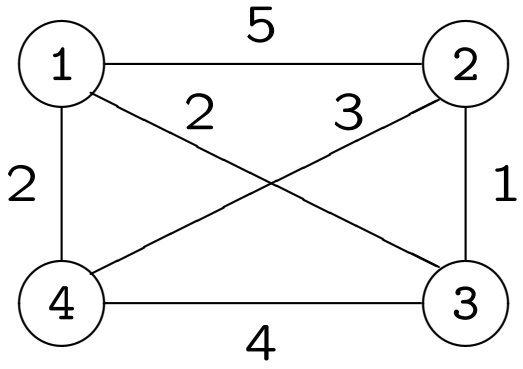
Caixeiro Viajante / *Travelling Salesman*

CAIXEIRO: Dados um grafo G, não orientado, pesado e completo, cujos arcos têm custo positivo, e um inteiro $k \geq 1$,

G tem um circuito de Hamilton

cujo comprimento pesado não excede k?

Instância



$k = 8$

Candidato a Prova do Sim: 1 3 2 4 (uma permutação dos vértices)

NP-completo

CAIXEIRO é um Problema **NP** (1)

1. Existe um **algoritmo polinomial** que, dados:
   - um grafo $G = (V, A)$, não orientado, pesado e completo, cujos arcos têm custo positivo,
   - um inteiro $k \geq 1$ e
   - uma permutação $\rho = v_1\, v_2\, \cdots\, v_n$ dos vértices de G,

   verifica se $v_1\, v_2\, \cdots\, v_n\, v_1$ é um circuito de Hamilton em G cujo comprimento pesado não excede k.

   O algoritmo percorre a permutação ρ, calculando a soma dos pesos dos arcos (v_i, v_{i+1}), para todo o $i = 1, \ldots, n-1$. Ao resultado, soma o peso do arco (v_n, v_1). O algoritmo retorna **true** se, e só se, o resultado final for inferior ou igual a k.

CAIXEIRO é um Problema **NP** (2)

A complexidade temporal do algoritmo é polinomial no número de vértices ($|V|$) e no número de arcos ($|A|$). Se o conjunto dos arcos estiver guardado num vetor, o número de passos do algoritmo é $O(n \times |A|) = O(|V| \times |A|)$.

Curiosidade: A complexidade temporal do algoritmo também é $O(|V|^3)$ porque, como o grafo é não orientado e completo,

$$|A| = \frac{|V| \times (|V| - 1)}{2} = \Theta(|V|^2).$$

2. O **tamanho** da permutação ρ é **polinomial** no tamanho de (G, k), porque ρ tem $|V|$ vértices.

Conjunto de Ataque / *Hitting Set*

Sejam D um conjunto finito, $\mathcal{C}$ uma coleção de subconjuntos de D e $k \geq 1$. Um **conjunto de ataque de $\mathcal{C}$ de cardinalidade k** é um conjunto $A \subseteq D$ tal que: $|A| = k$ e $(\forall X \in \mathcal{C})\ X \cap A \neq \emptyset$.

ATAQUE: Dados um conjunto finito D, uma coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de D e um inteiro $k \geq 1$,

$\mathcal{C}$ tem um conjunto de ataque de cardinalidade inferior ou igual a k?

Instância

$$(\{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \quad \{\,\{1,2,3\}\,,\ \{4,5,6\}\,,\ \{2,3,5,7\}\,\}, \quad 2)$$

Conjunto de Ataque / *Hitting Set*

Sejam D um conjunto finito, $\mathcal{C}$ uma coleção de subconjuntos de D e $k \geq 1$. Um **conjunto de ataque de $\mathcal{C}$ de cardinalidade k** é um conjunto $A \subseteq D$ tal que: $|A| = k$ e $(\forall X \in \mathcal{C})\ X \cap A \neq \emptyset$.

ATAQUE: Dados um conjunto finito D, uma coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de D e um inteiro $k \geq 1$,

$\mathcal{C}$ tem um conjunto de ataque de cardinalidade inferior ou igual a k?

Instância

$$(\{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \quad \{\,\{1,2,3\}\,,\ \{4,5,6\}\,,\ \{2,3,5,7\}\,\}, \quad 2)$$

Candidato a Prova do Sim: $\{1,5\}$ (um subconjunto de D)

NP-completo [Karp 1972]

ATAQUE é um Problema **NP** (1)

1. Existe um **algoritmo polinomial** que, dados:
   - um conjunto finito D,
   - uma coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de D,
   - um inteiro $k \geq 1$ e
   - um subconjunto A de D,

   verifica se A é um conjunto de ataque de $\mathcal{C}$ de cardinalidade inferior ou igual a k.

   O algoritmo começa por contar o número de elementos de A, retornando **false** se esse número for superior a k. Se a execução continuar, o algoritmo percorre a coleção $\mathcal{C}$ e, para cada elemento X de $\mathcal{C}$, testa se a interseção entre X e A é não vazia. O algoritmo retorna **true** se, e só se, todos os testes tiverem sucesso. (Continua.)

ATAQUE é um Problema **NP** (2)

(Continuação da descrição do algoritmo.)
Para determinar se a interseção de dois conjuntos é não vazia, basta percorrer um dos conjuntos, verificando se algum dos seus elementos pertence ao outro conjunto.

A complexidade temporal do algoritmo é polinomial no número de elementos de D ($|D|$), de $\mathcal{C}$ ($|\mathcal{C}|$) e de A ($|A|$). A contagem do número de elementos de A é $\Theta(|A|)$. Cada teste de interseção é $O(|A| \times |D|)$, porque os elementos de $\mathcal{C}$ são subconjuntos de D. O número máximo de testes de interseção realizados é $|\mathcal{C}|$. Portanto, o número de passos do algoritmo é

$$O(|A| + |\mathcal{C}| \times |A| \times |D|) = O(|\mathcal{C}| \times |A| \times |D|).$$

2. O **tamanho** do conjunto A é **polinomial** no tamanho de $(D, \mathcal{C}, k)$, porque A é um subconjunto de D.

Clique / *Clique*

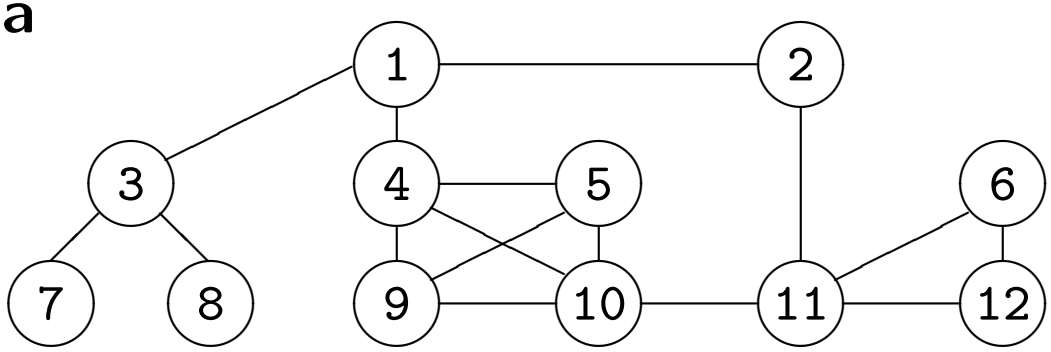
Sejam $G = (V, A)$ um grafo não orientado e $n \geq 1$. Uma **clique de G de cardinalidade** n é um conjunto $V' \subseteq V$ tal que:

$$|V'| = n \quad \text{e} \quad \forall a, b \in V' : \; a \neq b \Rightarrow (a, b) \in A.$$

CLIQUE: Dados um grafo G não orientado e um inteiro $n \geq 1$,

G tem uma clique de cardinalidade $\geq n$?

Instância



$n = 4$

Clique / *Clique*

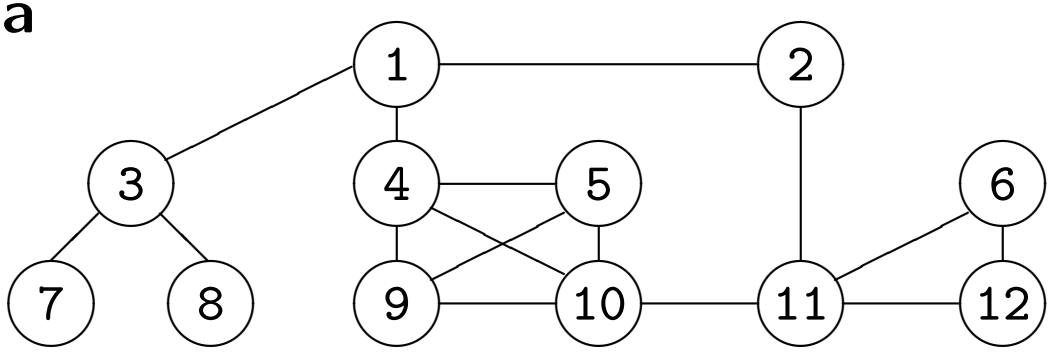
Sejam $G = (V, A)$ um grafo não orientado e $n \geq 1$. Uma **clique de G de cardinalidade n** é um conjunto $V' \subseteq V$ tal que:

$$|V'| = n \quad \text{e} \quad \forall a, b \in V' : \; a \neq b \Rightarrow (a, b) \in A.$$

CLIQUE: Dados um grafo G não orientado e um inteiro $n \geq 1$,

G tem uma clique de cardinalidade $\geq n$?

Instância



$n = 4$

Candidato a Prova do Sim: $\{4, 5, 9, 10\}$ (um conjunto de vértices)

NP-completo

Coloração de Vértices / *Vertex Colouring*

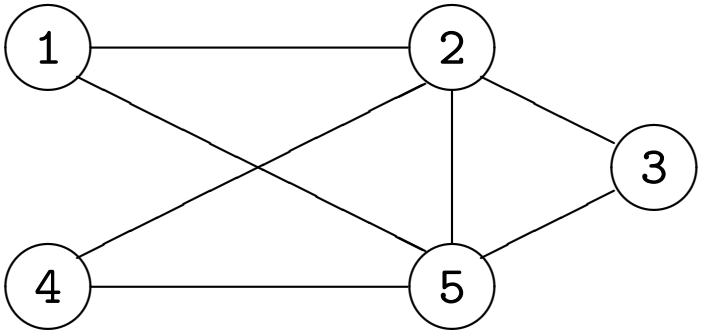
Sejam $G = (V, A)$ um grafo não orientado e $k \geq 2$. Uma **coloração dos vértices de** G com k **cores** é uma função, $\text{cor} : V \longrightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$, que atribui a cada vértice uma das k cores possíveis tal que:

$$\forall (v, w) \in A : \quad \text{cor}(v) \neq \text{cor}(w).$$

COLVERT: Dados um grafo G não orientado e um inteiro $k \geq 2$,

existe uma coloração dos vértices de G com k cores?

Instância



$k = 3$

Coloração de Vértices / *Vertex Colouring*

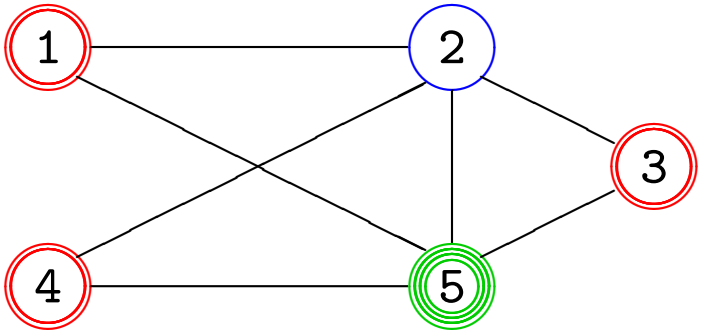
Sejam $G = (V, A)$ um grafo não orientado e $k \geq 2$. Uma **coloração dos vértices de** G com k **cores** é uma função, $\text{cor} : V \longrightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$, que atribui a cada vértice uma das k cores possíveis tal que:

$$\forall (v, w) \in A : \quad \text{cor}(v) \neq \text{cor}(w).$$

COLVERT: Dados um grafo G não orientado e um inteiro $k \geq 2$,

existe uma coloração dos vértices de G com k cores?

Instância



$k = 3$

Candidato a Prova do Sim: uma atribuição de cores aos vértices

NP-completo

Cobertura de Vértices / *Vertex Cover*

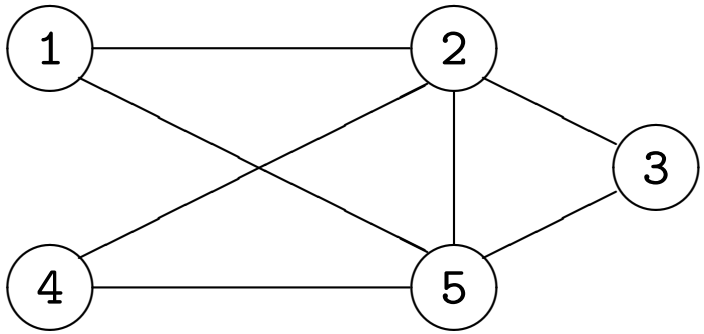
Sejam $G = (V, A)$ um grafo não orientado e $k \geq 1$. Uma **cobertura de vértices de G de cardinalidade k** é um conjunto $V' \subseteq V$ tal que:

$$|V'| = k \quad \text{e} \quad \forall (a, b) \in A : \quad a \in V' \ \text{ou} \ b \in V'.$$

COBVERT: Dados um grafo G não orientado e um inteiro $k \geq 1$,

G tem uma cobertura de vértices de cardinalidade $\leq k$?

Instância



$\boxed{k = 2}$

Cobertura de Vértices / *Vertex Cover*

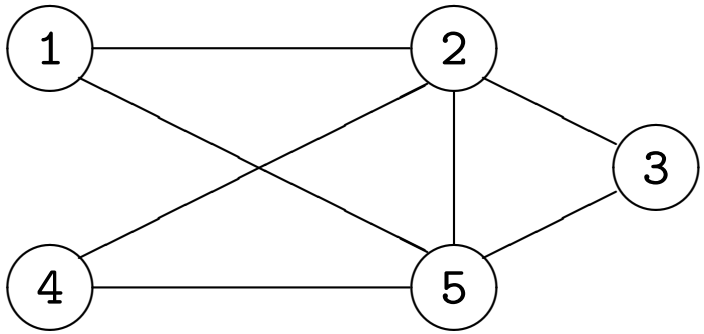
Sejam $G = (V, A)$ um grafo não orientado e $k \geq 1$. Uma **cobertura de vértices de G de cardinalidade k** é um conjunto $V' \subseteq V$ tal que:

$$|V'| = k \quad \text{e} \quad \forall (a, b) \in A : \quad a \in V' \ \text{ou} \ b \in V'.$$

COBVERT: Dados um grafo G não orientado e um inteiro $k \geq 1$,

G tem uma cobertura de vértices de cardinalidade $\leq k$?

Instância



$\boxed{k = 2}$

Candidato a Prova do Sim: $\{2, 5\}$ (um conjunto de vértices)

NP-completo

Cobertura de Conjuntos / *Set Cover*

Sejam D um conjunto finito, $\mathcal{C}$ um conjunto de subconjuntos de D e $n \geq 1$. Uma **cobertura de conjuntos de $\mathcal{C}$ de cardinalidade** n é um conjunto $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ tal que:

$$|\mathcal{C}'| = n \quad \text{e} \quad \bigcup_{X \in \mathcal{C}'} X = D.$$

COBCONJ: Dados um conjunto finito D, um conjunto $\mathcal{C}$ de subconjuntos de D e um inteiro $n \geq 1$,

$\mathcal{C}$ tem uma cobertura de conjuntos de cardinalidade $\leq n$?

Instância

$$(\{1,2,3,4,5,6\}, \quad \{\,\{1,2,3,5\}\,,\,\{2,3,4\}\,,\,\{2,4,6\}\,\}, \quad 2)$$

Cobertura de Conjuntos / *Set Cover*

Sejam D um conjunto finito, $\mathcal{C}$ um conjunto de subconjuntos de D e $n \geq 1$. Uma **cobertura de conjuntos de $\mathcal{C}$ de cardinalidade** n é um conjunto $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ tal que:

$$|\mathcal{C}'| = n \quad \text{e} \quad \bigcup_{X \in \mathcal{C}'} X = D.$$

COBCONJ: Dados um conjunto finito D, um conjunto $\mathcal{C}$ de subconjuntos de D e um inteiro $n \geq 1$,

$\mathcal{C}$ tem uma cobertura de conjuntos de cardinalidade $\leq n$?

Instância

$$(\{1,2,3,4,5,6\}, \quad \{\,\{1,2,3,5\}\,,\,\{2,3,4\}\,,\,\{2,4,6\}\,\}, \quad 2)$$

Candidato a Prova do Sim: um subconjunto de $\mathcal{C}$

NP-completo

Partição de Conjunto/ *Set Partition*

PARTCONJ: Dado um conjunto finito X de números positivos, existe um subconjunto $A \subseteq X$ tal que:

$$\sum_{x \in A} x = \sum_{x \in X \setminus A} x \, ?$$

Instância

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 10\}$$

Partição de Conjunto/ *Set Partition*

PARTCONJ: Dado um conjunto finito X de números positivos, existe um subconjunto $A \subseteq X$ tal que:

$$\sum_{x \in A} x = \sum_{x \in X \setminus A} x \, ?$$

Instância

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 10\}$$

Candidato a Prova do Sim: $\{3, 10\}$ (um subconjunto de X)

NP-completo

Mochila 0-1 / *0-1 Knapsack*

MOCH01: Seja I um conjunto finito de itens. Cada item $i \in I$ tem um peso w_i e um valor v_i, ambos não negativos. Sejam $C \geq 0$ a capacidade da mochila e $V \geq 0$. Existe um subconjunto $S \subseteq I$ tal que:

$$\sum_{i \in S} w_i \leq C \quad \wedge \quad \sum_{i \in S} v_i \geq V \, ?$$

Forma das Instâncias

$$(\quad (w_1, w_2, \ldots), \quad (v_1, v_2, \ldots), \quad C, \quad V \quad)$$

Instância

$$(\quad (5, 4, 6, 3), \quad (10, 40, 30, 50), \quad 10, \quad 80 \quad)$$

Mochila 0-1 / *0-1 Knapsack*

MOCH01: Seja I um conjunto finito de itens. Cada item $i \in I$ tem um peso w_i e um valor v_i, ambos não negativos. Sejam $C \geq 0$ a capacidade da mochila e $V \geq 0$. Existe um subconjunto $S \subseteq I$ tal que:

$$\sum_{i \in S} w_i \leq C \quad \wedge \quad \sum_{i \in S} v_i \geq V \, ?$$

Forma das Instâncias

$$(\quad (w_1, w_2, \ldots), \quad (v_1, v_2, \ldots), \quad C, \quad V \quad)$$

Instância

$$(\quad (5, 4, 6, 3), \quad (10, 40, 30, 50), \quad 10, \quad 80 \quad)$$

Candidato a Prova do Sim: um conjunto de itens

NP-completo

Redução de Problemas

Um problema X **reduz-se** a um problema Y se existir uma função ϕ que transforma qualquer instância I de X numa instância $\phi(I)$ de Y,

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & X & \longrightarrow & Y \\ & & I & \longmapsto & \phi(I) \end{array}$$

de tal forma que:

$$\text{Solução}_X(I) = \text{Solução}_Y(\phi(I)).$$

Se ϕ pertencer à classe Ω, ϕ diz-se uma **redução Ω** de X para Y.

Notação:

$X \leq_P Y$ significa que há uma redução polinomial de X para Y.

PAR $\leq_P$ MULT

PAR: Dado um inteiro positivo k, k é par?

MULT: Dados dois inteiros positivos m e n, m é múltiplo de n?

PAR reduz-se a **MULT** porque a função

$$f : \textbf{PAR} \longrightarrow \textbf{MULT}$$
$$k \longmapsto$$

PAR $\leq_P$ MULT

PAR: Dado um inteiro positivo k, k é par?

MULT: Dados dois inteiros positivos m e n, m é múltiplo de n?

PAR reduz-se a **MULT** porque a função

$$\begin{array}{rcl} f : \textbf{PAR} & \longrightarrow & \textbf{MULT} \\ k & \longmapsto & (k, 2) \end{array}$$

é tal que:

$$\text{Solução}_{\textbf{PAR}}(k) = \text{Solução}_{\textbf{MULT}}((k, 2)),$$

ou seja:

$$k \text{ é par} \iff k \text{ é múltiplo de } 2.$$

A redução é polinomial porque a transformação f pode ser efetuada em tempo polinomial.

A **dificuldade** de **PAR** é **menor ou igual** à **dificuldade** de **MULT**.

HAMILTON $\leq_P$ CAIXEIRO

HAMILTON: Dado um grafo G, não orientado e conexo,

G tem um circuito de Hamilton?

CAIXEIRO: Dados um grafo G, não orientado, pesado e completo, cujos arcos têm custo positivo, e um inteiro $k \geq 1$,

G tem um circuito de Hamilton

cujo comprimento pesado não excede k?

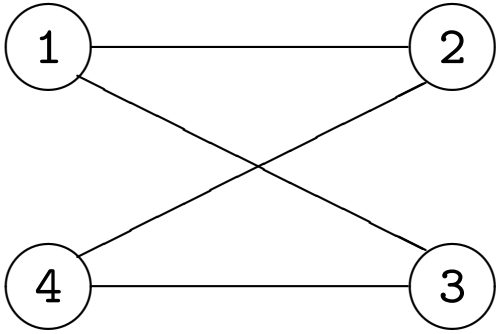
$$\phi \ : \ \textbf{HAMILTON} \longrightarrow \textbf{CAIXEIRO}$$
$$((V, A)) \longmapsto$$

Exemplo

HAMILTON $\longrightarrow$ CAIXEIRO

Grafo não orientado
e conexo.

$\exists$ circuito de Hamilton?



SIM

$\Longleftrightarrow$

Grafo não orientado,
pesado e completo;
$k \geq 1$.

$\exists$ circuito de Hamilton com
comprimento pesado $\leq k$?

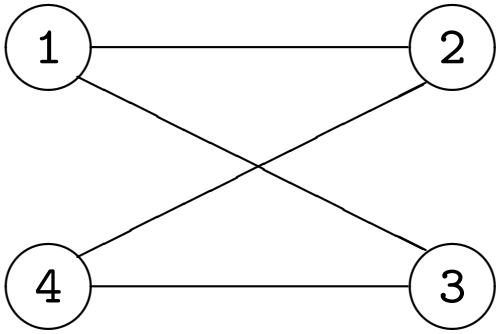
SIM

Exemplo

HAMILTON $\longrightarrow$ CAIXEIRO

Grafo não orientado
e conexo.

$\exists$ circuito de Hamilton?

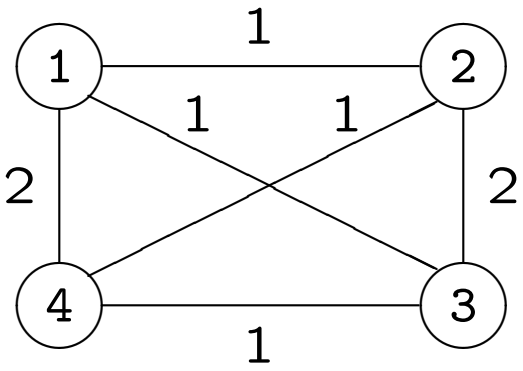


SIM

$\Longleftrightarrow$

Grafo não orientado,
pesado e completo;
$k \geq 1$.

$\exists$ circuito de Hamilton com
comprimento pesado $\leq k$?



$k = 4$

SIM

dificuldade de **HAMILTON** $\leq$ **dificuldade** de **CAIXEIRO**

HAMILTON $\leq_P$ CAIXEIRO

HAMILTON: Dado um grafo G, não orientado e conexo,

G tem um circuito de Hamilton?

CAIXEIRO: Dados um grafo G, não orientado, pesado e completo, cujos arcos têm custo positivo, e um inteiro $k \geq 1$,

G tem um circuito de Hamilton

cujo comprimento pesado não excede k?

$$\begin{array}{rcl} \phi \ : \ \textbf{HAMILTON} & \longrightarrow & \textbf{CAIXEIRO} \\ ((V, A)) & \longmapsto & ((V, A'),\ |V|) \end{array}$$

onde A' é o conjunto:

$$\{(x, y, 1) \mid (x, y) \in A\} \cup \{(x, y, 2) \mid x \in V,\ y \in V,\ x \neq y,\ (x, y) \notin A\}.$$

Teorema **(T1)**

Redução $\phi : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & \phi(x) \end{array}$

X indecidível $\Rightarrow$ Y **??????????**

Teorema **(T1)**

Redução $\phi : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & \phi(x) \end{array}$

X indecidível $\Rightarrow$ Y **indecidível**

Demonstração (por contra-recíproco)

Suponhamos que Y é decidível, existindo um algoritmo para resolver Y.

Seja x uma instância qualquer de X.

Calculando $\phi(x)$ e executando o algoritmo que resolve Y com o input $\phi(x)$, obtém-se a solução de x em dois passos.

Estes dois passos definem um algoritmo para resolver X,

concluindo-se que X é decidível.

Teorema **(T2)**

Redução Polinomial $\phi : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & \phi(x) \end{array}$

X intratável $\Rightarrow$ Y **??????????**

Teorema (T2)

Redução Polinomial $\phi : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & \phi(x) \end{array}$

X intratável $\Rightarrow$ Y **intratável**

Demonstração (por contra-recíproco)

Suponhamos que Y é tratável, existindo um algoritmo polinomial para resolver Y.

Seja x uma instância qualquer de X.

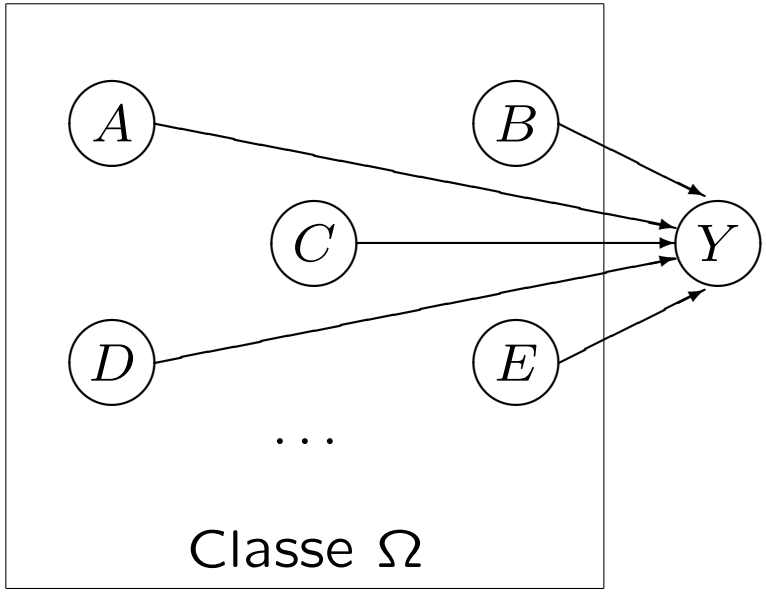
Calculando $\phi(x)$ e executando o algoritmo polinomial que resolve Y com o input $\phi(x)$, obtém-se a solução de x em dois passos polinomiais.

Estes dois passos definem um algoritmo polinomial para resolver X, concluindo-se que X é tratável.

O Sufixo Difícil (*Hard*)

Seja Ω a classe **P**, **NP**, **EXPTIME** ou **PSPACE**.

Um problema Y é Ω-**difícil** se qualquer problema em Ω se reduz a Y através de uma redução polinomial: $(\forall X \in \Omega)\ X \leq_P Y$.

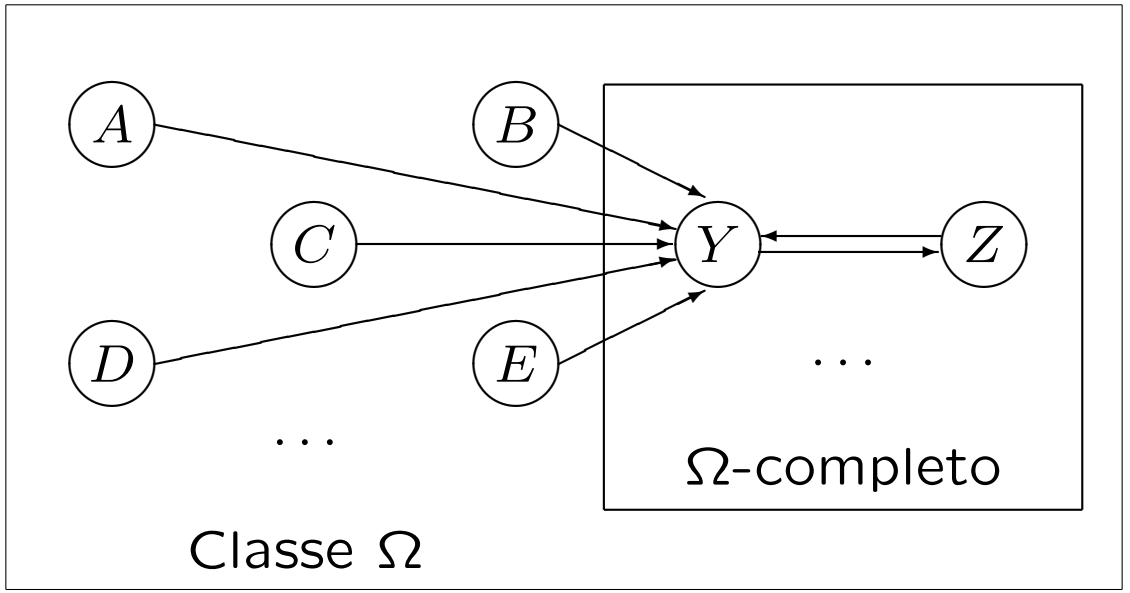


Y é **pelo menos tão difícil como** os problemas em Ω

O Sufixo Completo (*Complete*)

Seja Ω a classe **P**, **NP**, **EXPTIME** ou **PSPACE**.

Um problema Y é Ω-**completo** se Y é Ω-difícil e $Y \in \Omega$.



Y é **um dos problemas mais difíceis** de Ω

Teorema **(T3)**

Redução Polinomial $\phi : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ x & \longmapsto & \phi(x) \end{array}$

$$X\ \Omega\text{-completo} \quad \Rightarrow \quad Y\ \textbf{Ω-difícil}$$

Demonstração

Seja A um problema qualquer na classe Ω.

Como X é Ω-completo, é Ω-difícil e existe uma redução polinomial

$$\psi : A \longrightarrow X.$$

Efetuando a redução $\psi : A \longrightarrow X$, seguida da redução $\phi : X \longrightarrow Y$, obtém-se uma redução polinomial de A para Y.

Exemplos

GIC-$\emptyset$: Dada uma gramática independente do contexto G,

$$\mathcal{L}(G) = \emptyset?$$

P-completo [Jones, Laaser 1977]

HORN: Dados um conjunto H, de cláusulas de Horn fechadas, e uma fórmula atómica fechada f,

$$H \vdash f?$$

P-completo [Jones, Laaser 1977]

ER-T^*: Dada uma expressão regular R, sobre um alfabeto T,

$$\mathcal{L}(R) = T^*?$$

PSPACE-completo [Meyer, Stockmeyer 1972]

Principal Questão em Aberto: $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$?

Se alguém criar um algoritmo polinomial que resolve algum problema **NP-completo**, então:

$$\mathbf{P} = \mathbf{NP}.$$

Se alguém provar que algum problema **NP** não pode ser resolvido por um algoritmo polinomial, então:

$$\mathbf{P} \subset \mathbf{NP} \quad \text{e} \quad \mathbf{P} \cap \mathbf{NP\text{-}completo} = \emptyset.$$

P = NP?

Se alguém criar um algoritmo polinomial que resolve algum problema X **NP-completo**, então:

$$\mathbf{P} = \mathbf{NP}.$$

Demonstração

Sabe-se que **P** $\subseteq$ **NP**. Provemos que **NP** $\subseteq$ **P**.

Seja A um problema **NP** qualquer.

Como X é **NP-completo**, existe uma redução polinomial $\phi : A \longrightarrow X$.

Como X é tratável, pelo Teorema **(T2)**, A é tratável.

Portanto, A pertence à classe **P** (é um problema de decisão tratável).

P = NP?

Se alguém provar que algum problema **NP** não pode ser resolvido por um algoritmo polinomial, então:

$$\textbf{P} \subset \textbf{NP} \quad \text{e} \quad \textbf{P} \cap \textbf{NP-completo} = \emptyset.$$

Se existir um problema X, **NP** e **intratável**, então:

$$\textbf{NP-completo} \subseteq \textbf{Intratável}.$$

Demonstração

Seja A um problema **NP-completo** qualquer.

Se X é **NP**, existe uma redução polinomial $\phi : X \longrightarrow A$.

Como X é intratável, pelo Teorema **(T2)**, A é intratável.

Ainda há muitas Questões em Aberto

e,

de vez em quando, surgem Novos Resultados

Teste à Primalidade

PRIMO: Dado um número inteiro $p \geq 2$,

p é primo?

P [Agrawal, Kayal, Saxena **2002**]