Capítulo XIV

Reduções de Problemas NP-completos

Satisfazibilidade / *Satisfiability*

SAT: Dada uma fórmula proposicional na forma normal conjuntiva,

$$f = \bigwedge_{1 \leq i \leq k} C_i,$$

f é satisfazível ?

Instâncias

- $(x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge z$
- $(x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z)$
- $(x \vee y) \wedge (\neg x) \wedge (\neg y)$

Clique / *Clique*

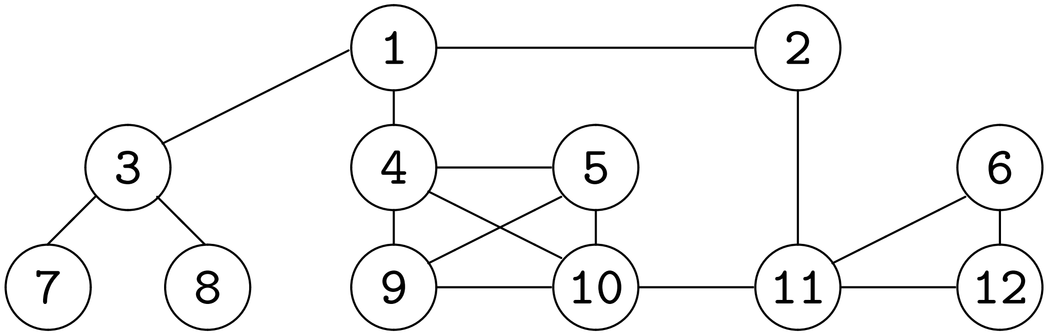
Sejam $G = (V, A)$ um grafo não orientado e $n \geq 1$. Uma **clique de G de cardinalidade n** é um conjunto $V' \subseteq V$ tal que:

$$|V'| = n \quad \text{e} \quad (\forall a, b \in V')\ a \neq b \Rightarrow (a, b) \in A.$$

CLIQUE: Dados um grafo G não orientado e um inteiro $n \geq 1$,

G tem uma clique de cardinalidade superior ou igual a n?

Instância



$\boxed{n = 4}$

SAT $\longrightarrow$ CLIQUE

SAT: Dada uma fórmula proposicional na forma normal conjuntiva,

$$f = \bigwedge_{1 \leq i \leq k} C_i,$$

f é satisfazível?

CLIQUE: Dados um grafo $G = (V, A)$ não orientado e um inteiro $n \geq 1$, existe um conjunto $V' \subseteq V$ tal que:

$$|V'| \geq n \quad \text{e} \quad (\forall a, b \in V')\; a \neq b \Rightarrow (a, b) \in A\,?$$

$$\begin{array}{ccc} \textbf{SAT} & \longrightarrow & \textbf{CLIQUE} \\ \bigwedge_{1 \leq i \leq k} C_i & \longmapsto & \end{array}$$

SAT $\longrightarrow$ CLIQUE

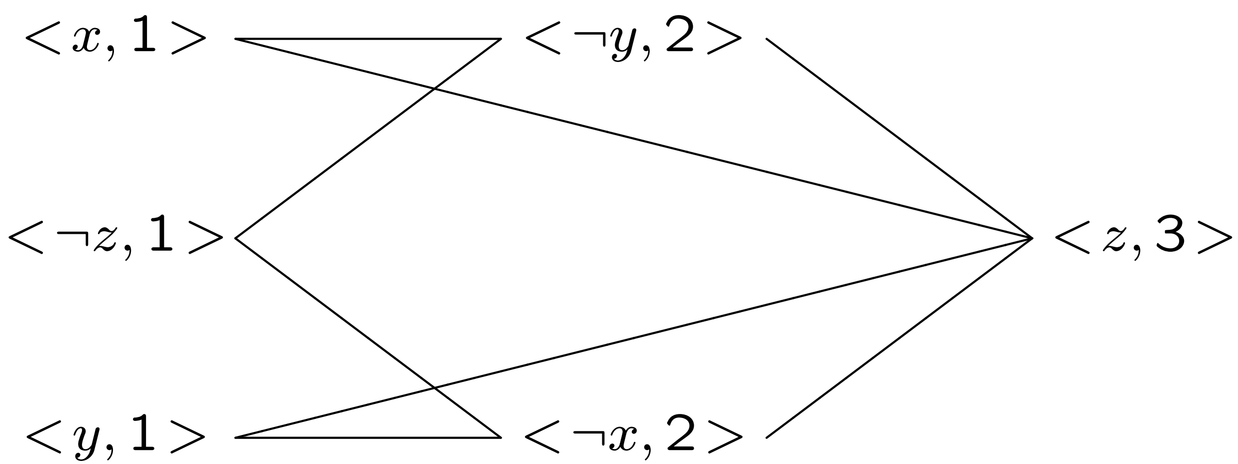
$$\bigwedge_{1\leq i\leq k} C_i \longmapsto ((V, A),\ k)$$

com:

$$\begin{aligned} V &= \{<\alpha, i> \mid \alpha \text{ é um literal de } C_i\} \quad \text{e} \\ A &= \{(<\alpha, i>, <\beta, j>) \mid i \neq j \ \text{ e } \ \alpha \neq \overline{\beta}\}. \end{aligned}$$

Fórmula satisfazível: $(x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge z$.

Grafo com duas cliques de cardinalidade 3:



$$\textbf{SAT} \longrightarrow \textbf{CLIQUE}$$

$$\bigwedge_{1\leq i\leq k} C_i \longmapsto ((V, A),\ k)$$

com:

$$\begin{aligned} V &= \{<\alpha, i> \mid \alpha \text{ é um literal de } C_i\} \quad \text{e} \\ A &= \{(<\alpha, i>, <\beta, j>) \mid i \neq j \ \text{ e } \ \alpha \neq \overline{\beta}\}. \end{aligned}$$

Fórmula não satisfazível:

$$(x \vee y) \wedge (\neg x) \wedge (\neg y).$$

Grafo sem cliques de cardinalidade igual ou superior a 3:

$$\begin{tikzcd}
<x, 1> \arrow[rr, dash] & & <\neg y, 3> \\
<y, 1> \arrow[r, dash] & <\neg x, 2> \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

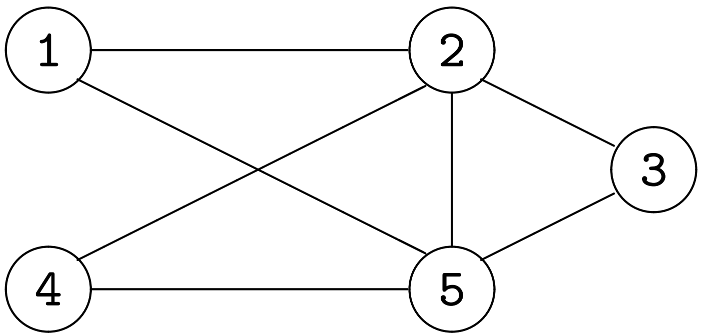
Cobertura de Vértices / *Vertex Cover*

Sejam $G = (V, A)$ um grafo não orientado e $k \geq 1$. Uma **cobertura de vértices de G de cardinalidade k** é um conjunto $V' \subseteq V$ tal que:

$$|V'| = k \quad \text{e} \quad (\forall (a, b) \in A)\ a \in V' \ \text{ ou } \ b \in V'.$$

COBVERT: Dados um grafo G não orientado e um inteiro $k \geq 1$, G tem uma cobertura de vértices de cardinalidade inferior ou igual a k?

Instância



$\boxed{k = 2}$

CLIQUE $\longrightarrow$ COBVERT

CLIQUE: Dados um grafo $G = (V, A)$ não orientado e um inteiro $n \geq 1$, existe um conjunto $V' \subseteq V$ tal que:

$$|V'| \geq n \quad \text{e} \quad (\forall a, b \in V')\; a \neq b \Rightarrow (a, b) \in A\,?$$

COBVERT: Dados um grafo $G = (V, A)$ não orientado e um inteiro $k \geq 1$, existe um conjunto $V' \subseteq V$ tal que:

$$|V'| \leq k \quad \text{e} \quad (\forall (a, b) \in A)\; a \in V' \;\text{ ou }\; b \in V'\,?$$

$$\begin{array}{ccc} \textbf{CLIQUE} & \longrightarrow & \textbf{COBVERT} \\ ((V, A),\; n) & \longmapsto & \end{array}$$

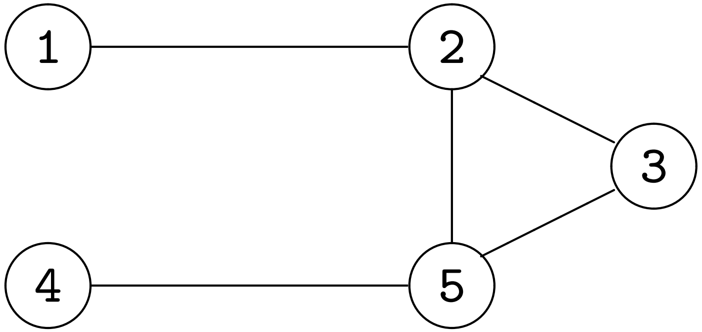
CLIQUE $\longrightarrow$ **COBVERT**

$$((V,A),\ n) \longmapsto ((V,A'),\ \underbrace{|V|-n}_{k})$$

com:

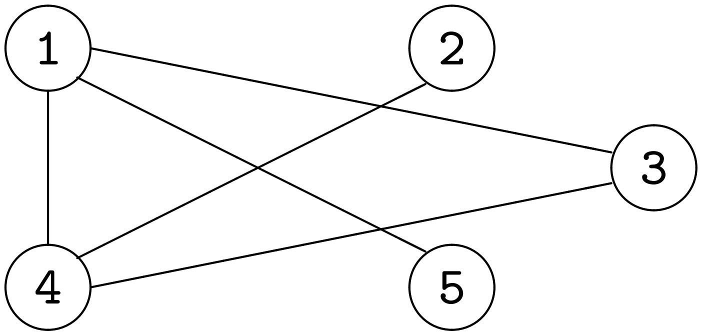
$$A' \ = \ \{(a,b) \in V \times V \mid a \neq b \ \text{ e } \ (a,b) \notin A\}.$$

Grafo com clique de cardinalidade 3: $\{2,3,5\}$.



$\boxed{n = 3}$

Grafo (complementar) com cobertura de vértices de cardin. 2: $\{1,4\}$.



$\boxed{k = 2}$

Cobertura de Conjuntos / *Set Cover*

Sejam D um conjunto finito, $\mathcal{C}$ uma coleção de subconjuntos de D e $n \geq 1$. Uma **cobertura de conjuntos de $\mathcal{C}$ para D de cardinalidade n** é uma coleção $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ tal que:

$$|\mathcal{C}'| = n \quad \text{e} \quad \bigcup_{X \in \mathcal{C}'} X = D.$$

COBCONJ: Dados um conjunto finito D, uma coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de D e um inteiro $n \geq 1$,

$\mathcal{C}$ tem uma cobertura de conjuntos para D
de cardinalidade inferior ou igual a n?

Instâncias

$$(\{1,2,3,4,5,6\}, \quad \{\,\{1,2,3,5\}\,,\,\{2,3,4\}\,,\,\{2,4,6\}\,\}, \quad 2)$$

$$(\{1,2,3,4,5,6\}, \quad \{\,\{1,2,3,5\}\,,\,\{2,3,4\}\,,\,\{2,4,6\}\,\}, \quad 1)$$

COBVERT $\rightarrow$ COBCONJ

COBVERT: Dados um grafo não orientado $G = (V, A)$ e um inteiro $k \geq 1$, existe um conjunto $V' \subseteq V$ tal que:

$$|V'| \leq k \quad \text{e} \quad (\forall (a, b) \in A)\ a \in V' \ \text{ou}\ b \in V'\,?$$

COBCONJ: Dados um conjunto finito D, uma coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de D e um inteiro $n \geq 1$, existe uma coleção $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ tal que:

$$|\mathcal{C}'| \leq n \quad \text{e} \quad \bigcup_{X \in \mathcal{C}'} X = D\,?$$

$$\begin{array}{ccc} \textbf{COBVERT} & \longrightarrow & \textbf{COBCONJ} \\ ((V, A),\ k) & \longmapsto & \end{array}$$

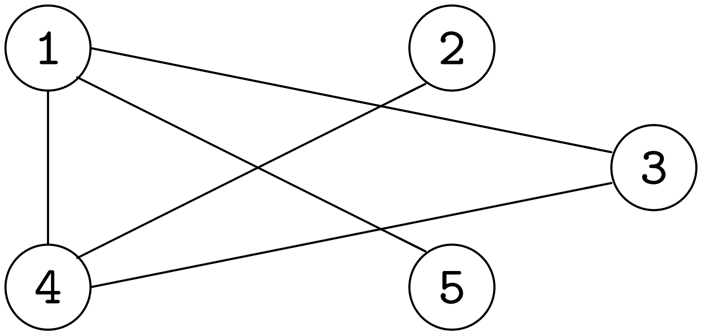
$$\textbf{COBVERT} \longrightarrow \textbf{COBCONJ}$$

$$((V, A),\ k) \longmapsto (A,\ \{S_v \mid v \in V\},\ k)$$

com:

$$S_v = \{(a, b) \in A \mid v = a \text{ ou } v = b\}.$$

Grafo (V, A) com uma cobertura de vértices de cardinalidade 2: $\{1, 4\}$.



$\boxed{k = 2}$

Conjunto $\{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\}$, onde

$$S_1 = \{(1,3),\ (1,4),\ (1,5)\} \qquad S_4 = \{(1,4),\ (2,4),\ (3,4)\}$$
$$S_2 = \{(2,4)\} \qquad S_5 = \{(1,5)\},$$
$$S_3 = \{(1,3),\ (3,4)\}$$

com uma cobertura de conjuntos para A de cardinalidade 2: $\{S_1, S_4\}$.

Partição de Conjunto/ *Set Partition*

PARTCONJ: Dado um conjunto finito X de números positivos, existe um subconjunto $A \subseteq X$ tal que:

$$\sum_{x \in A} x \;=\; \sum_{x \in X \setminus A} x\,?$$

Instâncias

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 10\}$$

Mochila 0-1 / *0-1 Knapsack*

MOCH01: Seja I um conjunto finito de itens. Cada item $i \in I$ tem um peso w_i e um valor v_i, ambos não negativos. Sejam $C \geq 0$ a capacidade da mochila e $V \geq 0$. Existe um subconjunto $S \subseteq I$ tal que:

$$\sum_{i \in S} w_i \leq C \quad \wedge \quad \sum_{i \in S} v_i \geq V \text{ ?}$$

Forma das Instâncias

$$(\quad (w_1, w_2, \ldots), \quad (v_1, v_2, \ldots), \quad C, \quad V \quad)$$

Instâncias

$$(\quad (5, 4, 6, 3), \quad (10, 40, 30, 50), \quad 10, \quad 80 \quad)$$

$$(\quad (5, 4, 6, 3), \quad (10, 40, 30, 50), \quad 10, \quad 100 \quad)$$

PARTCONJ $\rightarrow$ MOCH01

PARTCONJ: Dado um conjunto finito X de números positivos, existe um subconjunto $A \subseteq X$ tal que:

$$\sum_{x \in A} x = \sum_{x \in X \setminus A} x \,?$$

MOCH01: Seja I um conjunto finito de itens. Cada item $i \in I$ tem um peso w_i e um valor v_i, ambos não negativos. Sejam $C \geq 0$ a capacidade da mochila e $V \geq 0$. Existe um subconjunto $S \subseteq I$ tal que:

$$\sum_{i \in S} w_i \leq C \quad \wedge \quad \sum_{i \in S} v_i \geq V \,?$$

$$\textbf{PARTCONJ} \quad \longrightarrow \quad \textbf{MOCH01}$$

$$X \qquad \longmapsto$$

quando a soma dos elementos de X é par

PARTCONJ $\longrightarrow$ **MOCH01**

$$X \longmapsto \left(P_X,\ P_X,\ \tfrac{1}{2}\sum_{x\in X} x,\ \tfrac{1}{2}\sum_{x\in X} x\right)$$

onde:

P_X é uma permutação (qualquer) do conjunto X.

Conjunto X "particionável em dois subconjuntos com igual soma":

$$X = \{1,2,3,4,6,10\} \qquad A = \{1,2,4,6\}$$
$$X \setminus A = \{3,10\}$$

Mochila carregada com peso 13 e valor 13:

Pesos dos itens:	$(1,2,3,4,6,10)$
Valores dos itens:	$(1,2,3,4,6,10)$
Capacidade da mochila:	13
Valor mínimo a transportar:	13
Pesos/valores dos itens inseridos na mochila:	$1,2,4,6$

Conjunto de Ataque / *Hitting Set*

Sejam D um conjunto finito, $\mathcal{C}$ uma coleção de subconjuntos de D e $n \geq 1$. Um **conjunto de ataque de $\mathcal{C}$ de cardinalidade** n é um conjunto $A \subseteq D$ tal que:

$$|A| = n \quad \text{e} \quad (\forall X \in \mathcal{C})\ X \cap A \neq \emptyset.$$

ATAQUE: Dados um conjunto finito D, uma coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de D e um inteiro $n \geq 1$,

$\mathcal{C}$ tem um conjunto de ataque de cardinalidade inferior ou igual a n?

Instância

$$(\{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \quad \{\, \{1,2,3\}\, , \, \{4,5,6\}\, , \, \{2,3,5,7\}\, \}, \quad 2)$$

COBVERT $\longrightarrow$ ATAQUE

COBVERT: Dados um grafo $G = (V, A)$ não orientado e um inteiro $k \geq 1$, existe um conjunto $V' \subseteq V$ tal que:

$$|V'| \leq k \quad \text{e} \quad (\forall (a, b) \in A)\ a \in V' \ \text{ou}\ \ b \in V'\,?$$

ATAQUE: Dados um conjunto finito D, uma coleção $\mathcal{C}$ de subconjuntos de D e um inteiro $n \geq 1$, existe um conjunto $A \subseteq D$ tal que:

$$|A| \leq n \quad \text{e} \quad (\forall X \in C)\ X \cap A \neq \emptyset\,?$$

$$\textbf{COBVERT} \quad \longrightarrow \quad \textbf{ATAQUE}$$

$$((V, A),\ k) \quad \longmapsto$$

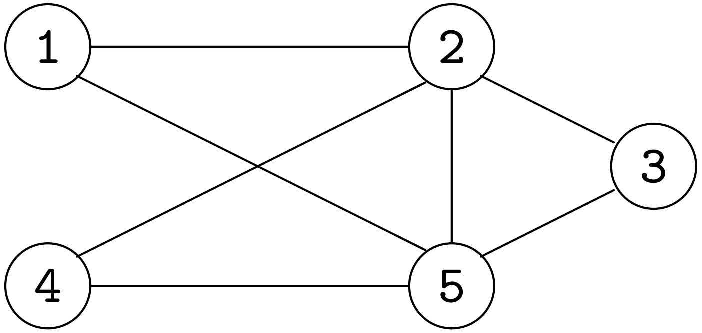
COBVERT $\longrightarrow$ ATAQUE

$$((V, A),\ k) \quad \longmapsto \quad (V,\ A',\ k)$$

com:

$$A' \;=\; \{\{a, b\} \mid (a, b) \in A\}.$$

Grafo com uma cobertura de vértices de cardinalidade 2: $\{2, 5\}$.



$\boxed{k = 2}$

Coleção (de subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$)

$$\{\ \{1, 2\},\ \{1, 5\},\ \{2, 3\},\ \{2, 4\},\ \{2, 5\},\ \{3, 5\},\ \{4, 5\}\ \}$$

com um conjunto de ataque de cardinalidade 2: $\{2, 5\}$.

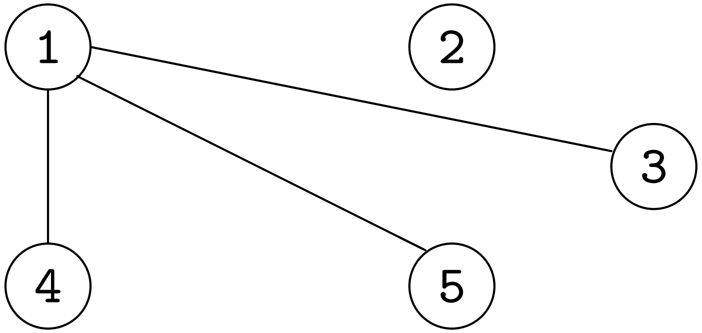
COBVERT $\longrightarrow$ ATAQUE

$$((V, A),\ k) \quad \longmapsto \quad (V,\ A',\ k)$$

com:

$$A' \ = \ \{\{a, b\} \mid (a, b) \in A\}.$$

Grafo com uma cobertura de vértices de cardinalidade 1: $\{1\}$.



$\boxed{k = 1}$

Coleção (de subconjuntos de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$)

$$\{\ \{1, 3\},\ \{1, 4\},\ \{1, 5\}\ \}$$

com um conjunto de ataque de cardinalidade 1: $\{1\}$.