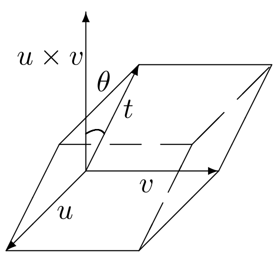
ÁLGEBRA LINEAR
e
GEOMETRIA ANALÍTICA

TESTES E EXAMES (Resolvidos)

$$u = (0, -6, 0), \qquad v = (6, 0, 0), \qquad t = (2, 2, 3)$$



$$volume = (u \times v)|t = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & -6 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}\right) = 108$$

Rosário Fernandes
Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia
UNL

(2010/11)

Índice

Capítulo 1

Testes e Exames de ALGA 2009/10

1.1 PRIMEIRO TESTE DE ALGA 2009/10

Álgebra Linear e Geometria Analítica E

Departamento de Matemática FCT–UNL

1º TESTE – 28 de Novembro de 2009

TESTE A

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:____

Número de caderno: | | | | | | | | | |

Respostas

	A	**B**	**C**	**D**
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X **a opção que considerar adequada.**

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1,25$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,41$ valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 8) é dada por
$$\max\{0, \mathrm{cl_I}\} + \max\{0, \mathrm{cl_{II}}\},$$
onde $\mathrm{cl_I}$ designa a soma das classificações obtidas nos grupos de 1 a 4 e $\mathrm{cl_{II}}$ designa a soma das classificações obtidas nos grupos de 5 a 8.

---

1. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ tem característica

   A 1.
   B 2.
   C 3.
   D 4.

2. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares de coeficientes reais nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,
$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ (\alpha+1)x + y + (\alpha+1)z = 3 \\ (\alpha+1)z = \beta. \end{cases}$$
   Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   A Se $\alpha = -1$ e $\beta = 0$ então o sistema é possível e indeterminado.
   B Se $\alpha \neq -1$ então o sistema é possível e determinado.
   C Se $\alpha = -1$ e $\beta \neq 0$ então o sistema é impossível.
   D Se $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ então o sistema é possível e determinado.

3. Sejam A, B e C matrizes tais que é possível efectuar os produtos AC e ABC. Se A é matriz com 4 colunas e AC é matriz do tipo 2×4, então a matriz B é do tipo

   A 4×4.
   B 4×2.
   C 2×2.
   D 2×4.

Continua na próxima folha

4. Considere as matrizes
$$A=\begin{bmatrix}2&2\\0&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&0\\-3&1\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}1&0\\0&4\end{bmatrix}.$$
Quais são as matrizes elementares e quais é que não são?

   $\boxed{\text{A}}$ A, B, C e D não são matrizes elementares.

   $\boxed{\text{B}}$ A, B e D são matrizes elementares e C não é matriz elementar.

   $\boxed{\text{C}}$ B é matriz elementar e A, C e D não são matrizes elementares.

   $\boxed{\text{D}}$ B, C e D são matrizes elementares e A não é matriz elementar.

5. Considere os subconjuntos de $\mathbb{R}^3$
$$\begin{aligned}T_1&=\{(0,0,0),\ (1,0,0)\}\\ T_2&=\{(a,a+b,2a-b):\ a,\ b\in\mathbb{R}\}\\ T_3&=\{(0,0,0)\}\\ T_4&=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x+y-1=z\}.\end{aligned}$$
Quais os subconjuntos que são subespaços de $\mathbb{R}^3$ e quais é que não o são?

   $\boxed{\text{A}}$ T_1,T_2,T_3,T_4 são subespaços de $\mathbb{R}^3$.

   $\boxed{\text{B}}$ T_1,T_2,T_3 são subespaços de $\mathbb{R}^3$ e T_4 não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

   $\boxed{\text{C}}$ T_2,T_3 são subespaços de $\mathbb{R}^3$ e T_1,T_4 não são subespaços de $\mathbb{R}^3$.

   $\boxed{\text{D}}$ T_3 é subespaço de $\mathbb{R}^3$ e T_1,T_2,T_4 não são subespaços de $\mathbb{R}^3$.

6. Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$,
$$W=<(1,0,1),\ (1,2,3)>,$$
e os vectores de $\mathbb{R}^3$, $u=(1,2,3)$ e $v=(0,1,1)$. Apenas uma das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ Os vectores u e v pertencem a W.

   $\boxed{\text{B}}$ O vector u pertence a W mas o vector v não pertence a W.

   $\boxed{\text{C}}$ O vector v pertence a W mas o vector u não pertence a W.

   $\boxed{\text{D}}$ Os vectores u e v não pertencem a W.

7. Sejam A e B matrizes de ordem 3, invertíveis.

   Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ $\det((2-3)A)=2\det(A)-3\det(A)$.

   $\boxed{\text{B}}$ $\det(4A)=4\det(A)$.

   $\boxed{\text{C}}$ $\det(A^{-1})=(\det(A))^{-1}$.

   $\boxed{\text{D}}$ $\det(AB)=\det(BA)$.

Continua no verso desta folha

8. A matriz adjunta da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz:

   A $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

   B $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

   C $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

   D $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Continua na próxima folha

Álgebra Linear e Geometria Analítica E

Departamento de Matemática FCT–UNL

1º TESTE – 28 de Novembro de 2009

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

9. Considere a seguinte matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que a matriz A é invertível.

(b) Determine a matriz inversa da A.

(c) Usando a alínea anterior, determine a solução do sistema

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ y + 4z = 0 \\ x = 1. \end{cases}$$

Atenção: Se não resolveu a alínea anterior, considere que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(d) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \to (l_2 + l_1)]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$, determine uma matriz elementar E_1 tal que

$$A = E_1 B.$$

Mude de Folha

10. Sejam W um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e $u_1,\ u_2,\ u_3$ vectores de W tais que:

i) o conjunto $\{u_1,\ u_2,\ u_3\}$ é linearmente dependente;

ii) o conjunto $\{u_1 - u_2,\ u_2\}$ é linearmente independente.

Mostre que:

[2.0] (a) O conjunto $\{u_1,\ u_2\}$ é linearmente independente.

[2.0] (b) u_3 é combinação linear de u_1 e u_2.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica E

Departamento de Matemática FCT–UNL

1º TESTE – 28 de Novembro de 2009

Uma resolução

1. B

2. B

3. A

4. D

5. C

6. A

7. B

8. A

9. (a) Sabemos que a matriz A é invertível se, e só se, $|A| \neq 0$.

Ora usando o Teorema de Laplace, através da terceira linha,

$$|A| = 1(-1)^{3+1} \det \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 1 \neq 0.$$

Portanto, A é invertível.

(b) Calculemos a inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_3 \to (\ell_3 - \ell_1)]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_1 \to (\ell_1 + \ell_3)]{\ell_2 \to (\ell_2 - 4\ell_3)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

pelo que a inversa da matriz dada é

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) Sabemos que, se um sistema, na forma matricial, $A_1 X = B_1$ verifica a condição de a matriz simples do sistema ser quadrada e $\det A_1 \neq 0$, então a solução do sistema é

$$X = A_1^{-1} B_1.$$

Neste caso a matriz simples do sistema é a matriz A (quadrada). Pela alínea (a), sabemos que é invertível e por (b), qual é a sua inversa. Então, a solução do sistema é

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ou seja, $x = 1,\ y = 0,\ z = 0$.

(d) Pela teórica sabemos que, se a matriz B é obtida da matriz A, através da transformação elementar $\ell_2 \to (\ell_2 + \ell_1)$, então

$$EA = B,$$

em que E é a matriz elementar que resulta da matriz I_3, efectuando a transformação elementar $\ell_2 \to (\ell_2 + \ell_1)$. Ou seja,

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz E, que é elementar, é invertivel e de $EA = B$ vem que, $E^{-1}(EA) = E^{-1}B$. Donde, usando a propriedade associativa do produto de matrizes, vem que $(E^{-1}E)A = E^{-1}B$. Então, $I_nA = E^{-1}B$, ou seja,

$$A = E^{-1}B.$$

Como

$$E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que é uma matriz elementar, determinámos uma matriz elementar $E_1 = E^{-1}$ tal que $A = E_1B$.

10. (a) Vejamos por definição que $\{u_1,\ u_2\}$ é linearmente independente.
Sejam $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que,

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Então também,

$$\alpha_1 u_1 - \alpha_1 u_2 + \alpha_1 u_2 + \alpha_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Usando a propriedade distributiva temos,

$$\alpha_1(u_1 - u_2) + (\alpha_1 + \alpha_2)u_2 = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Mas, por hipótese, $\{u_1 - u_2,\ u_2\}$ é linearmente independente, donde

$$\alpha_1 = 0,\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0.$$

Consequentemente,

$$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,$$

e $\{u_1,\ u_2\}$ é linearmente independente.

(b) Por hipótese, $\{u_1,\ u_2,\ u_3\}$ é linearmente dependente, ou seja, existem escalares $\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3$, não todos nulos, tais que

$$\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Se $\beta_3 = 0$, então teriamos

$$\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 = 0_{\mathbb{R}^n},$$

com β_1 ou β_2 diferente de zero. Mas isto significava que $\{u_1,\ u_2\}$ era linearmente dependente, o que contrariava a alínea (a). Então, $\beta_3 \neq 0$.

Da igualdade $\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^n}$, temos que

$$\beta_3 u_3 = -\beta_1 u_1 - \beta_2 u_2.$$

Donde,

$$u_3 = -\frac{\beta_1}{\beta_3} u_1 - \frac{\beta_2}{\beta_3} u_2,$$

ou seja, u_3 é combinação linear de $u_1,\ u_2$.

1.2 SEGUNDO TESTE DE ALGA 2009/10

Álgebra Linear e Geometria Analítica E

Departamento de Matemática FCT–UNL

2º TESTE – 16 de Janeiro de 2010

TESTE A

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:____________________________________

Número de caderno: | | | | | | | | | |

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X **a opção que considerar adequada.**

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X **a sua nova opção.**

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um** X **mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1,25$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,41$ valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 8) é dada por

$$\max\{0, \mathrm{cl}\},$$

onde cl designa a soma das classificações obtidas nos grupos de 1 a 8.

Continua no verso desta folha

1. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja matriz canónica é $M_f = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Então, $f(0,1)$ é igual a:

   $\boxed{\text{B}}$ $(3,2)$.
   $\boxed{\text{B}}$ $(3,-1)$.
   $\boxed{\text{C}}$ $(-1,1)$.
   $\boxed{\text{D}}$ $(2,1)$.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear, tal que, $f(x,y) = (2x+y, 3y, 6y)$. Então:

   $\boxed{\text{A}}$ f não é injectiva, mas é sobrejectiva.
   $\boxed{\text{B}}$ f não é injectiva nem é sobrejectiva.
   $\boxed{\text{C}}$ f é injectiva e é sobrejectiva.
   $\boxed{\text{D}}$ f é injectiva, mas não é sobrejectiva.

3. Seja $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. O terno de coordenadas do vector
$$u = 3(0,0,1) + 4(1,1,1) - 5(0,1,1)$$
na base $\mathcal{B}$ é:

   $\boxed{\text{A}}$ $(4,-5,3)$.
   $\boxed{\text{B}}$ $(3,-5,4)$.
   $\boxed{\text{C}}$ $(3,4,-5)$.
   $\boxed{\text{D}}$ $(4,3,-5)$.

4. Seja $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^6$ uma aplicação linear, tal que, $\dim(Nuc\ f) = 1$. Então, $\dim(Im\ f)$ é:

   $\boxed{\text{A}}$ 5.
   $\boxed{\text{B}}$ 3.
   $\boxed{\text{C}}$ 4.
   $\boxed{\text{D}}$ 6.

5. $\boxed{\text{A}}$
   $\boxed{\text{B}}$
   $\boxed{\text{C}}$
   $\boxed{\text{D}}$

Continua na próxima folha

6. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{(1,0),(0,1)\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{(0,1),(1,0)\}$ duas bases de $\mathbb{R}^2$.

   Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, tal que,

$$M(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

   Então, a matriz

$$M(f;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1)$$

   é igual a:

   A $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

   B $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   C $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

   D $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

7. Qual dos seguintes conjuntos é uma base de $\mathbb{R}^3$, que contem o vector $(1,1,0)$?

   A $\{(1,1,0),\ (1,0,0),\ (0,1,0)\}$.

   B $\{(1,1,0),\ (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$.

   C $\{(1,1,0),\ (0,0,1)\}$.

   D $\{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$.

8. Considere o subespaço de $\mathbb{R}_2[x]$,

$$W =< x^2+1,\ x^2+2x+3 >,$$

   e os vectores de $\mathbb{R}_2[x]$,

$$u = x^2+2x+3 \qquad \text{e} \qquad v = x+1.$$

   Apenas uma das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**. Indique qual é.

   A Os vectores u e v pertencem a W.

   B O vector u pertence a W mas o vector v não pertence a W.

   C O vector v pertence a W mas o vector u não pertence a W.

   D Os vectores u e v não pertencem a W.

Continua no verso desta folha

Álgebra Linear e Geometria Analítica E

Departamento de Matemática FCT–UNL

2º TESTE – 16 de Janeiro de 2010

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

9. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

[1.0] (a) Justifique que o polinómio característico de A é $\lambda^2(\lambda - 4)$.

[2.5] (b) Determine uma base do subespaço próprio de A, associado ao valor próprio zero.

(c) Sabendo que $\{(1, 0, 1)\}$ é uma base do subespaço próprio de A, associado ao valor próprio 4,

[1.0] i. mostre que A é diagonalizável.

[1.5] ii. determine uma matriz P^{-1} de ordem 3, invertível, tal que

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mude de Folha

10. Sejam $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear e $\beta \in \mathbb{R}^+$. Considere a aplicação $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, tal que,

$$g(x) = f(x) - \beta x,$$

para todo o $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que:

[2.0] (a) A aplicação g é linear.

[2.0] (b) $Nuc\ g \cap Nuc\ f = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica E

Departamento de Matemática FCT–UNL

2^{o} TESTE – 16 de Janeiro de 2010

Uma resolução

1. C

2. D

3. A

4. B

5.

6. C

7. D

8. A

9. (a) O polinómio característico da matriz A é, por definição, $p_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) =$

$$= \det\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}\right) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & -3 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = \lambda \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -3 \\ -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda((\lambda - 1)(\lambda - 3) - 3) = \lambda(\lambda^2 - 4\lambda) = \lambda^2(\lambda - 4).$$

Donde, o polinómio característico de A é $\lambda^2(\lambda - 4)$.

(b) Vamos calcular o subespaço próprio associado ao valor próprio 0, M_0, ou seja, o subespaço solução do sistema homogéneo

$$(0I_3 - A)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como

$$-A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_1 \to -\ell_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 \to (\ell_3 + \ell_1)]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, $x = -3z$, donde

$M_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -3z\} = \{(-3z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} =< (-3, 0, 1), (0, 1, 0)) > .$

Porque

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 \to (\ell_3 + \frac{1}{3}\ell_1)]{} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$r\left(\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2$, então $\{(-3, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ é linearmente independente. Donde, $\{(-3, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ é uma base de M_0.

(c) i. Sabemos que uma matriz quadrada é diagonalizável se, e só se, a soma das multiplicidades geométricas dos diferentes valores próprios da matriz for igual à sua ordem.

Por definição, $mg(0) = \dim M_0$ e pela teórica sabemos que $1 \leq mg(4) \leq ma(4)$. Atendendo à alínea b), $\dim M_0 = 2$ e atendendo à alínea a), $ma(4) = 1$. Consequentemente,

$$mg(1) + mg(2) = 2 + 1 = 3 = \text{ordem de } A.$$

Então, podemos afirmar que A é diagonalizável.

ii. A matriz P^{-1} tem nas suas colunas os vectores de uma base de cada um dos subespaços próprios associados aos seus valores próprios. Mais, como queremos que

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

na primeira coluna de P^{-1} será um vector da base de M_0, na segunda coluna de P^{-1}, um vector da base de M_4 e na terceira coluna de P^{-1}, um vector da base de M_0. Assim, pela alínea b) e por hipótese,

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. (a) Por definição, g é uma aplicação linear se:

i. $g(x + y) = g(x) + g(y)$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$.

ii. $g(\alpha x) = \alpha g(x)$, para quaisquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

Vejamos se estas duas condições se verificam.

i. Por hipótese,

$$g(x + y) = f(x + y) - \beta(x + y).$$

Atendendo a que f é uma aplicação linear e às propriedades distributiva e comutativa, temos que

$$f(x + y) - \beta(x + y) = f(x) - \beta x + f(y) - \beta y.$$

Mas por definição,

$$f(x) - \beta x + f(y) - \beta y = g(x) + g(y).$$

Portanto,

$$g(x + y) = g(x) + g(y).$$

ii. Por hipótese,

$$g(\alpha x) = f(\alpha x) - \beta(\alpha x).$$

Atendendo a que f é uma aplicação linear e às propriedades associativa, comutativa e distributiva, temos que

$$f(\alpha x) - \beta(\alpha x) = \alpha(f(x) - \beta x).$$

Mas por definição,

$$\alpha(f(x) - \beta x) = \alpha g(x).$$

Portanto,

$$g(\alpha x) = \alpha g(x).$$

Ou seja, g é aplicação linear.

(b) Se $x \in (Nuc\ f \cap Nuc\ g)$, então, por definição,

$$f(x) = 0_{\mathbb{R}^n} \qquad \text{e} \qquad g(x) = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Como, $g(x) = f(x) - \beta x$, temos que,

$$f(x) = 0_{\mathbb{R}^n} \qquad \text{e} \qquad f(x) - \beta x = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Ou seja,

$$f(x) = 0_{\mathbb{R}^n} \qquad \text{e} \qquad f(x) = \beta x.$$

Donde,

$$\beta x = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Por hipótese, $\beta \neq 0$, pelo que

$$\beta^{-1}\beta x = \beta^{-1}0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Consequentemente,

$$x = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Portanto,

$$(Nuc\ f \cap Nuc\ g) \subseteq \{0_{\mathbb{R}^n}\}.$$

Por outro lado, sabemos que sendo f e g aplicações lineares,

$$f(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n} \qquad \text{e} \qquad g(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Portanto,

$$\{0_{\mathbb{R}^n}\} \subseteq (Nuc\ f \cap Nuc\ g).$$

Então,

$$(Nuc\ f \cap Nuc\ g) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}.$$

1.3 EXAME DE ÉPOCA NORMAL DE ALGA 2009/10

Álgebra Linear e Geometria Analítica E

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Época Normal – 29 de Janeiro de 2010

EXAME A

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:____________________________________

Número de caderno: | | | | | | | | | |

Respostas

	A	**B**	**C**	**D**
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,33$ valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 8) é dada por

$$\max\{0, \mathrm{cl}\},$$

onde cl designa a soma das classificações obtidas nos grupos de 1 a 8.

Continua na próxima folha

1. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$ tem característica

   A 1.

   B 2.

   C 3.

   D 4.

2. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares de coeficientes reais nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} (\alpha+2)x + \beta y + 2z = 1 \\ y + 2z = 1 \\ (\beta - 1)z = 0. \end{cases}$$

   Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   A Se $\alpha = -2$ e $\beta = 1$ então o sistema é possível e indeterminado.

   B Se $\alpha \neq -2$ e $\beta = 1$ então o sistema é possível e determinado.

   C Se $\alpha = -2$ e $\beta \neq 1$ então o sistema é impossível.

   D Se $\alpha \neq -2$ e $\beta \neq 1$ então o sistema é possível e determinado.

3. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

   O elemento da posição (2,1) da matriz AB é:

   A 1.

   B -3.

   C 11.

   D -1.

4. Seja A uma matriz de ordem 2 tal que $|A| = 4$. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   A $|-A| = -4$.

   B $|A^T| = 4$.

   C $|A^2| = 16$.

   D $|A^{-1}| = \frac{1}{4}$.

Continua no verso desta folha

5. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja matriz canónica é $M_f = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$. Então, $f(x, y)$, com $x, y \in \mathbb{R}$, é igual a:

   $\boxed{\text{A}}$ $(2x + 3y, 4y)$.

   $\boxed{\text{B}}$ $(5x, 4y)$.

   $\boxed{\text{C}}$ $(2x, 3x + 4y)$.

   $\boxed{\text{D}}$ $(2x, 7y)$.

6. Qual dos seguintes conjuntos é uma base de $\mathbb{R}^3$?

   $\boxed{\text{A}}$ $\{(1, 0, 0),\ (1, 1, 1),\ (-5, -2, -2)\}$.

   $\boxed{\text{B}}$ $\{(1, 0, 1),\ (1, 2, 1)\}$.

   $\boxed{\text{C}}$ $\{(0, 1, 0),\ (1, 0, 1),\ (0, 0, 0)\}$.

   $\boxed{\text{D}}$ $\{(1, 0, 0),\ (1, 1, 0),\ (1, 1, 1)\}$.

7. Seja $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que $\dim(Im\ f) = 3$. Então, $dim\ (Nuc\ f)$ é:

   $\boxed{\text{A}}$ 3.

   $\boxed{\text{B}}$ 2.

   $\boxed{\text{C}}$ 1.

   $\boxed{\text{D}}$ 0.

8. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_1[x]$ tal que

$$f(ax^2 + bx + c) = (a + b - c)x + 3b$$

   para todo o $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$. Então, $f(x^2 - 1)$ é igual a:

   $\boxed{\text{A}}$ $x - 3$.

   $\boxed{\text{B}}$ $2x - 3$.

   $\boxed{\text{C}}$ $2x$.

   $\boxed{\text{D}}$ -3.

Continua na próxima folha

Álgebra Linear e Geometria Analítica E

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Época Normal – 29 de Janeiro de 2010

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

9. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

[1.0] (a) Justifique que a matriz A é invertível.

[1.0] (b) Determine a matriz inversa da matriz A.

[1.0] (c) Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \to (l_1 + 4l_3)]{} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = B$, determine uma matriz elementar E tal que

$$EA = B.$$

10. Sejam $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}' = \{(1,1), (1,0)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(x, y, z) = (3x + y, z),$$

com $x, y, z \in \mathbb{R}$

[1.5] (a) Verifique se a aplicação f é injectiva e se é sobrejectiva.

[1.5] (b) Determine a matriz $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

11. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

[1.0] (a) Justifique que o polinómio característico da matriz A é

$$\lambda^2(\lambda - 4).$$

[1.5] (b) Determine uma base do subespaço próprio, de A, associado ao valor próprio 0.

[1.0] (c) Verifique se A é diagonalizável.

Continua no verso desta folha

12. Sejam A e B matrizes de ordem n tais que:

i) $A^3 = 0_n$ (0_n designa a matriz nula de ordem n);

ii) B é invertível;

iii) $B^{-1}AB = A$.

[1.5] (a) Mostre que a matriz A não é invertível.

[1.0] (b) Mostre que $(AB)^2 A = 0_n$.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica E

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Época Normal – 29 de Janeiro de 2010

Uma resolução

1. C

2. B

3. C

4. A

5. A

6. D

7. C

8. C

9. (a) Sabemos que a matriz A é invertível se, e só se, $|A| \neq 0$.
Ora usando o Teorema de Laplace, através da primeira coluna,

$$|A| = 1(-1)^2 \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \neq 0.$$

Portanto, A é invertível.

(b) Calculemos a inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_2 \leftrightarrow \ell_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_3 \to (\ell_3 - 2\ell_2)]{}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_1 \to (\ell_1 - 2\ell_3)]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right],$$

pelo que a inversa da matriz dada é

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(c) Pela teórica sabemos que, se a matriz B é obtida da matriz A, através da transformação elementar $\ell_1 \to (\ell_1 + 4\ell_3)$, então

$$EA = B,$$

em que E é a matriz elementar que resulta da matriz I_3, efectuando a transformação elementar $\ell_1 \to (\ell_1 + 4\ell_3)$. Ou seja,

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. (a) Sabemos que a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é injectiva se a característica da sua matriz canónica for 3, e é sobrejectiva se a característica da sua matriz canónica for 2.

Porque
$f(1,0,0) = (3,0)$
$f(0,1,0) = (1,0)$
$f(0,0,1) = (0,1)$,
então, a matriz canónica de f (matriz que tem nas suas colunas as coordenadas das imagens dos vectores da base canónica de $\mathbb{R}^3$, através de f) é

$$M_f = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mas esta matriz tem caracteristica 2, logo f não é injectiva mas é sobrejectiva.

(b) Porque a matriz $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$ tem nas suas colunas, as coordenadas, na base $\mathcal{B}'$, das imagens por f dos vectores da base $\mathcal{B}$, e porque
$f(1,1,1) = (4,1) = 1(1,1) + 3(1,0)$
$f(1,1,0) = (4,0) = 0(1,1) + 4(1,0)$
$f(1,0,0) = (3,0) = 0(1,1) + 3(1,0)$,
então,

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

11. (a) O polinómio característico da matriz A é, por definição, $p_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) =$

$$= \det \left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} \lambda-2 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda \det \begin{bmatrix} \lambda-2 & -2 \\ -2 & \lambda-2 \end{bmatrix} = \lambda((\lambda-2)^2 - 4) = \lambda^2(\lambda-4).$$

(b) Vamos calcular o subespaço próprio associado ao valor próprio 0, M_0, ou seja, o subespaço solução do sistema homogéneo

$$(0I_3 - A) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como

$$0I_3 - A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_2 \to (\ell_2 - \ell_1)]{} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_1 \to -\frac{1}{2}\ell_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, $x = -y$, donde

$M_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = -y\} = \{(-y, y, z) : \ y, z \in \mathbb{R}\} =< (-1, 1, 0), (0, 0, 1) > .$

Porque

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_2 \to (\ell_2 + \ell_1)]{} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_2 \leftrightarrow \ell_3]{} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$r\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2$, então $\{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é linearmente independente. Donde, $\{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base de M_0.

(c) Sabemos que uma matriz quadrada é diagonalizável se, e só se, a soma das multiplicidades geométricas dos diferentes valores próprios da matriz for igual à sua ordem.

Por (a), os valores próprios de A são zero e 4.

Por definição, $mg(0) = \dim M_0$ e pela teórica sabemos que $1 \leq mg(4) \leq ma(4)$. Atendendo à alínea b), $\dim M_0 = 2$ e atendendo à alínea a), $ma(4) = 1$. Consequentemente,

$$mg(0) + mg(4) = 2 + 1 = 3 = \text{ordem de } A.$$

Então, podemos afirmar que A é diagonalizável.

12. (a) Por hipótese, $A^3 = 0_n$, então $\det(A^3) = \det(0_n) = 0$.

Sabemos que o determinante de um produto de matrizes quadradas é o produto dos determinantes de cada uma das matrizes, pelo que

$$\det(A^3) = \det(A)^3.$$

Assim,

$$\det(A)^3 = 0.$$

Como o determinante é um número, temos que

$$\det(A) = 0.,$$

ou seja, a matriz A não é invertível.

(b) Por hipótese,

$$B^{-1}AB = A,$$

pelo que multiplicando ambos os membros desta igualdade, à esquerda, por B, temos que

$$AB = BA.$$

Como,

$$(AB)^2 A = (AB)(AB)A,$$

se usarmos a hipótese ($AB = BA$), temos que

$$(AB)(AB)A = (BA)(BA)A.$$

Usando a propriedade associativa temos que

$$(BA)(BA)A = B(AB)AA.$$

Outra vez, usando a hipótese,

$$B(AB)AA = B(BA)AA,$$

donde

$$(AB)^2A = B^2A^3.$$

Mas, $A^3 = 0_n$, então,

$$(AB)^2A = 0_n.$$

1.4 EXAME DE RECURSO DE ALGA 2009/10

Álgebra Linear e Geometria Analítica E

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Recurso – 12 de Fevereiro de 2010

EXAME A

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:____

Número de caderno: | | | | | | | | | |

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,33$ valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 8) é dada por

$$\max\{0, \mathrm{cl}\},$$

onde cl designa a soma das classificações obtidas nos grupos de 1 a 8.

Continua no verso desta folha

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Quais são as matrizes que estão em forma de escada reduzida e quais é que não estão?

$\boxed{\text{A}}$ A, B e C não estão em forma de escada reduzida.

$\boxed{\text{B}}$ A e C estão em forma de escada reduzida e B não está em forma de escada reduzida.

$\boxed{\text{C}}$ A está em forma de escada reduzida e B e C não estão em forma de escada reduzida.

$\boxed{\text{D}}$ A, B e C estão em forma de escada reduzida.

2. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

O elemento da posição (2,1) da matriz $(AB)^T$ é:

$\boxed{\text{A}}$ 1.

$\boxed{\text{B}}$ -3.

$\boxed{\text{C}}$ 11.

$\boxed{\text{D}}$ -1.

3. Considere os subconjuntos de $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} T_1 &= \{(0,0),\ (1,1)\} \\ T_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x + 2y - 3 = 0\} \\ T_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x = 0\}. \end{aligned}$$

Quais os subconjuntos que são subespaços de $\mathbb{R}^2$ e quais é que não o são?

$\boxed{\text{A}}$ T_1, T_2, T_3 são subespaços de $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{\text{B}}$ T_1, T_2 são subespaços de $\mathbb{R}^2$ e T_3 não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{\text{C}}$ T_2, T_3 são subespaços de $\mathbb{R}^2$ e T_1 não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{\text{D}}$ T_3 é subespaço de $\mathbb{R}^2$ e T_1, T_2 não são subespaços de $\mathbb{R}^2$.

Continua na próxima folha

4. Considere os subespaços de $\mathbb{R}^3$,

$$W =< (1,2,3),\ (0,1,1) > \qquad \text{e} \qquad U =< (1,1,2),\ (1,0,1) >$$

e o vector de $\mathbb{R}^3$, $u = (1,3,4)$. Apenas uma das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**. Indique qual é.

A O vector u pertence a W e a U.

B O vector u pertence a W mas u não pertence a U.

C O vector u pertence a U mas u não pertence a W.

D O vector u não pertence a W nem a U.

5. A matriz inversa da matriz $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz

A $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

B $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

C $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

D $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Sejam $\mathcal{B} = \{(1,1),(0,1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(0,1),(1,0)\}$ duas bases de $\mathbb{R}^2$. Então a matriz

$$M(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

é igual a:

C $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

B $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

C $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

D $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Continua no verso desta folha

7. Sejam $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,0)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que

$$M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então $f(3,1)$ é igual a:

- A $(11,1)$.
- B $(12,2)$.
- C $(12,11)$.
- D $(14,12)$.

8. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}_3[x]$ tal que

$f(x+2) = x^2+2, \qquad f(x^2+3x+1) = x^3+x^2, \qquad f(x^2+x-1) = x-2.$

Então, $f(x)$ é igual a:

- A $x^3 - x$.
- B x^2.
- C $2x^3 + x^2$.
- D $x^2 + 1$.

Continua na próxima folha

Álgebra Linear e Geometria Analítica E

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Recurso – 12 de Fevereiro de 2010

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

9. Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$,

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 2z,\ z = 4y\}$$

e os vectores de $\mathbb{R}^3$,

$$v_1 = (1, 0, 0),\ v_2 = (3, 2, 4),\ v_3 = (0, 1, 2).$$

[1.0] (a) Mostre que os vectores $v_1,\ v_2,\ v_3$ são linearmente dependentes.

[1.0] (b) Determine um conjunto de vectores, geradores de W.

10. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

[1.0] (a) Justifique que o polinómio característico de A é $\lambda(\lambda - 2)(\lambda + 2)$.

[1.0] (b) Mostre que o vector $(1, 0, 1)$ é um vector próprio de A.

[1.0] (c) Verifique se A é diagonalizável.

11. Sejam $\mathcal{B} = \{(1, -1), (1, 1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}' = \{(0, 2, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Considere as aplicações lineares $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tais que

$$g(x, y) = (x + y, x - y, x),$$

com $x, y \in \mathbb{R}$ e

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

[1.5] (a) Determine $M_{f \circ g}$.

[1.5] (b) A aplicação f é injectiva? Em caso afirmativo, determine $M_{f^{-1}}$.

[1.5] (c) Determine a matriz $M(g; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Continua no verso desta folha

[1.5] **12.** (a) Mostre que não existe nenhuma aplicação linear e sobrejectiva $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$.

[1.0] (b) É possível uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ ser injectiva? Em caso afirmativo, determine uma aplicação nessas condições.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica E

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Recurso – 12 de Fevereiro de 2010

Uma resolução

1. C

2. D

3. D

4. A

5. B

6. A

7. D

8. A

9. (a) Vejamos se os vectores são linearmente dependentes ou independentes através da característica da matriz cujas colunas são os vectores.

Ora essa matriz é $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$. Vejamos a sua característica.

$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to (l_3 - 2l_2)]{} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Como a característica desta matriz é 2, inferior ao número de vectores, então os vectores são linearmente dependentes.

(b) Por hipótese,

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = 2z, \ z = 4y\} =$$
$$= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = 2z, \ y = \frac{1}{4}z\right\} =$$
$$\left\{\left(2z, \frac{1}{4}z, z\right) : \ z \in \mathbb{R}\right\}.$$

Como

$$\left(2z, \frac{1}{4}z, z\right) = z\left(2, \frac{1}{4}, 1\right),$$

então

$$W = \left\langle \left(2, \frac{1}{4}, 1\right) \right\rangle.$$

Portanto, $\left\{\left(2, \frac{1}{4}, 1\right)\right\}$ é um conjunto de geradores de W.

10. (a) O polinómio característico da matriz A é, por definição, $p_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) =$
$= \det\left(\lambda\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0&0&2\\0&0&0\\2&3&0\end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix}\lambda&0&-2\\0&\lambda&0\\-2&3&\lambda\end{bmatrix} =$
$= \lambda\det\begin{bmatrix}\lambda&-2\\-2&\lambda\end{bmatrix} = \lambda(\lambda^2-4) = \lambda(\lambda-2)(\lambda+2).$

(b) Porque

$$\begin{bmatrix}0&0&2\\0&0&0\\2&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\0\\2\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},$$

então, $(1,0,1)$ é vector próprio da matriz A, associado ao valor próprio 2.

(c) Sabemos que uma matriz quadrada é diagonalizável se, e só se, a soma das multiplicidades geométricas dos diferentes valores próprios da matriz for igual à sua ordem.

Pela alínea a), sabemos que os valores próprios de A são 0, 2 e -2, sendo $ma(0) = ma(2) = ma(-2) = 1$.

Pela teórica sabemos que $1 \leq mg(0) \leq ma(0)$, $1 \leq mg(-2) \leq ma(-2)$ e $1 \leq mg(2) \leq ma(2)$. Atendendo ao que foi dito anteriormente, $mg(0) = mg(2) = mg(-2) = 1$. Consequentemente,

$$mg(0) + mg(2) + mg(-2) = 1 + 1 + 1 = 3 = \text{ordem de } A.$$

Então, podemos afirmar que A é diagonalizável.

11. (a) Sabemos que $M_{fog} = M_f.M_g$. Por hipótese temos M_f. Como,
$g(1,0) = (1,1,1)$
$g(0,1) = (1,-1,0)$,
então, a matriz canónica de g (matriz que tem nas suas colunas as coordenadas das imagens dos vectores da base canónica de $\mathbb{R}^2$, através de g) é

$$M_g = \begin{bmatrix}1&1\\1&-1\\1&0\end{bmatrix}.$$

Assim,

$$M_{fog} = M_f.M_g = \begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\\1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2&1\\1&0\\2&-1\end{bmatrix}.$$

(b) Calculemos a característica da matriz M_f.

$$M_f = \begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&1\\0&1&1\end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_2 \leftrightarrow \ell_3]{} \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Então, $r(M_f) = 3$. Como f é uma aplicação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$, então f é injectiva.

Determinar $M_{f^{-1}}$ é calcular a inversa de M_f.

Porque,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&1&1&0&0\\ 0&0&1&0&1&0\\ 0&1&1&0&0&1 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_2 \leftrightarrow \ell_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&1&1&0&0\\ 0&1&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&1&0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\ell_1 \to (\ell_1-\ell_3)\\ \ell_2 \to (\ell_2-\ell_3)}]{}$$

$$\xrightarrow[\substack{\ell_1 \to (\ell_1-\ell_3)\\ \ell_2 \to (\ell_2-\ell_3)}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&1&-1&0\\ 0&1&0&0&-1&1\\ 0&0&1&0&1&0 \end{array}\right],$$

então

$$M_{f^{-1}} = \begin{bmatrix} 1&-1&0\\ 0&-1&1\\ 0&1&0 \end{bmatrix}$$

(c) Porque a matriz $M(g;\mathcal{B},\mathcal{B}')$ tem nas suas colunas, as coordenadas, na base $\mathcal{B}'$, das imagens por g dos vectores da base $\mathcal{B}$, e porque
$g(1,-1) = (0,2,1) = 1(0,2,1) + 0(0,1,0) + 0(1,0,0)$
$g(1,1) = (2,0,1) = 1(0,2,1) + (-2)(0,1,0) + 2(1,0,0)$
então,

$$M(g;\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1&1\\ 0&-2\\ 0&2 \end{bmatrix}.$$

12. (a) Suponhamos que existe uma aplicação linear $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ que é sobrejectiva. Pelo Teorema das dimensões sabemos que

$$\dim(Nuc\ f) + \dim(Im\ f) = 3.$$

Se f é sobrejectiva, então $\dim(Im\ f) = 4$. Donde,

$$\dim(Nuc\ f) + 4 = 3,$$

ou seja,

$$\dim(Nuc\ f) = -1,$$

o que é impossível por definição de dimensão de um subespaço (número de vectores de uma sua base).

(b) Consideremos a aplicação $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que

$$f(x,y,z) = (x,y,z,0),$$

para todo o $x,y,z \in \mathbb{R}$.
Porque o sistema de equações formado pelas equações $x=0$, $y=0$ e $z=0$ é um sistema de equações lineares homogéneo, f é uma aplicação linear. Por outro lado,

$$Nuc\ f = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ f(x,y,z) = (0,0,0,0)\} =$$
$$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x=0,\ y=0,\ z=0\} = \{(0,0,0)\},$$

então f é aplicação linear.

1.5 EXAME DE ÉPOCA ESPECIAL DE ALGA 2009/10

Álgebra Linear e Geometria Analítica E

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Época Especial – 6 de Setembro de 2010

EXAME A

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:____________________________________

Número de caderno: | | | | | | | | | |

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: +1 valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,33$ valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 8) é dada por

$$\max\{0, \mathrm{cl}\},$$

onde cl designa a soma das classificações obtidas nos grupos de 1 a 8.

Continua na próxima folha

1. Qual dos seguintes conjuntos é o conjunto-solução do sistema

$$\begin{cases} x = 2z \\ z = 3y, \end{cases}$$

com $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$?

$\boxed{\text{A}}$ $\{(2z, y, 3y) :\ y,\ z \in \mathbb{R}\}$.

$\boxed{\text{B}}$ $\{(x, \frac{z}{3}, \frac{x}{2}) :\ x,\ z \in \mathbb{R}\}$.

$\boxed{\text{C}}$ $\{(2z, z, z) :\ z \in \mathbb{R}\}$.

$\boxed{\text{D}}$ $\{(6y, y, 3y) :\ y \in \mathbb{R}\}$.

2. Sejam A e B matrizes tais que é possível efectuar o produto AB. Se A é matriz do tipo 4×2 e AB é matriz do tipo 4×2, então a matriz B é do tipo

$\boxed{\text{A}}$ 2×4.

$\boxed{\text{B}}$ 4×2.

$\boxed{\text{C}}$ 2×2.

$\boxed{\text{D}}$ 4×4.

3. Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$,

$$W =< (1,0,1),\ (0,1,1) > .$$

Qual dos seguintes vectores pertence a W?

$\boxed{\text{A}}$ $(-1, 1, 0)$.

$\boxed{\text{B}}$ $(1, 1, 0)$.

$\boxed{\text{C}}$ $(-1, 0, 1)$.

$\boxed{\text{D}}$ $(0, -1, 1)$.

4. Seja A uma matriz de ordem 3, tal que $|A| = 2$. <u>Apenas</u> uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $|-A| = -|A|$.

$\boxed{\text{B}}$ $|A^T| = |A|$.

$\boxed{\text{C}}$ $|A^2| = |2A|$.

$\boxed{\text{D}}$ $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

Continua no verso desta folha

5. A matriz inversa da matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz

   A $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

   B $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   C $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   D $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

6. Para cada $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ considere o subconjunto de $\mathbb{R}^3$,

$$T = \{(1,1,0), (1,2,\alpha), (1,2,\beta+\gamma)\}.$$

   Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   A Se $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ então, T é linearmente independente.

   B Se $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$ então, T é linearmente independente.

   C Se $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 3$ então, T é linearmente independente.

   D Se $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$ então, T é linearmente independente.

7. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = (x+y, 3y)$. Então:

   A f não é injectiva, mas é sobrejectiva.

   B f não é injectiva nem é sobrejectiva.

   C f é injectiva e é sobrejectiva.

   D f é injectiva, mas não é sobrejectiva.

8. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}_1[x] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(ax+b) = a - b$$

   para todo o $ax + b \in \mathbb{R}_1[x]$. Então, $f(x+3)$ é igual a:

   A 1.

   B 3.

   C -3.

   D -2.

Continua na próxima folha

Álgebra Linear e Geometria Analítica E

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Época Especial – 6 de Setembro de 2010

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

9. Para cada $k \in \mathbb{R}$, considere a matriz de ordem 3,

$$A_k = \begin{bmatrix} 3-k & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & 2 \\ 0 & 1 & 2-k \end{bmatrix}.$$

[1.0] (a) Determine para que valores de k, a matriz A_k é invertível.

[1.5] (b) Para $k = 2$, determine se possível, a matriz inversa de A.

10. Seja $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(x,y,z) = (x-y, x+z),$$

para todo o $x, y, z \in \mathbb{R}$.

[1.0] (a) Determine o núcleo de f.

[1.0] (b) Sem calcular a imagem de f, diga a $\dim(Im\ f)$.

[1.5] (c) Determine a matriz $M(f; \mathcal{B}, b.c._{\mathbb{R}^2})$, em que $b.c._{\mathbb{R}^2}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^2$.

11. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

[1.0] (a) Determine os valores próprios de A.

[1.5] (b) Determine uma base do subespaço próprio, de A, associado ao valor próprio 1.

[1.0] (c) Verifique se A é diagonalizável.

Continua no verso desta folha

12. Seja A uma matriz de ordem n, diagonalizável, tal que:

$$A^2 = A.$$

[1.0] (a) Mostre que $\det(A)$ é 0 ou 1.

[1.5] (b) Mostre que se 0 é o único valor próprio da matriz A, então a matriz A é a matriz nula de ordem n.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica E

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Época Especial – 6 de Setembro de 2010

Uma resolução

1. D

2. C

3. A

4. C

5. B

6. B

7. C

8. D

9. (a) Sabemos que uma matriz quadrada é invertível se, e só se, o seu determinante for diferente de zero.

Fazendo o desenvolvimento do determinante de A_k através da primeira coluna (desenvolvimento de Laplace), obtemos

$$\det A_k = (3-k)\det\begin{bmatrix} 1-k & 2 \\ 1 & 2-k \end{bmatrix} = (3-k)((1-k)(2-k)-2) = (3-k)(3-k)(-k).$$

Então, $\det A_k \neq 0$ se, e só se, $k \neq 3$ e $k \neq 0$. portanto, A_k é invertível se $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$.

(b) Pela alínea anterior, porque $k = 2$, temos que a matriz A_2 é invertível. Calculemos a inversa de $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_3 \to (\ell_3 + \ell_2)]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\ell_3 \to \frac{1}{2}\ell_3 \\ \ell_2 \to -\ell_2}]{}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_2 \to (\ell_2 + 2\ell_3)]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right],$$

pelo que a inversa da matriz dada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

10. (a) Por definição,

$$\begin{aligned}\text{Nuc}f &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : f(x,y,z)=(0,0)\}\\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x-y,x+z)=(0,0)\}\\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-y=0\wedge x+z=0\}\\ &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y=x,\ z=-x\}\\ &= \{(x,x,-x) : x\in\mathbb{R}\}\\ &= <(1,1,-1)>.\end{aligned}$$

(b) Pela alínea anterior, temos que $\text{Nuc}f =<(1,1,-1)>$. Como $(1,1,-1)\neq(0,0,0)$, então $\{(1,1,-1)\}$ é uma base de $\text{Nuc}f$. Assim, $\dim(\text{Nuc}f)=1$.

Pela teórica sabemos que

$$\dim(\text{Nuc}f)+\dim(\text{Im}f)=\dim\mathbb{R}^3=3.$$

Então, $\dim(\text{Im}f)=3-\dim(\text{Nuc}f)=3-1=2$.

(c) Porque a matriz $M(f;\mathcal{B},b.c._{\mathbb{R}^2})$ tem nas suas colunas, as coordenadas, na base canónica de $\mathbb{R}^2$, das imagens por f dos vectores da base $\mathcal{B}$,, e porque

$f(1,1,1)=(0,2)=0(1,0)+2(0,1)$,

$f(0,1,1)=(-1,1)=-1(1,0)+1(0,1)$,

$f(0,0,1)=(0,1)=0(1,0)+1(0,1)$

então,

$$M(f;\mathcal{B},b.c._{\mathbb{R}^2},)=\begin{bmatrix}0&-1&0\\2&1&1\end{bmatrix}.$$

11. (a) Os valores próprios de A são as raízes do polinomio caracteristico. Ora, o polinómio característico da matriz A é, por definição, $p_A(\lambda)=\det(\lambda I_3-A)=$

$$=\det\left(\lambda\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}\right)=\det\begin{bmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-3\end{bmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-3).$$

Assim, os valores próprios de A são o 1 e o 3.

(b) Vamos calcular uma base do subespaço próprio associado ao valor próprio 1, M_1, ou seja, uma base do subespaço solução do sistema homogéneo

$$(1I_3-A)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Como

$$1I_3-A=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&-3\end{bmatrix}\xrightarrow[\ell_3\leftrightarrow\ell_2]{}\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&-3\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{\ell_1\to-\ell_1\\ \ell_3\to-\frac{1}{3}\ell_2}]{}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Então, $y=0$ e $z=0$, donde

$$M_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ y=0,\ z=0\}=\{(x,0,0):\ x\in\mathbb{R}\}=<(1,0,0)>.$$

Como $(1,0,0)\neq(0,0,0)$ então $\{(1,0,0)\}$ é uma base de M_1.

(c) Sabemos que uma matriz quadrada é diagonalizável se, e só se, a soma das multiplicidades geométricas dos diferentes valores próprios da matriz for igual à sua ordem.

Pela alínea anterior, $mg(1) = dim(M_1) = 1$. Porque $1 \leq mg(3) \leq ma(3)$ e pela alínea (a), $ma(3) = 1$, então $mg(3) = 1$. Assim,

$$mg(1) + mg(3) = 1 + 1 = 2 \neq \text{ ordem de } A.$$

Portanto, A não é diagonalizável.

12. (a) Por hipótese, $A^2 = A$, então, $\det(A^2) = \det(A)$.

Como o determinante de um produto de matrizes é igual ao produto dos determinantes das matrizes, então,

$$(\det A)^2 = \det A.$$

Mas o determinante de uma matriz é um número, logo,

$$\det A = 0 \qquad \text{ou} \qquad \det A = 1.$$

(b) Se 0 é o único valor próprio de A e A é uma matriz diagonalizável, então A é semelhante à matriz nula. Isto significa que existe uma matriz P de ordem n, invertível, tal que

$$P^{-1}AP = 0_n,$$

em que 0_n é a matriz nula de ordem n.

Mas então,

$$P(P^{-1}AP)P^{-1} = P0_nP^{-1}.$$

Usando a propriedade associativa e o facto do produto de uma matriz pela matriz nula ser a matriz nula, obtemos que

$$(PP^{-1})A(PP^{-1}) = 0_n.$$

Como $PP^{-1} = I_n$ e o produto da matriz identidade por A é A, temos que

$$A = 0_n.$$

Capítulo 2

Testes e Exames de ALGA 2008/09

2.1 PRIMEIRO TESTE DE ALGA 2008/09

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

1º TESTE – 15 de Novembro de 2008

TESTE A

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:__________________________________

Número de caderno: | | | | | | | | | |

Respostas

	A	**B**	**C**	**D**
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				
9.				
10.				

Continua no verso desta folha

Respostas

	A	B	C	D
11.				
12.				
13.				
14.				
15.				
16.				

Atenção

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1,25$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,41$ valores.**

4 - A classificação é dada por

$$\max\{0, \mathrm{cl_I}\} + \max\{0, \mathrm{cl_{II}}\} + \max\{0, \mathrm{cl_{III}}\},$$

onde $\mathrm{cl_I}$ designa a soma das classificações obtidas nos grupos de 1 a 5, $\mathrm{cl_{II}}$ designa a soma das classificações obtidas nos grupos de 6 a 12 e $\mathrm{cl_{III}}$ designa a soma das classificações obtidas nos grupos de 13 a 16.

---

1. O sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y e z e coeficientes reais

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 4x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

é um sistema

A possível e indeterminado com grau de indeterminação igual a 1.

B possível e determinado.

C possível e indeterminado com grau de indeterminação igual a 2.

D impossível.

Continua na próxima folha

2. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quais são as matrizes que estão em forma de escada reduzida e quais é que não estão?

[A] A, B e C não estão em forma de escada reduzida.

[B] A e C estão em forma de escada reduzida e B não está em forma de escada reduzida.

[C] B está em forma de escada reduzida e A e C não estão em forma de escada reduzida.

[D] A, B e C estão em forma de escada reduzida.

3. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ tem característica

[A] 1.

[B] 2.

[C] 3.

[D] 4.

4. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares de coeficientes reais nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ z = 2 \\ (\alpha^2 - 4)z = \alpha - 2. \end{cases}$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

[A] Se $\alpha = 2$ então o sistema é possível e indeterminado.

[B] Se $\alpha \neq -2$, $\alpha \neq 2$ e $\alpha \neq -\frac{3}{2}$ então o sistema é possível e determinado.

[C] Se $\alpha = -\frac{3}{2}$ então o sistema é possível e indeterminado.

[D] Se $\alpha = -2$ então o sistema é impossível.

Continua no verso desta folha

5. Sejam A a matriz simples de um sistema de equações lineares, B a matriz dos termos independentes do sistema e X a matriz coluna das incógnitas do sistema, tal que A é matriz do tipo 3×2.

   Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   A O sistema $AX = B$ nunca é possível e determinado.
   B $r(A) \leq 2$.
   C Se $r([A|B]) = 3$, então o sistema $AX = B$ é impossível.
   D O sistema $AX = B$ tem 3 equações lineares e 2 incógnitas.

6. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$.

   O elemento da posição (1,2) da matriz AB é:

   A $(-1) \times 1 + 6 \times 2$.
   B $5 \times 1 + 6 \times 2$.
   C $(-1) \times 1 + 6 \times 4$.
   D $5 \times 1 + 6 \times 4$.

7. Se A é matriz do tipo 4×4 com a 3^a linha nula e B é matriz do tipo 4×4, então a matriz AB tem necessariamente

   A a 4^a linha nula.
   B a 3^a coluna nula.
   C a 3^a linha nula.
   D a 4^a coluna nula.

8. A matriz inversa da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz

   A $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   B $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   C $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   D $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Continua na próxima folha

9. A matriz elementar $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ resultou de aplicarmos à matriz I_3 a transformação elementar:

   A $l_3 \to l_3 + 2l_2$.
   B $l_3 \to l_3 - 2l_2$.
   C $l_2 \to l_2 + 2l_3$.
   D $l_2 \to l_2 - 2l_3$.

10. Sejam A e B matrizes tais que é possível efectuar o produto AB. Se A é matriz do tipo 4×5 e AB é matriz do tipo 4×5, então a matriz B é do tipo

   A 4×4.
   B 4×5.
   C 5×5.
   D 5×4.

11. Seja A uma matriz de ordem n, que não é simétrica.

   Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   A $A^T A$ é simétrica.
   B AA^T é simétrica.
   C $A + A^T$ é simétrica.
   D $A - A^T$ é simétrica.

12. Seja A uma matriz do tipo 3×3. Se após efectuarmos as seguintes transformações elementares: substituição da 2^a linha de A pela soma da 2^a com a 1^a linha; seguida da troca da 1^a com a 2^a linha, obtivermos a matriz I_3, então

   A $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   B $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   C $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   D $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Continua no verso desta folha

13. Considere os subconjuntos de $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} T_1 &= \{(a+1,a):\ a\in\mathbb{R}\} \\ T_2 &= \{(a,b)\in\mathbb{R}^2:\ b=-2a\} \\ T_3 &= \{(0,1),\ (0,0)\} \\ T_4 &= \{(a,b)\in\mathbb{R}^2:\ a=5b+1\}. \end{aligned}$$

Quais os subconjuntos que são subespaços de $\mathbb{R}^2$ e quais é que não o são?

A T_1, T_2, T_4 são subespaços de $\mathbb{R}^2$ e T_3 não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

B T_1, T_2, T_3, T_4 são subespaços de $\mathbb{R}^2$.

C T_2 é subespaço de $\mathbb{R}^2$ e T_1, T_3, T_4 não são subespaços de $\mathbb{R}^2$.

D T_2, T_4 são subespaços de $\mathbb{R}^2$ e T_1, T_3 não são subespaços de $\mathbb{R}^2$.

14. Considere os subespaços de $\mathbb{R}^3$,

$$W_1 =< (5,0,0),\ (0,2,0) >,$$

$$W_2 =< (5,2,0),\ (1,1,0) > .$$

O vector $v=(5,2,0)$

A pertence a W_1 e não pertence a W_2.

B pertence a W_2 e não pertence a W_1.

C pertence a W_1 e a W_2.

D não pertence a W_1 nem a W_2.

15. Considere os subconjuntos de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(1,1,0),\ (0,1,1),\ (1,0,-1)\} \\ S_2 &= \{(0,1,0),\ (0,0,1),\ (0,0,0)\} \\ S_3 &= \{(1,0,0),\ (0,1,0)\}. \end{aligned}$$

Quais os subconjuntos que são linearmente independentes e quais é que são linearmente dependentes?

A $S_1,\ S_2$ e S_3 são linearmente independentes.

B $S_1,\ S_3$ são linearmente independentes e S_2 é linearmente dependente.

C S_3 é linearmente independente e $S_1,\ S_2$ são linearmente dependentes.

D $S_1,\ S_2$ e S_3 são linearmente dependentes.

Continua na próxima folha

16. O subespaço de $\mathbb{R}^4$

$$W = \{(2a - b, a, 2c, a);\ a,\ b,\ c \in \mathbb{R}\}$$

é igual ao subespaço

$\boxed{\text{A}}$ $< (1,0,0,0),\ (0,1,0,0),\ (0,0,2,0),\ (0,0,0,1) >$.

$\boxed{\text{B}}$ $< (2,1,0,1),\ (-1,0,0,0),\ (0,0,2,0) >$.

$\boxed{\text{C}}$ $< (1,1,2,1) >$.

$\boxed{\text{D}}$ $< (1,0,2,0),\ (0,1,0,1) >$.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

1º TESTE – 15 de Novembro de 2008

Uma resolução

1. D

2. C

3. B

4. B

5. A

6. B

7. C

8. D

9. D

10. C

11. D

12. C

13. C

14. C

15. C

16. B

1. A matriz ampliada do sistema é
$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right].$$
Resolvamos este sistema.
$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \to (l_2 - 2l_1)]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$
Como $r(A) = 1 < 2 = r([A|B])$, então o sistema é impossível. Resposta D.

2. Uma matriz está em forma de escada resduzida se

   (a) Se a matriz tiver uma linha nula, abaixo dessa linha só há linhas nulas.

(b) Se tiver duas linhas não nulas, então o pivot da linha inferior está numa coluna mais à direita do que o pivot da linha superior.

(c) Se o pivot de cada linha não nula é 1.

(d) Se na coluna em que está um pivot, além dele, as outras entradas são iguais a zero.

Assim, B está em forma de escada reduzida e A, C não estão em forma de escada reduzida. Resposta C.

3. Para calcular a característica da matriz, temos que obter dela uma sua forma de escada.
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to (l_3 + \frac{1}{4} l_2)]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
Pelo que a caracteristica da matriz (número de linhas não nulas de uma sua matriz em forma de escada) é 2. Resposta B.

4. Vamos fazer a discussão do sistema, usando a matriz ampliada do sistema, $[A|B]$.
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & (\alpha^2-4) & (\alpha-2) \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 \to (l_3 - (\alpha^2-4) l_2)]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & (\alpha+\frac{3}{2})(\alpha-2) \end{array}\right]$$

(a) Se $\alpha = 2$ então $r(A) = r([A|B]) = 2 < 3 =$ número de incógnitas, então o sistema é possível e indeterminado.

(b) Se $\alpha = -\frac{3}{2}$ então $r(A) = r([A|B]) = 2 < 3 =$ número de incógnitas, então o sistema é possível e indeterminado.

(c) Se $\alpha \neq -\frac{3}{2}$ e $\alpha \neq 2$ então $r(A) = 2 < 3 = r([A|B])$, então o sistema é impossível.

Pelo que a resposta A é (a), a resposta C é (b), a resposta D está em (c) e a resposta B está contida em (c), pelo que a falsa é a resposta B.

5. Se A é uma matriz de tipo 3×2, então o sistema $AX = B$ tem 3 equações lineares e 2 incógnitas. Mais, $r(A) \leq 2$, pelo que, se $r([A|B]) = 3$ então o sistema é impossível.
O sistema $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$ é tal que a matriz simples do sistema é de tipo 3×2 e tem a solução $x = y = 0$. Resposta falsa é a A.

6. Por definição,
$$(AB)_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 1 \times 5 + 2 \times 6.$$
Resposta B.

7. Se A tem a 3^a linha nula, então

$$a_{31} = a_{32} = a_{33} = a_{34} = 0.$$

Por definição, o elemento que ocupa a coluna i da 3^a linha de AB é

$$(AB)_{3i} = a_{31}b_{1i} + a_{32}b_{2i} + a_{33}b_{3i} + a_{34}b_{4i} = 0.$$

Portanto a 3^a linha de AB é nula. Resposta C.

8. Calculemos a inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \to -\frac{1}{3}l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, pelo que a inversa da matriz dada é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resposta D.

9. Porque $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \to (l_2 - 2l_3)]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Resposta D.

10. Se A é uma matriz de tipo 4×5, para podermos efectuar o produto AB, B tem que ter 5 linhas. Por outro lado, se AB é uma matriz de tipo 4×5, então B tem que ter tantas colunas quantas as de AB. Portanto, B tem 5 colunas. Assim, B é matriz de tipo 5×5. Resposta C.

11. Para uma matriz B ser simétrica, $B^T = B$. Ora

$$(A - A^T)^T = A^T - A.$$

Para que

$$(A - A^T)^T = A - A^T,$$

terá que

$$A - A^T = A^T - A,$$

ou seja, $A^T = A$. Como A não é simétrica, então a resposta falsa é D.

12. Façamos as transformações elementares ao contrário, até obtermos a matriz A.

$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xleftarrow[l_2 \to (l_2 + l_1)]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$. Resposta C.

13. T_1 não é subespaço porque $(0,0)$ não lhe pertence.

    T_2 é subespaço porque é o conjunto-solução do sistema homogéneo
    $$2a+b=0.$$

    T_3 não é subespaço porque $(0,1)$ é elemento de T_3 mas $(-1)(0,1)=(0,-1)$ não está em T_3.

    T_4 não é subespaço porque $(0,0)$ não lhe pertence.

    Então a resposta é C.

14. $(5,2,0)\in W_1$ porque
    $$(5,2,0)=1(5,0,0)+1(0,2,0),$$
    $(5,2,0)\in W_2$ porque
    $$(5,2,0)=1(5,2,0)+0(1,1,0).$$
    Resposta C.

15. Consideremos a matriz que tem como colunas os vectores de S_1 e calculemos a sua característica.
    $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[l_2\to(l_2-l_1)]{}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[l_3\to(l_3-l_2)]{}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$
    Então $r(A)=2<3=$ número de vectores de S_1. Portanto S_1 é linearmente dependente.

    S_2 é linearmente dependente porque contem o vector nulo.

    Consideremos a matriz que tem como colunas os vectores de S_3 e calculemos a sua característica.
    $B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}.$
    Então $r(B)=2=$ número de vectores de S_3. Portanto S_3 é linearmente independente.

    Resposta C.

16. Um vector genérico de W pode ser escrito como
    $$(2a-b,a,2c,a)=(2a,a,0,a)+(-b,0,0,0)+(0,0,2c,0)=$$
    $$=a(2,1,0,1)+b(-1,0,0,0)+c(0,0,2,0).$$
    Então, $W=<(2,1,0,1),(-1,0,0,0),(0,0,2,0)>$. Resposta B.

2.2 SEGUNDO TESTE DE ALGA 2008/09

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

2º TESTE – 13 de Dezembro de 2008

TESTE A

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:____________________________________

Número de caderno:

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1,25$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,41$ valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 8) é dada por

$$\max\{0, \mathrm{cl}_{\mathrm{I}}\} + \max\{0, \mathrm{cl}_{\mathrm{II}}\},$$

onde cl_{I} designa a soma das classificações obtidas nos grupos de 1 a 4 e $\mathrm{cl}_{\mathrm{II}}$ designa a soma das classificações obtidas nos grupos de 5 a 8.

Continua na próxima folha

1. Sejam A e B matrizes de ordem 3, invertíveis, tais que $A \xrightarrow[l_2 \to (l_2 - 2l_1)]{} B$. Então

   $\boxed{\text{A}}$ $\det A = \det B$.
   $\boxed{\text{B}}$ $\det A = 2 \det B$.
   $\boxed{\text{C}}$ $\det A = -2 \det B$.
   $\boxed{\text{D}}$ $\det A = -\frac{1}{2} \det B$.

2. Seja A uma matriz de ordem 2 tal que $adj\ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $\det A = -1$. Então A^{-1} é a matriz:

   $\boxed{\text{A}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.
   $\boxed{\text{B}}$ $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.
   $\boxed{\text{C}}$ $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.
   $\boxed{\text{D}}$ $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$.

3. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} k & 0 & (2k+1) \\ 3 & (k-1) & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ com $k \in \mathbb{R}$. A matriz A não é invertível para:

   $\boxed{\text{A}}$ $k = -1$.
   $\boxed{\text{B}}$ $k = 0$.
   $\boxed{\text{C}}$ $k = -\frac{1}{2}$.
   $\boxed{\text{D}}$ $k = 1$.

4. O polinómio característico da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ é:

   $\boxed{\text{A}}$ $(\lambda - 1)(\lambda - 3)$.
   $\boxed{\text{B}}$ $(\lambda - 1)(\lambda - 3) + 2$.
   $\boxed{\text{C}}$ $(\lambda + 1)(\lambda + 3) - (\lambda - 1)(\lambda + 2)$.
   $\boxed{\text{D}}$ $(\lambda - 1)(\lambda - 3) - (\lambda + 1)(\lambda - 2)$.

Continua no verso desta folha

5. Para cada $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ considere a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(x, y) = (\gamma x, (\alpha - 2)x^2, x + y - \beta)$$

para todo o $x, y \in \mathbb{R}$.
Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

[A] Se $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$ então, f não é aplicação linear.
[B] Se $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$ então, f não é aplicação linear.
[C] Se $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$ então, f não é aplicação linear.
[D] Se $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 0$ então, f não é aplicação linear.

6. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear tal que $Nuc\ f = \{(0, 0, 0)\}$. Então:

[A] f não é injectiva, mas é sobrejectiva.
[B] f não é injectiva nem é sobrejectiva.
[C] f é injectiva e é sobrejectiva.
[D] f é injectiva, mas não é sobrejectiva.

7. Considere a aplicação linear invertível $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(x, y) = (x + y, y)$$

para todo o $x, y \in \mathbb{R}$. Então f^{-1} é a aplicação linear tal que

[A] $f^{-1}(x, y) = (x + y, y)$ para todo o $x, y \in \mathbb{R}$.
[B] $f^{-1}(x, y) = (x - y, y)$ para todo o $x, y \in \mathbb{R}$.
[C] $f^{-1}(x, y) = (x, -x + y)$ para todo o $x, y \in \mathbb{R}$.
[D] $f^{-1}(x, y) = (x, x + y)$ para todo o $x, y \in \mathbb{R}$.

8. [A]
[B]
[C] .
[D]

Continua na próxima folha

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

2^{o} TESTE – 13 de Dezembro de 2008

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

9. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

[1.0] (a) Calcule $f(0,1,0)$.

[1.0] (b) Determine $f(x,y,z)$, para todo o $x, y, z \in \mathbb{R}$.

[1.5] (c) Determine a imagem de f.

[1.5] (d) Determine o núcleo de f.

[1.0] (e) A aplicação f é injectiva?

Mude de Folha

10. Seja A uma matriz de ordem n tal que

$$(A + 2I_n) = (2I_n + A)A^T.$$

Mostre que:

[2.0] (a) Se X é um vector próprio de A^T associado ao valor próprio 5, então X é vector póprio de A. Qual o valor próprio correspondente?

[2.0] (b) Se $\det A = -2$, então -2 é valor próprio de A.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

2º TESTE – 13 de Dezembro de 2008

Uma resolução

1. A

2. D

3. A

4. B

5. A

6. C

7. B

8.

9. (a) Atendendo à definição de matriz canónica, M_f, de uma aplicação linear, $f(0,1,0)$ é a segunda coluna de M_f. Assim,

$$f(0,1,0) = (2,0).$$

(b) Atendendo à definição de matriz canónica, M_f, de uma aplicação linear,

$$[\, f(x,y,z)\,] = M_f \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y \\ -x-2z \end{bmatrix}.$$

Então, $f(x,y,z) = (x+2y, -x-2z)$.

(c) Como $\mathbb{R}^3 =< (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1) >$, então

$$Im\ f =< f(1,0,0),\ f(0,1,0),\ f(0,0,1) >=< (1,-1),\ (2,0),\ (0,-2) > .$$

(d) Por definição,

$$\text{Nuc}f = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : M_f \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Vejamos as soluções do sistema homogéneo $M_f \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Ora,

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \to (l_2+l_1)]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2 \to (\frac{1}{2} l_2)]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \to (l_1 - 2l_2)]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Então, $\begin{cases} x = -2z \\ y = z \end{cases}$.

Pelo que,

$$\begin{aligned}\text{Nuc}f &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=-2z,\ y=z\}\\ &= \{(-2z,z,z):\ z\in\mathbb{R}\}\\ &= <(-2,1,1)>\end{aligned}$$

(e) Sabemos que uma aplicação linear é injectiva se, e só se, o seu núcleo for igual ao vector nulo. Pela alínea anterior, $Nuc\ f \neq \{(0,0,0)\}$. Assim sendo, f não é injectiva.

10. (a) Por definição, se X é vector próprio de A^T associado ao valor próprio 5, então

$$A^T X = 5X.$$

Assim, como $(A+2I_n) = (2I_n + A)A^T$, temos que

$$(A+2I_n)X = (2I_n+A)A^T X.$$

Usando a propriedade distributiva e o facto de X ser vector próprio de A^T,

$$AX + 2X = (2I_n + A)5X.$$

Usando a propriedade distributiva,

$$AX + 2X = 10X + 5AX.$$

Mas isto implica que

$$4AX = -8X.$$

Donde,

$$AX = -2X.$$

Ou seja, X é vector próprio de A associado ao valor próprio -2.

(b) Porque $(A+2I_n) = (2I_n + A)A^T$, então

$$\det(A+2I_n) = \det((2I_n+A)A^T).$$

Como o determinante de um produto de matrizes quadradas é o produto dos determinantes das matrizes, vem que

$$\det(A+2I_n) = \det(2I_n+A)\det(A^T).$$

Mas $\det(A^T) = \det A$, donde

$$\det(A+2I_n) = \det(2I_n+A)\det A.$$

Por hipótese, $\det A = -2$, pelo que

$$\det(A+2I_n) = -2\det(2I_n+A).$$

Ou seja,

$$\det(2I_n + A) = -2\det(2I_n + A).$$

Mas isto implica que

$$-3\det(2I_n + A) = 0.$$

Porque, se B é uma matriz de ordem n, $\det(-B) = (-1)^n \det B$, então

$$(-3)(-1)^n \det((-2)I_n - A) = 0.$$

Ou seja,

$$p_A(-2) = \det((-2)I_n - A) = 0,$$

isto é, (-2) é raíz do polinómio característico de A. Portanto, (-2) é valor próprio de A.

2.3 TERCEIRO TESTE DE ALGA 2008/09

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

3º TESTE – 14 de Janeiro de 2009

TESTE A

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:______________________________________

Número de caderno: | | | | | | | | | |

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1,25$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,41$ valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 8) é dada por
$$\max\{0, \mathrm{cl_I}\} + \max\{0, \mathrm{cl_{II}}\},$$
onde $\mathrm{cl_I}$ designa a soma das classificações obtidas nos grupos de 1 a 4 e $\mathrm{cl_{II}}$ designa a soma das classificações obtidas nos grupos de 5 a 8.

Continua no verso desta folha

1. Para cada $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ considere o conjunto de $\mathbb{R}^3$

$$S = \{(1,0,0),(1,2,0),(5,2a+2c,a-2b)\}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Se $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$, então S é uma base de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{B}}$ Se $a = 0$, $b = 2$, $c = 1$, então S é uma base de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{C}}$ Se $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$, então S é uma base de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{D}}$ Se $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$, então S é uma base de $\mathbb{R}^3$.

2. Seja $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,5,4),(0,0,6)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. O terno de coordenadas do vector

$$u = 2(0,5,4) - 3(0,0,6) + 1(1,0,1)$$

na base $\mathcal{B}$ é:

$\boxed{\text{A}}$ $(2,-3,1)$.

$\boxed{\text{B}}$ $(-3,1,2)$.

$\boxed{\text{C}}$ $(1,2,-3)$.

$\boxed{\text{D}}$ $(2,1,-3)$.

3. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f(x,y) = (x+y, x-y)$ para todo o $x, y \in \mathbb{R}$. Sejam $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,-1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(2,0),(0,2)\}$ duas bases de $\mathbb{R}^2$. Então a matriz

$$M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')$$

é igual a:

$\boxed{\text{A}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{B}}$ $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{C}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{D}}$ $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

Continua na próxima folha

4. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ uma aplicação linear injectiva. Então, $dim\ (Im\ f)$ é:

   $\boxed{\text{A}}$ 2.

   $\boxed{\text{B}}$ 3.

   $\boxed{\text{C}}$ 4.

   $\boxed{\text{D}}$ 1.

5. $\boxed{\text{A}}$

   $\boxed{\text{B}}$

   $\boxed{\text{C}}$

   $\boxed{\text{D}}$

6. $\boxed{\text{A}}$

   $\boxed{\text{B}}$

   $\boxed{\text{C}}$

   $\boxed{\text{D}}$

Continua no verso desta folha

7. Considere o subespaço de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$T = \left\langle \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \right\rangle,$$

no qual

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $T = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \right\rangle.$

$\boxed{\text{B}}$ $T = \left\langle \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \right\rangle.$

$\boxed{\text{C}}$ $T = \left\langle \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \right\rangle.$

$\boxed{\text{D}}$ $T = \left\langle \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right\rangle.$

8. O subespaço de $\mathbb{R}_2[x]$,

$$F = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x] : \; 2a + b = 0\},$$

é igual ao subespaço:

$\boxed{\text{A}}$ $< x^2, \; x, \; 1 > .$

$\boxed{\text{B}}$ $< x^2 - 2x > .$

$\boxed{\text{C}}$ $< x^2, \; 1 > .$

$\boxed{\text{D}}$ $< x^2 - 2x, \; 1 > .$

Continua no verso desta folha

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

3º TESTE – 14 de Janeiro de 2009

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

9. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

[1.0] (a) Indique os valores próprios de A.

[2.5] (b) Determine uma base para cada um dos subespaços próprios de A.

[1.0] (c) Mostre que A é diagonalizável.

[1.5] (d) Determine uma matriz P^{-1} de ordem 3, invertível, tal que

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mude de Folha

10. Sejam $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ duas bases de $\mathbb{R}^n$.

[2.0] (a) Usando matrizes mudança de base, descreva a relação entre as matrizes

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') \qquad e \qquad M_f$$

em que M_f designa a matriz canónica da aplicação f.

[2.0] (b) Mostre que se a aplicação f é invertível, então

$$M(f^{-1}; \mathcal{B}', \mathcal{B}) = (M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'))^{-1}.$$

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

3º TESTE – 14 de Janeiro de 2009

Uma resolução

1. C

2. C

3. A

4. B

5.

6.

7. D

8. D

9. (a) O polinómio característico da matriz A é, por definição, $p_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) =$
$= \det\left(\lambda\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&1&1\end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix}\lambda-1&-1&0\\0&\lambda-2&0\\0&-1&\lambda-1\end{bmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-2).$
Donde, os valores próprios da matriz A são os reais

$$1,\ 2.$$

(b) Vamos calcular o subespaço próprio associado ao valor próprio 1, M_1, ou seja, o subespaço solução do sistema homogéneo

$$(1I_3 - A)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Como

$$I_3 - A = \begin{bmatrix}0&-1&0\\0&-1&0\\0&-1&0\end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_1 \to -\ell_1]{} \begin{bmatrix}0&1&0\\0&-1&0\\0&-1&0\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\ell_2 \to (\ell_2+\ell_1)\\ \ell_3 \to (\ell_3+\ell_1)}]{} \begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Então, $y = 0$, donde

$$M_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ y = 0\} = \{(x,0,z) :\ x,z \in \mathbb{R}\} =< (1,0,0,(0,0,1)) > .$$

Porque $r\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\right) = 2$, então $\{(1,0,0),(0,0,1)\}$ é linearmente independente.
Donde, $\{(1,0,0),(0,0,1)\}$ é uma base de M_1.

Vamos calcular o subespaço próprio associado ao valor próprio 2, M_2, ou seja, o subespaço solução do sistema homogéneo

$$(2I_3 - A)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como

$$2I_3 - A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_2 \leftrightarrow \ell_3]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, $x = y$ e $z = y$, donde

$$M_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = y, \ z = y\} = \{(y,y,y) : \ y \in \mathbb{R}\} =< (1,1,1) > .$$

Porque $(1,1,1) \neq (0,0,0)$, então $\{(1,1,1)\}$ é uma base de M_2.

(c) Sabemos que uma matriz quadrada é diagonalizável se, e só se, a soma das multiplicidades geométricas dos diferentes valores próprios da matriz for igual à sua ordem.

Por definição, $mg(1) = \dim M_1$ e $mg(2) = \dim M_2$. Atendendo à alínea b), $\dim M_1 = 2$ e $\dim M_2 = 1$. Consequentemente,

$$mg(1) + mg(2) = 2 + 1 = 3 = \text{ordem de } A.$$

Então, podemos afirmar que A é diagonalizável.

(d) A matriz P^{-1} tem nas suas colunas os vectores de uma base de cada um dos subespaços próprios associados aos seus valores próprios. Mais, como queremos que

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

na primeira coluna de P^{-1} será um vector da base de M_1, na segunda coluna de P^{-1}, um vector da base de M_2 e na terceira coluna de P^{-1}, um vector da base de M_1. Assim, pela alínea b),

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. (a) Sabemos que a matriz canónica de f, M_f, é a matriz $M(f : b.c._{\mathbb{R}^n}, b.c._{\mathbb{R}^n})$, em que $b.c._{\mathbb{R}^n}$ designa a base canónica de $\mathbb{R}^n$. Designemos por A a matriz $M(f : b.c._{\mathbb{R}^n}, b.c._{\mathbb{R}^n})$. Façamos o esquema

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}\mathbb{R}^n \\ \mathcal{B}\end{array} \arrow[r, "f", "A"'] \arrow[d, "id_{\mathbb{R}^n}"'] & \begin{array}{c}\mathbb{R}^n \\ \mathcal{B}'\end{array} \\
\begin{array}{c}b.c._{\mathbb{R}^n} \\ \mathbb{R}^n\end{array} \arrow[r, "M_f", "f"'] & \begin{array}{c}b.c._{\mathbb{R}^n} \\ \mathbb{R}^n\end{array} \arrow[u, "id_{\mathbb{R}^n}"']
\end{tikzcd}$$

Então,

$$A = M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = M(id_{\mathbb{R}^n}; b.c._{\mathbb{R}^n}, \mathcal{B}') M_f M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}, b.c._{\mathbb{R}^n}).$$

(b) Pela alínea anterior temos que

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = M(id_{\mathbb{R}^n}; b.c._{\mathbb{R}^n}, \mathcal{B}') M_f M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}, b.c._{\mathbb{R}^n}).$$

Então,

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1} = \left(M(id_{\mathbb{R}^n}; b.c._{\mathbb{R}^n}, \mathcal{B}') M_f M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}, b.c._{\mathbb{R}^n})\right)^{-1}.$$

Atendendo a que a inversa de um produto de matrizes invertíveis é o produto das inversas por ordem inversa, temos que

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1} = (M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}, b.c._{\mathbb{R}^n}))^{-1} (M_f)^{-1} \left(M(id_{\mathbb{R}^n}; b.c._{\mathbb{R}^n}, \mathcal{B}')\right)^{-1}.$$

Porque, $(M(id_{\mathbb{R}^n}; b.c._{\mathbb{R}^n}, \mathcal{B}'))^{-1} = M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}', b.c._{\mathbb{R}^n})$, $(M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}, b.c._{\mathbb{R}^n}))^{-1} = M(id_{\mathbb{R}^n}; b.c._{\mathbb{R}^n}, \mathcal{B})$ e $(M_f)^{-1} = M_{f^{-1}}$ temos que

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1} = M(id_{\mathbb{R}^n}; b.c._{\mathbb{R}^n}, \mathcal{B}) M_{f^{-1}} M(id_{\mathbb{R}^n}; \mathcal{B}', b.c._{\mathbb{R}^n}).$$

Pela alínea a),

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')^{-1} = M(f^{-1}; \mathcal{B}', \mathcal{B}).$$

2.4 EXAME DE ÉPOCA NORMAL DE ALGA 2008/09

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Época Normal – 29 de Janeiro de 2009

EXAME A

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:____

Número de caderno: | | | | | | | | | |

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,33$ valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 8) é dada por
$$\max\{0, \mathrm{cl}\},$$
onde cl designa a soma das classificações obtidas nos grupos de 1 a 8.

Continua no verso desta folha

1. Para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares de coeficientes reais nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,
$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ \alpha y + (\beta + 1)z = 6 \\ (\beta - 1)z = \alpha. \end{cases}$$
Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   A Se $\beta = 1$ e $\alpha = 0$ então o sistema é possível e indeterminado.

   B Se $\beta = 1$ e $\alpha = 2$ então o sistema é impossível.

   C Se $\beta = 2$ e $\alpha = 0$ então o sistema é impossível.

   D Se $\beta = 2$ e $\alpha = 2$ então o sistema é possível e indeterminado.

2. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.
O elemento da posição (2,1) da matriz $(A^T + 3B)$ é:

   A -6.

   B 4.

   C 6.

   D 9.

3. Sejam A e B matrizes tais que é possível efectuar o produto AB. Se B é matriz do tipo 4×5 e AB é matriz do tipo 4×5, então a matriz A é do tipo

   A 4×4.

   B 4×5.

   C 5×5.

   D 5×4.

4. Seja A uma matriz de ordem 3 tal que $|A| = 8$. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   A $|-A| = 8$.

   B $|A^T| = |A|$.

   C $|2A| = |A^2|$.

   D $|A^{-1}| = \frac{1}{8}$.

Continua na próxima folha

5. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuja matriz canónica é $M_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   Então, $f(x, y, z)$, com $x, y, z \in \mathbb{R}$, é igual a:

   A $(x + 2y, 5y, 2x - y)$.
   B $(3x, 5y, z)$.
   C $(x + 2z, 2x + 5y - z, 0)$.
   D $(3x, 6y, 0)$.

6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ uma aplicação linear tal que $Nuc\ f = \{(0, 0)\}$. Então, $dim\ (Im\ f)$ é:

   A 3.
   B 2.
   C 4.
   D 1.

7. A
   B
   C
   D

8. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}_2[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(ax^2 + bx + c) = (a + b, -c, 2a)$$

   para todo o $ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}_2[x]$. Então, $f(x)$ é igual a:

   A $(1, 0, 2)$.
   B $(1, 0, 0)$.
   C $(0, -1, 0)$.
   D $(0, 0, 1)$.

Continua no verso desta folha

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Época Normal – 29 de Janeiro de 2009

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

9. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

[1.0] (a) Justifique que a matriz A é invertível.

[1.0] (b) Determine a matriz inversa da matriz A.

[1.5] (c) Determine matrizes elementares R_1 e R_2 de ordem 3 tais que $A = R_1R_2$.

Mude de Folha

10. Seja $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que
$$f(x,y,z) = (x-y,0,z),$$
com $x,y,z \in \mathbb{R}$

[1.0] (a) Determine o núcleo de f.

[1.5] (b) Determine a matriz $M(f;\mathcal{B},\mathcal{B})$.

Mude de Folha

11. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

[1.0] (a) Justifique que o polinómio característico da matriz A é
$$(\lambda-1)^2(\lambda+1).$$

[1.5] (b) Determine uma base do subespaço próprio, de A, associado ao valor próprio 1.

[1.0] (c) Verifique se A é diagonalizável.

Mude de Folha

Continua na próxima folha

[Cotação]

12. Seja A uma matriz de ordem n tal que

$$(A + 2I_n) = (2I_n + A)A^T.$$

Mostre que:

[1.5] (a) Se -2 não é um valor próprio de A, então $\det(A) = 1$.

[1.0] (b) Se -2 não é um valor próprio de A, então $\det(adj\ (A)) = 1$.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Época Normal – 29 de Janeiro de 2009

Uma resolução

1. D

2. C

3. A

4. A

5. C

6. B

7.

8. B

9. (a) Sabemos que a matriz A é invertível se, e só se, $|A| \neq 0$.
Ora usando o Teorema de Laplace, através da primeira linha,

$$|A| = 1(-1)^4 \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = -1 \neq 0.$$

Portanto, A é invertível.

(b) Calculemos a inversa de $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_1 \leftrightarrow \ell_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_1 \to (\ell_1 - 3\ell_2)]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

pelo que a inversa da matriz dada é

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c) A matriz elementar a que corresponde a primeira transformação elementar do cálculo da inversa de A é a matriz

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz elementar a que corresponde a segunda transformação elementar do cálculo da inversa de A é a matriz

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pela teórica sabemos que

$$E_2E_1A = I_3.$$

Assim,

$$A = (E_2E_1)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1},$$

pois a inversa de um produto de matrizes é o produto das inversas das matrizes, por ordem inversa.

Como

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$E_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são matrizes elementares, temos a matriz A como produto de 2 matrizes elementares.

10. (a) Por definição,

$$\begin{aligned} \text{Nuc}f &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-y,0,z) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x-y=0 \wedge z=0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=y,\ z=0\} \\ &= \{(x,x,0) : x \in \mathbb{R}\} \\ &= <(1,1,0)> . \end{aligned}$$

(b) Porque a matriz $M(f;\mathcal{B},\mathcal{B})$ tem nas suas colunas, as coordenadas, na base $\mathcal{B}$, das imagens por f dos vectores da base $\mathcal{B}$, e porque
$f(1,1,1) = (0.0,1) = 1(1,1,1) - 1(1,1,0) + 0(1,0,0)$
$f(1,1,0) = (0,0,0) = 0(1,1,1) + 0(1,1,0) + 0(1,0,0)$
$f(1,0,0) = (1,0,0) = 0(1,1,1) + 0(1,1,0) + 1(1,0,0)$,
então,

$$M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

11. (a) O polinómio característico da matriz A é, por definição, $p_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) =$

$$= \det\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}\right) = \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & -3 & \lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (\lambda-1)\det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2-1) = (\lambda-1)^2(\lambda+1).$$

(b) Vamos calcular o subespaço próprio associado ao valor próprio 1, M_1, ou seja, o subespaço solução do sistema homogéneo

$$(1I_3 - A)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como

$$I_3 - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 \to (\ell_3 + \ell_1)]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_2 \leftrightarrow \ell_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, $x = z$ e $-3y = 0$, ou seja, $x = z$ e $y = 0$, donde

$$M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = z, \ y = 0\} = \{(z, 0, z) : \ z \in \mathbb{R}\} =< (1, 0, 1) > .$$

Porque $(1, 0, 1) \neq (0, 0, 0)$, então $\{(1, 0, 1)\}$ é uma base de M_1.

(c) Pela alínea anterior, $mg(1) = dim(M_1) = 1$. Porque $1 \leq mg(-1) \leq ma(-1)$ e pela alínea (a), $ma(-1) = 1$, então $mg(-1) = 1$. Assim,

$$mg(1) + mg(-1) = 1 + 1 = 2 \neq 3 = \text{ ordem de } A.$$

Portanto, A não é diagonalizável.

12. (a) Por hipótese, $(A + 2I_n) = (2I_n + A)A^T$, então

$$\det(A + 2I_n) = \det((2I_n + A)A^T).$$

Atendendo a que o determinante de um produto de matrizes quadradas, é o produto dos determinantes das matrizes, temos que

$$\det(A + 2I_n) = \det(2I_n + A)\det(A^T).$$

Sabemos também que $\det(A^T) = \det(A)$, então

$$\det(A + 2I_n) = \det(2I_n + A)\det(A).$$

Mas, $\det(A + 2I_n) = \det(2I_n + A)$ donde,

$$\det(2I_n + A) = \det(2I_n + A)\det(A).$$

Por hipótese, -2 não é valor próprio de A, ou seja,

$$\det(-2I_n - A) \neq 0.$$

Como

$$\det(-2I_n - A) = \det((-1)(2I_n - A)) = (1)^n \det(2I_n + A),$$

então

$$\det(2I_n + A) \neq 0.$$

Consequentemente, da igualdade $\det(2I_n + A) = \det(2I_n + A)\det(A)$ obtemos que $\det(A) = 1$.

(b) Sabemos que
$$A.(adj\ (A)) = \det(A).I_n.$$
Donde,
$$\det(A.(adj\ (A))) = \det(\det(A).I_n).$$
Atendendo a que o determinante de um produto de matrizes quadradas, é o produto dos determinantes das matrizes, temos que
$$\det(A)\det(adj\ (A)) = \det(A)^n \det(I_n).$$
Usando a alínea (a), concluímos que
$$\det(adj\ (A))) = 1.$$

2.5 EXAME DE RECURSO DE ALGA 2008/09

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Recurso – 12 de Fevereiro de 2009

EXAME A

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:____________________________________

Número de caderno: | | | | | | | | | |

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: +1 valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,33$ valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 8) é dada por

$$\max\{0, \mathrm{cl}\},$$

onde cl designa a soma das classificações obtidas nos grupos de 1 a 8.

Continua na próxima folha

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Quais são as matrizes que estão em forma de escada e quais é que não estão?

   [A] A, B e C não estão em forma de escada.

   [B] A e C estão em forma de escada e B não está em forma de escada.

   [C] A está em forma de escada e B e C não estão em forma de escada.

   [D] A, B e C estão em forma de escada.

2. Sejam A e B matrizes tais que A é matriz do tipo 2×4 e B é matriz do tipo 2×4, então a matriz AB^T é do tipo

   [A] 2×4.

   [B] 4×2.

   [C] 2×2.

   [D] 4×4.

3. Para cada $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ considere o subconjunto de $\mathbb{R}^3$,

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ \alpha x + (\beta - 1)y^2 + 3z = \gamma\}.$$

   Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   [A] Se $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 0$ então, T não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

   [B] Se $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$ então, T não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

   [C] Se $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$ então, T não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

   [D] Se $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 0$ então, T não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

4. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ tem característica

   [A] 1.

   [B] 2.

   [C] 3.

   [D] 4.

Continua no verso desta folha

5. O polinómio característico da matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é:

   $\boxed{\text{A}}$ $\lambda(\lambda+2)(\lambda-2)$.
   $\boxed{\text{B}}$ λ^3.
   $\boxed{\text{C}}$ $\lambda^2(\lambda+2)$.
   $\boxed{\text{D}}$ $\lambda^2(\lambda-2)$.

6. Qual dos seguintes conjuntos é uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclui o vector $(1, 2, 0)$?

   $\boxed{\text{A}}$ $\{(1, 3, 1), (0, 1, 1), (1, 2, 0)\}$.
   $\boxed{\text{B}}$ $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 2, 0)\}$.
   $\boxed{\text{C}}$ $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 2, 0)\}$.
   $\boxed{\text{D}}$ $\{(1, 0, 2), (3, 0, 6), (1, 2, 0)\}$.

7. $\boxed{\text{A}}$
   $\boxed{\text{B}}$
   $\boxed{\text{C}}$
   $\boxed{\text{D}}$

8. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}[x]$ tal que

$$f(a, b) = (a+b)x + (a-b)$$

   para todo o $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Então, $f(2, 1)$ é igual a:

   $\boxed{\text{A}}$ $3x + 1$.
   $\boxed{\text{B}}$ $2x + 1$.
   $\boxed{\text{C}}$ $x + 2$.
   $\boxed{\text{D}}$ $x + 3$.

Continua na próxima folha

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Recurso – 12 de Fevereiro de 2009

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

9. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares de coeficientes reais nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ x + (\alpha - 3)y + (\beta + 2)z = 7 \\ x - 3y + \beta z = \alpha + 1. \end{cases}$$

[2.0] (a) Discuta o sistema anterior em função dos parâmetros α e β.

[1.0] (b) Para $\alpha = 0$ e $\beta = 1$ determine o conjunto-solução do sistema.

Mude de Folha

10. Seja $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(x, y, z) = (x + y - z, y - z, x)$$

para todo o $x, y, z \in \mathbb{R}$.

[1.0] (a) Determine o $Nuc(f)$.

[1.0] (b) Sem calcular a imagem de f, diga a $\dim(Im\ f)$.

[1.5] (c) Determine $M(f; \mathcal{B}, b.c._{\mathbb{R}^3})$, em que $b.c._{\mathbb{R}^3}$ designa a base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Mude de Folha

11. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

[1.0] (a) Justifique que a matriz A é invertível.

[1.0] (b) Determine a matriz inversa da matriz A.

[1.0] (c) Mostre que $(1, -1, 0)$ é um vector próprio de A.

Mude de Folha

Continua no verso desta folha

[Cotação]

12. Considere o subconjunto de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) :\ a = 0,\ d = 0 \right\}.$$

Mostre que:

[1.5] (a) T é um subespaço vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

[1.0] (b) T é isomorfo a $\mathbb{R}^2$, isto é, $T \cong \mathbb{R}^2$.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Recurso – 12 de Fevereiro de 2009

Uma resolução

1. D

2. C

3. A

4. B

5. A

6. C

7.

8. A

9. (a) Vamos fazer a discussão do sistema, usando a matriz ampliada do sistema, $[A|B]$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha-3 & \beta+2 & 7 \\ 1 & -3 & \beta & \alpha+1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3\to(l_3-l_1)]{l_2\to(l_2-l_1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & \beta+1 & 6 \\ 0 & 0 & \beta-1 & \alpha \end{array}\right]$$

i. Se $\beta = 1$ e $\alpha = 0$ então temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Assim, $r(A) = r([A|B]) = 2 < 3 =$ número de incógnitas, então o sistema é possível e indeterminado.

ii. Se $\beta = 1$ e $\alpha \neq 0$ então temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{array}\right].$$

Assim, $r(A) = 2 < 3 = r([A|B])$, então o sistema é impossível.

iii. Se $\beta \neq 1$ e $\alpha \neq 0$ então $r(A) = r([A|B]) = 3 =$ número de incógnitas, então o sistema é possível e determinado.

iv. Se $\beta \neq 1$ e $\alpha = 0$ então temos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \beta+1 & 6 \\ 0 & 0 & \beta-1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3\leftrightarrow l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \beta-1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta+1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3\to l_3-\frac{\beta+1}{\beta-1}l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \beta-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right].$$

Assim, $r(A) = 2 < r([A|B]) = 3$, então o sistema é impossível.

(b) Se $\alpha = 0$ e $\beta = 1$, por (a) i., a matriz ampliada do sistema fica

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \to (\frac{1}{2} l_2)]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \to (l_1 - l_2)]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esta última matriz corresponde ao sistema $\begin{cases} x = 3y - 2 \\ z = 3 \end{cases}$. Pelo que o conjunto-solução do sistema é

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 3y - 2, \; z = 3\}.$$

10. (a) Por definição,

$$\begin{aligned} \mathrm{Nuc} f &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x + y - z, y - z, x) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0 \wedge y - z = 0 \wedge x = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z, \; x = 0\} \\ &= \{(0, z, z) : z \in \mathbb{R}\} \\ &= \; < (0, 1, 1) > . \end{aligned}$$

(b) Pela alínea anterior, temos que $\mathrm{Nuc} f =< (0, 1, 1) >$. Como $(0, 1, 1) \neq (0, 0, 0)$, então $\{(0, 1, 1)\}$ é uma base de $\mathrm{Nuc} f$. Assim, $\dim(\mathrm{Nuc} f) = 1$.
Pela teórica sabemos que

$$\dim(\mathrm{Nuc} f) + \dim(\mathrm{Im} f) = \dim \mathbb{R}^3 = 3.$$

Então, $\dim(\mathrm{Im} f) = 3 - \dim(\mathrm{Nuc} f) = 3 - 1 = 2$.

(c) Porque a matriz $M(f; \mathcal{B}, b.c._{\mathbb{R}^3})$ tem nas suas colunas, as coordenadas, na base canónica de $\mathbb{R}^3$, das imagens por f dos vectores da base $\mathcal{B}$, e porque
$f(1, 1, 1) = (1, 0, 1) = 1(1, 0, 0) + 0(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1)$
$f(1, 1, 0) = (2, 1, 1) = 2(1, 0, 0) + 1(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1)$
$f(1, 0, 0) = (1, 0, 1) = 1(1, 0, 0) + 0(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1)$,
então,

$$M(f; \mathcal{B}, b.c._{\mathbb{R}^3}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

11. (a) Sabemos que a matriz A é invertível se, e só se, $|A| \neq 0$.
Como a matriz A é triangular superior, o seu determinante é o produto dos elementos da diagonal principal, ou seja,

$$|A| = 2 \times 1 \times 1 = 2 \neq 0$$

Portanto, A é invertível.

(b) Calculemos a inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_2 \to (\ell_2 - \ell_3)]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_1 \to (\ell_1 - \ell_2)]{}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_1 \to \frac{1}{2}\ell_1]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

pelo que a inversa da matriz dada é

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c) Porque

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

então $(1, -1, 0)$ é vector próprio de A associado ao valor próprio 1.

12. (a) Por definição, T é subespaço vectrorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ se:

1) $T \subseteq M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (o que se verifica por definição do conjunto T).

2) $T \neq \emptyset$ (também se verifica porque a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tem as entradas $(1,1)$ e $(2,2)$ iguais a zero, que é a condição para pertencer a T).

3) Se as matrizes $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ pertencerem a T, então $a_1 = d_1 = a_2 = d_2 = 0$.
Porque

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

e $a_1 + a_2 = d_1 + d_2 = 0$, então

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \in T.$$

4) Se a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ pertencer a T e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $a = d = 0$.
Porque

$$\alpha \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

e $\alpha a = \alpha d = 0$, então

$$\alpha \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in T.$$

Como se verificam as 4 condições anteriores, então T é subespaço vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(b) Porque

$$\begin{aligned}
T &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \ a = 0, \ d = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix} : \ b, \ c \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} : \ b, \ c \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle,
\end{aligned}$$

e se α e $\beta \in \mathbb{R}$ são tais que

$$\alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

então,

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

o que implica que $\alpha = \beta = 0$. Mas isto significa que $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ é linearmente independente. Logo, $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de T e

$$\dim T = 2.$$

Pela teórica sabemos que se T é um subespaço vectorial real de dimensão 2, então é isomorfo a $\mathbb{R}^2$.

2.6 EXAME DE ÉPOCA ESPECIAL DE ALGA 2008/09

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Época Especial – 7 de Setembro de 2009

EXAME A

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:____________________________________

Número de caderno: | | | | | | | | | |

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: +1 valores;**
- **Se responder erradamente: −0,33 valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 8) é dada por

$$\max\{0, \mathrm{cl}\},$$

onde cl designa a soma das classificações obtidas nos grupos de 1 a 8.

Continua no verso desta folha

1. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz simples do sistema:

   $\boxed{\text{A}}$ $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -y + 4z = -1. \end{cases}$

   $\boxed{\text{B}}$ $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -y = 4. \end{cases}$

   $\boxed{\text{C}}$ $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ -x = 4. \end{cases}$

   $\boxed{\text{D}}$ $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -x + 4y = -1. \end{cases}$

2. Sejam A, B e C matrizes tais que é possível efectuar o produto ABC. Se A é matriz do tipo 4×2 e C é matriz do tipo 4×2, então a matriz B é do tipo

   $\boxed{\text{A}}$ 2×4.

   $\boxed{\text{B}}$ 4×2.

   $\boxed{\text{C}}$ 2×2.

   $\boxed{\text{D}}$ 4×4.

3. Para cada $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ considere o subconjunto de $\mathbb{R}^3$,

   $$T = \{(1, 0, \alpha), (1, 1, \alpha), (1, 2, \beta + \gamma)\}.$$

   <u>Apenas</u> uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ Se $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$ então, T é linearmente independente.

   $\boxed{\text{B}}$ Se $\alpha = 3$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$ então, T é linearmente independente.

   $\boxed{\text{C}}$ Se $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 3$ então, T é linearmente independente.

   $\boxed{\text{D}}$ Se $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = 2$ então, T é linearmente independente.

4. Seja A uma matriz de ordem 4 tal que $|A| = 3$. <u>Apenas</u> uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ $|-A| = 3$.

   $\boxed{\text{B}}$ $|A^T| = 3$.

   $\boxed{\text{C}}$ $|A^2| = 9$.

   $\boxed{\text{D}}$ $|\frac{1}{3}A| = 1$.

Continua na próxima folha

5. A matriz inversa da matriz $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz

   $\boxed{\text{A}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   $\boxed{\text{B}}$ $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   $\boxed{\text{C}}$ $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   $\boxed{\text{D}}$ $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Seja $\mathcal{B} = \{(0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. O terno de coordenadas do vector

   $$u = 4(1,0,0) + 5(0,1,0) - 1(0,0,1)$$

   na base $\mathcal{B}$ é:

   $\boxed{\text{A}}$ $(5,4,-1)$.

   $\boxed{\text{B}}$ $(5,-1,4)$.

   $\boxed{\text{C}}$ $(-1,4,5)$.

   $\boxed{\text{D}}$ $(-1,5,4)$.

7. Sejam $\mathcal{B} = \{(2,2),(1,0)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1,0),(1,1)\}$ duas bases de $\mathbb{R}^2$. Então a matriz

   $$M(id_{\mathbb{R}^2}; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

   é igual a:

   $\boxed{\text{A}}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

   $\boxed{\text{B}}$ $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

   $\boxed{\text{C}}$ $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   $\boxed{\text{D}}$ $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

8. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$ tal que

   $$f(ax+b) = (a+b)x$$

   para todo o $ax+b \in \mathbb{R}[x]$. Então, $f(x+3)$ é igual a:

   $\boxed{\text{A}}$ $2x+2$.

   $\boxed{\text{B}}$ $4x$.

   $\boxed{\text{C}}$ $x+3$.

   $\boxed{\text{D}}$ x.

Continua no verso desta folha

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Época Especial – 7 de Setembro de 2009

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

9. Para cada $a,\ b \in \mathbb{R}$, considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a-4 & 0 \\ a & b & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ a & 2 & b & 2 \end{bmatrix}$$

[1.5] (a) Calcule o determinante de A.

[1.0] (b) Usando a alínea (a), determine para que valores de a e b a matriz A é invertível.

Mude de Folha

10. Seja $\mathcal{B} = \{(1,1),(2,0)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

[1.0] (a) Determine o núcleo de f.

[1.0] (b) Sem calcular a imagem de f, diga a $\dim(Im\ f)$.

[1.5] (c) Determine a matriz $M(f; b.c._{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B})$, usando matrizes de mudança de base, em que $b.c._{\mathbb{R}^3}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Mude de Folha

11. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

[1.0] (a) Determine os valores próprios de A.

[1.5] (b) Determine uma base do subespaço próprio, de A, associado ao valor próprio 0.

[1.0] (c) Mostre que A é diagonalizável.

Mude de Folha

Continua na próxima folha

[Cotação]

12. Sejam A, B e P matrizes de ordem n, tais que P é invertível e

$$PA = BP.$$

Mostre que:

[1.0] (a) $\det A = \det B$.

[1.5] (b) Se X é um vector próprio de A então:

(i) PX é matriz não nula.

(ii) PX é vector próprio de B.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Época Especial – 7 de Setembro de 2009

Uma resolução

1. A

2. A

3. B

4. D

5. B

6. B

7. A

8. B

9. (a) Fazendo o desenvolvimento do determinante de A através da primeira linha (desenvolvimento de Laplace), obtemos

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & a-4 & 0 \\ a & b & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ a & 2 & b & 2 \end{bmatrix} = (-1)^4(a-4)\det \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Fazendo o desenvolvimento do determinante, desta matriz, através da segunda linha (desenvolvimento de Laplace), obtemos

$$(a-4)\det \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 2 & 2 \end{bmatrix} = (a-4)(-1)^4 \det \begin{bmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix} = (a-4)(2a-a)$$

Portanto, $\det A = (a-4)a$.

(b) Sabemos que uma matriz é invertível se, e só se, o seu determinante é diferente de zero. Pela alínea (a) temos que $\det A = (a-4)a$. Então, A é invertível para qualquer $b \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$ desde que $a \neq 0$ e $a \neq 4$.

10. (a) Por definição,

$$\text{Nuc} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0)\}$$

Como não nos dão a expressão da aplicação f, mas sim a sua matriz canónica, M_f, então

$$\begin{aligned}
\text{Nuc}f &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right\}\\
&= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x+z,y+z)=(0,0)\}\\
&= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+z=0 \wedge y+z=0\}\\
&= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=-z,\ y=-z\}\\
&= \{(-z,-z,z) : z\in\mathbb{R}\}\\
&= <(-1,-1,1)> .
\end{aligned}$$

(b) Pela alínea anterior, temos que Nuc$f =< (-1,-1,1) >$. Como $(-1,-1,1)\neq(0,0,0)$, então $\{(-1,-1,1)\}$ é uma base de Nuc$f$. Assim, $\dim(\text{Nuc}f)=1$.
Pela teórica sabemos que

$$\dim(\text{Nuc}f)+\dim(\text{Im}f)=\dim\mathbb{R}^3=3.$$

Então, $\dim(\text{Im}f)=3-\dim(\text{Nuc}f)=3-1=2$.

(c) Porque a matriz $M(f;b.c._{\mathbb{R}^3},\mathcal{B})$ tem nas suas colunas, as coordenadas, na base $\mathcal{B}$, das imagens por f dos vectores da base canónica de $\mathbb{R}^3$, e porque
$[f(1,0,0)] = M_f\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$,

ou seja, $f(1,0,0)=(1,0)=0(1,1)+\frac{1}{2}(2,0)$,

$[f(0,1,0)] = M_f\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$,

ou seja, $f(0,1,0)=(0,1)=1(1,1)-\frac{1}{2}(2,0)$,

$[f(0,0,1)] = M_f\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$,

ou seja, $f(0,0,1)=(1,1)=1(1,1)+0(2,0)$,
então,

$$M(f;b.c._{\mathbb{R}^3},\mathcal{B})=\begin{bmatrix}0&1&1\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}.$$

11. (a) O polinómio característico da matriz A é, por definição, $p_A(\lambda)=\det(\lambda I_3-A)=$

$$= \det\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \det \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = \lambda^2(\lambda - 2).$$

Como os valores próprios de A são as raízes do seu polinómio característico então, os valores próprios de A são o zero e o dois.

(b) Vamos calcular uma base do subespaço próprio associado ao valor próprio 0, M_0, ou seja, uma base do subespaço solução do sistema homogéneo

$$(0I_3 - A)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como

$$0I_3 - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 \leftrightarrow \ell_1]{} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_1 \to -\ell_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, $x = -2z$, donde

$M_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -2z\} = \{(-2z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} =< (-2, 0, 1), (0, 1, 0) > .$

Porque $r\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2$, então $\{(-2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ é uma base de M_0.

(c) Pela alínea anterior, $mg(0) = dim(M_0) = 2$. Porque $1 \leq mg(2) \leq ma(2)$ e pela alínea (a), $ma(2) = 1$, então $mg(2) = 1$. Assim,

$$mg(0) + mg(2) = 2 + 1 = 3 = \text{ ordem de } A.$$

Portanto, A é diagonalizável.

12. (a) Por hipótese, a matriz P é invertível e $PA = BP$. Então

$$P^{-1}PA = P^{-1}BP,$$

ou seja,

$$A = P^{-1}BP.$$

Assim,

$$\det A = \det(P^{-1}BP).$$

Porque o determinante de um produto de matrizes quadradas é igual ao produto dos determinantes das matrizes, temos que

$$\det A = \det(P^{-1})\det(B)\det(P).$$

Mas, a matriz P é invertível, pelo que $\det(P^{-1}) = (\det P)^{-1}$. Donde,

$$\det A = \det(P^{-1})\det(B)\det(P) = (\det P)^{-1}\det(B)\det(P).$$

Usando a propriedade comutativa do produto em $\mathbb{R}$, concluímos que

$$\det A = (\det P)^{-1}\det(P)\det(B) = \det B.$$

(b) (i) Suponhamos que PX era uma matriz nula. Como P é invertível, então

$$0 = PX \Longrightarrow 0 = P^{-1}PX = X.$$

Mas isto é impossível porque X é um vector próprio de A, o que, por definição, significa que X é uma matriz não nula. Donde $PX \neq 0$.

(ii) Já sabemos, pela alínea anterior, que PX é uma matriz não nula. Por outro lado, usando a hipótese de $PA = BP$, temos que

$$BPX = PAX.$$

Porque X é um vector próprio de A, então, $AX = \lambda X$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim,

$$BPX = PAX = P\lambda X = \lambda PX.$$

Mas isto significa que PX é um vector próprio de B.

Capítulo 3

Testes e Exames de ALGA 2007/08

3.1 PRIMEIRO TESTE DE ALGA 2007/08

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

1º TESTE – 17 de Novembro de 2007

TESTE A

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:____________________________________

Número de caderno: | | | | | | | | | |

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				
9.				
10.				

Continua no verso desta folha

Respostas

	A	B	C	D
11.				
12.				
13.				
14.				
15.				
16.				

Atenção

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1,25$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,41$ valores.**

4 - A classificação é dada por

$$\max\{0, \mathrm{cl_I}\} + \max\{0, \mathrm{cl_{II}}\} + \max\{0, \mathrm{cl_{III}}\},$$

onde $\mathrm{cl_I}$ designa a soma das classificações obtidas nos grupos de 1 a 5, $\mathrm{cl_{II}}$ designa a soma das classificações obtidas nos grupos de 6 a 12 e $\mathrm{cl_{III}}$ designa a soma das classificações obtidas nos grupos de 13 a 16.

---

1. A intersecção dos 3 planos de $\mathbb{R}^3$ de equações gerais

$$3x + 3y = 6\ ;\ \ x - y + 2z = 2\ ;\ \ 5x - 5y + 10z = 10$$

é:

[A] uma recta.

[B] um ponto.

[C] um plano.

[D] o vazio.

Continua na próxima folha

2. Considere as matrizes
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$
Quais são as matrizes que estão em forma de escada e quais é que não estão?

 A A, B e C não estão em forma de escada.
 B A e C estão em forma de escada e B não está em forma de escada.
 C A está em forma de escada e B e C não estão em forma de escada.
 D A, B e C estão em forma de escada.

3. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -4 & 10 & 10 & -4 \end{bmatrix}$ tem característica

 A 1.
 B 2.
 C 3.
 D 4.

4. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares de coeficientes reais nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,
$$\begin{cases} x + z = 0 \\ 2x + y + \alpha z = 0 \\ 4x + \beta y + 4z = \alpha. \end{cases}$$
Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

 A Se $\alpha \neq 0$ e $\beta = 0$ então o sistema é impossível.
 B Se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$ então o sistema é possível e determinado.
 C Se $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ então o sistema é possível e indeterminado.
 D Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$ então o sistema é possível e determinado.

5. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

 A Um sistema com duas equações lineares a três incógnitas não pode ter uma única solução.
 B Um sistema com três equações lineares a duas incógnitas não pode ser um sistema possível.
 C Um sistema homogéneo com três equações lineares a duas incógnitas não pode ser um sistema impossível.
 D Um sistema com duas equações lineares a três incógnitas não pode ter exactamente duas soluções.

Continua no verso desta folha

6. Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   O elemento da posição (1,2) da matriz $(A^T B)^T$ é:

   $\boxed{\text{A}}$ -8.

   $\boxed{\text{B}}$ 0.

   $\boxed{\text{C}}$ 2.

   $\boxed{\text{D}}$ -1.

7. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

   O produto AB não se pode efectuar porque:

   $\boxed{\text{A}}$ o número de linhas de A é diferente do número de linhas de B.

   $\boxed{\text{B}}$ o número de linhas de A é diferente do número de colunas de B.

   $\boxed{\text{C}}$ o número de colunas de A é diferente do número de colunas de B.

   $\boxed{\text{D}}$ o número de colunas de A é diferente do número de linhas de B.

8. Sejam $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   Quais são as matrizes elementares e quais é que não são?

   $\boxed{\text{A}}$ E_1, E_2, E_3 e E_4 são matrizes elementares.

   $\boxed{\text{B}}$ E_1, E_2, E_3 e E_4 não são matrizes elementares.

   $\boxed{\text{C}}$ E_1, E_3 são matrizes elementares e E_2, E_4 não são matrizes elementares.

   $\boxed{\text{D}}$ E_1, E_3, E_4 são matrizes elementares e E_2 não é matriz elementar.

9. A matriz inversa da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ é a matriz

   $\boxed{\text{A}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

   $\boxed{\text{B}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

   $\boxed{\text{C}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

   $\boxed{\text{D}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Continua na próxima folha

10. Seja A uma matriz do tipo 2×3. Seja C a matriz que se obtém de A após as seguintes transformações elementares: substituição da 2ª linha de A pela soma da 2ª com a 1ª linha, seguida da troca da 1ª com a 2ª linha, então

   $\boxed{\text{A}}$ $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A.$

   $\boxed{\text{B}}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A.$

   $\boxed{\text{C}}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A.$

   $\boxed{\text{D}}$ $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A.$

11. O elemento que ocupa a posição (2,3) da matriz inversa da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ é:

   $\boxed{\text{A}}$ -1.

   $\boxed{\text{B}}$ 1.

   $\boxed{\text{C}}$ 0.

   $\boxed{\text{D}}$ -2.

12. Sejam A e B duas matrizes quaisquer de ordem n. <u>Apenas</u> uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ Se B_1 é a 1ª coluna de B então AB_1 é a 1ª coluna de AB.

   $\boxed{\text{B}}$ $(A+B)^T = B^T + A^T$.

   $\boxed{\text{C}}$ Se A e B são invertíveis então $(A^T B^T)^{-1} = (A^{-1}B^{-1})^T$.

   $\boxed{\text{D}}$ $(AB)^2 = A^2 B^2$.

13. Considere os subconjuntos de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} T_1 &= \{(1,a,b) : \ a,b \in \mathbb{R}\} \\ T_2 &= \{(0,0,0)\} \\ T_3 &= \{(0,a,0) : \ a \in \mathbb{R}, a \geq 0\} \\ T_4 &= \{(a,b,0) : \ a,b \in \mathbb{R}, a = -b\}. \end{aligned}$$

   Quais os subconjuntos que são subespaços de $\mathbb{R}^3$ e quais é que não o são?

   $\boxed{\text{A}}$ T_1, T_2, T_3, T_4 não são subespaços de $\mathbb{R}^3$.

   $\boxed{\text{B}}$ T_2 é subespaço de $\mathbb{R}^3$ e T_1, T_3, T_4 não são subespaços de $\mathbb{R}^3$.

   $\boxed{\text{C}}$ T_2, T_3, T_4 são subespaços de $\mathbb{R}^3$ e T_1 não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

   $\boxed{\text{D}}$ T_2, T_4 são subespaços de $\mathbb{R}^3$ e T_1, T_3 não são subespaços de $\mathbb{R}^3$.

Continua no verso desta folha

14. O vector de $\mathbb{R}^3$, $(1,-1,3)$, não pertence ao subespaço

   $\boxed{\text{A}}$ $\langle(1,-1,3),(0,0,0)\rangle$.
   $\boxed{\text{B}}$ $\langle(0,1,3),(1,-2,0)\rangle$.
   $\boxed{\text{C}}$ $\langle(-2,2,-6)\rangle$.
   $\boxed{\text{D}}$ $\langle(1,1,3),(0,0,2)\rangle$.

15. O conjunto formado pelos vectores de $\mathbb{R}^3$,

$$v_1=(1,-1,3),\ v_2=(1,-2,2),\ v_3=(0,1,a),$$

   é um conjunto de vectores linearmente dependente para

   $\boxed{\text{A}}$ $a=1$.
   $\boxed{\text{B}}$ $a=0$.
   $\boxed{\text{C}}$ $a=2$.
   $\boxed{\text{D}}$ $a=3$.

16. Seja $\{u_1,u_2,u_3\}$ um conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$, linearmente independente. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ $\{u_1,u_2\}$ é um conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$, linearmente independente.
   $\boxed{\text{B}}$ $\{u_1+u_2,u_3,u_1-u_2\}$ é um conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$, linearmente independente.
   $\boxed{\text{C}}$ $\{u_1+u_2,2u_1+2u_2\}$ é um conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$, linearmente independente.
   $\boxed{\text{D}}$ $\{u_1,u_3,u_2\}$ é um conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$, linearmente independente.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

1º TESTE – 17 de Novembro de 2007

Uma resolução

1. A

2. D

3. B

4. B

5. B

6. A

7. D

8. D

9. B

10. A

11. A

12. D

13. D

14. D

15. A

16. C

1. A matriz ampliada do sistema que corresponde à intersecção dos 3 planos é

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 5 & -5 & 10 & 10 \end{array}\right].$$

Resolvamos este sistema.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 5 & -5 & 10 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \to \frac{1}{3} l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 5 & -5 & 10 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to (l_2 - l_1) \\ l_3 \to (l_3 - 5l_1)}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -10 & 10 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[l_3 \to (l_3 - 5l_2)]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \to -\frac{1}{2} l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \to (l_1 - l_2)]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esta última matriz corresponde ao sistema $\begin{cases} x = 2 - z \\ y = z \end{cases}$ (recta). Resposta A

2. Uma matriz está em forma de escada se

   (a) Se a matriz tiver uma linha nula, abaixo dessa linha só há linhas nulas.

   (b) Se tiver duas linhas não nulas, então o pivot da linha inferior está numa coluna mais à direita do que o pivot da linha superior.

   Assim, A, B e C estão em forma de escada. Resposta D

3. Para calcular a característica da matriz, temos que obter dela uma sua forma de escada.
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -4 & 10 & 10 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_2\to(l_2-5l_1)\\ l_3\to(l_3-l_1)\\ l_4\to(l_4+4l_1)}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 14 & 14 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{l_3\to(l_3-\frac{2}{6}l_2)\\ l_4\to(l_4+\frac{14}{6}l_2)}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
   Pelo que a caracteristica da matriz (número de linhas não nulas de uma sua matriz em forma de escada) é 2. Resposta B

4. Vamos fazer a discussão do sistema, usando a matriz ampliada do sistema, $[A|B]$.
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha & 0 \\ 4 & \beta & 4 & \alpha \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2\to(l_2-2l_1)\\ l_3\to(l_3-4l_1)}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha-2 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \alpha \end{array}\right] \xrightarrow[l_3\to(l_3-\beta l_2)]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha-2 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta(\alpha-2) & \alpha \end{array}\right]$$

   (a) Se $\beta = 0$ e $\alpha = 0$ então $r(A) = r([A|B]) = 2 < 3 =$ número de incógnitas, então o sistema é possível e indeterminado.

   (b) Se $\beta = 0$ e $\alpha \neq 0$ então $r(A) = 2 < 3 = r([A|B])$, então o sistema é impossível.

   (c) Se $\beta \neq 0$ e $\alpha \neq 2$ então $r(A) = r([A|B]) = 3 =$ número de incógnitas, então o sistema é possível e determinado.

   (d) Se $\beta \neq 0$ e $\alpha = 2$ então $r(A) = 2 < 3 = r([A|B])$, então o sistema é impossível.

   Pelo que a resposta C é (a), a resposta A é (b), a resposta D está em (c) e a resposta B contem (d), pelo que a falsa é a B

5. O sistema $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$ tem 3 equações e 2 incógnitas e tem a solução $x = y = 0$.
   Resposta falsa é a B

6. $(A^TB)^T_{12} = (A^TB)_{21} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = -8$. Resposta A

7. O produto AB não se pode efectuar porque o número de colunas de A é diferente do número de linhas de B. Resposta D

8. Matrizes elementares são matrizes que se obtêm da matriz identidade efectuando uma única transformação elementar, pelo que a única que não é matriz elementar é a E_2. Resposta D

9. A inversa da matriz elementar é a matriz da resposta B

10. As transformações elementares são

$$A \xrightarrow[l_2 \to (l_2+l_1)]{} B \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} C,$$

pelo que

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A = C.$$

Resposta A

11. Calculemos a inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \to (l_2-l_1)]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow[l_3 \to (l_3-2l_2)]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{l_2 \to (l_2-l_3) \\ l_1 \to (l_1-2l_3)}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right]$, pelo que a inversa da matriz dada é

$$\begin{bmatrix} -3 & 4 & -2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

A posição $(2,3)$ desta matriz é -1. Resposta A

12. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então $A^2B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $(AB)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Portanto, neste caso $(AB)^2 \neq A^2B^2$. A resposta falsa é a D.

13. T_1 não é subespaço porque $(0,0,0)$ não lhe pertence.

T_2 é subespaço porque é o conjunto-solução do sistema homogéneo

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

T_3 não é subespaço porque $(0,1,0)$ é elemento de T_3 mas $(-1)(0,1,0) = (0,-1,0)$ não está em T_3.

T_4 é subespaço porque é o conjunto-solução do sistema homogéneo

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Então a resposta é D

14. Vejamos que $(1,-1,3)$ não se escreve como combinação linear dos vectores $(1,1,3)$ e $(0,0,2)$.

$$(1,-1,3) = \alpha(1,1,3) + \beta(0,0,2) = (\alpha, \alpha, 3\alpha + 2\beta)$$

então $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = -1 \\ 3\alpha + 2\beta = 3 \end{cases}$, sistema impossível. Isto significa que $(1,-1,3)$ não pertence ao subespaço $< (1,1,3),(0,0,2) >$. Resposta D

15. Consideremos a matriz que tem como colunas os vectores v_1, v_2, v_3 e calculemos a sua característica.
$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & \alpha \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to (l_3 - 3l_1)]{l_2 \to (l_2 + l_1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & \alpha \end{bmatrix} \xrightarrow[l_3 \to (l_3 - l_2)]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 \end{bmatrix}$
$\{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente dependente se, e só se, $r(A) < 3$ se, e só se, $\alpha = 1$. Resposta A

16. O conjunto $S = \{u_1 + u_2, 2u_1 + 2u_2\}$ é linearmente dependente porque

$$(-2)(u_1 + u_2) + (1)(2u_1 + 2u_2) = (0,0,0)$$

é uma combinação linear dos vectores de S que dá o vector nulo, tendo algum dos escalares não nulo. Resposta C

3.2 SEGUNDO TESTE DE ALGA 2007/08

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

2º TESTE – 12 de Dezembro de 2007

TESTE A

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:____

Número de caderno: | | | | | | | | | |

Respostas

	A	**B**	**C**	**D**
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X **a opção que considerar adequada.**

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X **a sua nova opção.**

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um** X **mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1,25$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,41$ valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 8) é dada por

$$\max\{0, \mathrm{cl_I}\} + \max\{0, \mathrm{cl_{II}}\},$$

onde $\mathrm{cl_I}$ designa a soma das classificações obtidas nos grupos de 1 a 4 e $\mathrm{cl_{II}}$ designa a soma das classificações obtidas nos grupos de 5 a 8.

Continua no verso desta folha

1. O cálculo do determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ através da 1ª linha é:

   $\boxed{\text{A}}$ $-2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$.

   $\boxed{\text{B}}$ $2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$.

   $\boxed{\text{C}}$ $-2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$.

   $\boxed{\text{D}}$ $2\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$.

2. Sejam A e B matrizes de ordem 2, invertíveis, tais que $|A| = k$, $|B| = p$.

   Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ $|-AB| = -kp$.

   $\boxed{\text{B}}$ $|B^T| = p$.

   $\boxed{\text{C}}$ $|A^{-1}| = \frac{1}{k}$.

   $\boxed{\text{D}}$ $|2A| = 4k$.

3. Sejam u e v vectores de $\mathbb{R}^3$. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ $u \times v = v \times u$.

   $\boxed{\text{B}}$ $u \times u = 0_{\mathbb{R}^3}$.

   $\boxed{\text{C}}$ $u \times (2v) = 2(u \times v)$.

   $\boxed{\text{D}}$ $u|(u \times v) = 0$.

4. Os valores próprios da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ são os números reais:

   $\boxed{\text{A}}$ 3 e 5, sendo $ma(3) = 2$ e $ma(5) = 1$.

   $\boxed{\text{B}}$ 1 e 5, sendo $ma(1) = 2$ e $ma(5) = 1$.

   $\boxed{\text{C}}$ 1 e 5, sendo $ma(1) = 1$ e $ma(5) = 2$.

   $\boxed{\text{D}}$ 3 e 5, sendo $ma(3) = 1$ e $ma(5) = 2$.

Continua na próxima folha

5. Considere as aplicações

   $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f_1(x, y) = (x + y, x - y)$

   $f_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f_2(x, y, z) = (2x + 1, y, z)$

   $f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f_3(x, y) = (y, x, 0)$

   para todo o $x, y, z \in \mathbb{R}$.

   Quais destas aplicações são aplicações lineares e quais é que não o são?

   $\boxed{\text{A}}$ f_1, f_2 e f_3 são aplicações lineares.

   $\boxed{\text{B}}$ f_1, f_2 são aplicações lineares e f_3 não é aplicação linear.

   $\boxed{\text{C}}$ f_1 é aplicação linear e f_2, f_3 não são aplicações lineares.

   $\boxed{\text{D}}$ f_1, f_3 são aplicações lineares e f_2 não é aplicação linear.

6. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja matriz canónica é $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Então, $f(1, 0)$ é igual a:

   $\boxed{\text{A}}$ $(1, 0)$.

   $\boxed{\text{B}}$ $(0, 2)$.

   $\boxed{\text{C}}$ $(1, -1)$.

   $\boxed{\text{D}}$ $(-1, 1)$.

7. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuja matriz canónica é $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   Então, $f(x, y, z)$, com $x, y, z \in \mathbb{R}$, é igual a:

   $\boxed{\text{A}}$ $(x + 2y + 3z, y + 2z, x + y)$.

   $\boxed{\text{B}}$ $(2x, 4y, 5z)$.

   $\boxed{\text{C}}$ $(6x, 3y, 2z)$.

   $\boxed{\text{D}}$ $(x + z, 2x + y + z, 3x + 2y)$.

8. Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear. Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ $f(x - y) = f(x) - f(y)$, para todo o $x, y \in \mathbb{R}^n$.

   $\boxed{\text{B}}$ $f(x^2) = (f(x))^2$, para todo o $x \in \mathbb{R}^n$.

   $\boxed{\text{C}}$ $f(x + y) = f(x) + f(y)$, para todo o $x, y \in \mathbb{R}^n$.

   $\boxed{\text{D}}$ $f(2x) = 2f(x)$, para todo o $x \in \mathbb{R}^n$.

Continua no verso desta folha

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

2º TESTE – 12 de Dezembro de 2007

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

9. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

[1.0] (a) Justifique que o polinómio característico da matriz A é

$$(\lambda - 2)^2(\lambda + 1).$$

[1.5] (b) Sabendo que 2 é um valor próprio da matriz A, determine o subespaço próprio de A, associado ao valor próprio 2.

Mude de Folha

10. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$f(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z), \text{ para todo } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

[1.0] (a) Calcule $f(1, -1, 0)$.

[1.5] (b) Determine a matriz canónica de f, M_f.

[1.5] (c) Verifique se f é injectiva.

[1.0] (d) f é sobrejectiva?

Mude de Folha

11. Seja A uma matriz de ordem n tal que $A^2 = A$. Mostre que:

[1.0] (a) $\det(A) = 0$ ou $\det(A) = 1$.

[1.5] (b) Se λ é valor próprio de A, então $\lambda \in \{0, 1\}$.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

2º TESTE – 12 de Dezembro de 2007

Uma resolução

1. B

2. A

3. A

4. C

5. D

6. B

7. A

8. B

9. (a) O polinómio característico da matriz A é, por definição,

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \det\left(\lambda\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1&0&-3\\3&2&3\\0&0&2\end{bmatrix}\right) =$$

$$= \det\begin{bmatrix}\lambda+1&0&3\\-3&\lambda-2&-3\\0&0&\lambda-2\end{bmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda+1).$$

(b) Vamos calcular o subespaço próprio associado ao valor próprio 2, M_2, ou seja, o subespaço solução do sistema homogéneo

$$(2\lambda - A)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Como

$$2I_3 - A = \begin{bmatrix}3&0&3\\-3&0&-3\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\ell_2\to\ell_2+\ell_1]{}\begin{bmatrix}3&0&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[\ell_1\to\frac{1}{3}\ell_1]{}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Então, $x = -z$, donde

$$M_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=-z\} = \{(-z,y,z) : y,z\in\mathbb{R}\} =< (-1,0,1),(0,1,0) > .$$

10. (a) Sendo $x=1, y=-1, z=0$, pela expressão de $f(x,y,z)$ obtemos que

$$f(1,-1,0) = (0,-1,1).$$

(b) Porque a matriz canónica da aplicação linear f tem nas colunas as imagens, por f, dos vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$, $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$, e porque
$f(1,0,0) = (1,0,1)$
$f(0,1,0) = (1,1,0)$
$f(0,0,1) = (0,1,1)$,
então,

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) Sabemos que uma aplicação linear é injectiva se, e só se, o seu núcleo for igual ao vector nulo.

Ora, por definição,

$$\begin{aligned} \mathrm{Nuc} f &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+y, y+z, x+z) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y = 0 \wedge y+z = 0 \wedge x+z = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z = 0\} \\ &= \{(0,0,0)\} \end{aligned}$$

Assim sendo, f é injectiva.

(d) Sabemos que sendo f uma aplicação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$, então f é sobrejectiva se, e só se, f é injectiva. Por (c), f é injectiva, logo é sobrejectiva.

11. (a) Sendo $A^2 = A$, então $\det A^2 = \det A$. Mas $\det A^2 = (\det A)^2$. Logo, $(\det A)^2 = \det A$.

Mas isto implica que $(\det A)((\det A) - 1) = 0$. Donde, $\det A = 0$ ou $\det A = 1$.

(b) Se λ é valor próprio da matriz A, existe uma matriz coluna X, 3×1, não nula, tal que

$$AX = \lambda X.$$

Mas então,

$$\lambda X = AX = A^2 X = A(AX) = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda^2 X.$$

Ou seja,

$$\lambda^2 X - \lambda X = 0$$

e

$$(\lambda^2 - \lambda)X = 0.$$

Como duas matrizes são iguais se as respectivas entradas forem iguais e, porque $X \neq 0$, então

$$\lambda^2 - \lambda = 0.$$

Mas isto implica que $\lambda(\lambda - 1) = 0$, donde,

$$\lambda \in \{0, 1\}.$$

3.3 TERCEIRO TESTE DE ALGA 2007/08

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

3º TESTE – 23 de Janeiro de 2008

TESTE A

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:______________________________________

Número de caderno: | | | | | | | | | |

Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1,25$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,41$ valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 8) é dada por

$$\max\{0, \mathrm{cl_I}\} + \max\{0, \mathrm{cl_{II}}\},$$

onde $\mathrm{cl_I}$ designa a soma das classificações obtidas nos grupos de 1 a 4 e $\mathrm{cl_{II}}$ designa a soma das classificações obtidas nos grupos de 5 a 8.

Continua na próxima folha

1. Considere os seguintes conjuntos de $\mathbb{R}^2$:

   $A = \{(3,0), (-1,5)\}$,

   $B = \{(1,0), (1,2), (0,2)\}$,

   $C = \{(1,0), (0,0)\}$,

   $D = \{(1,1)\}$.

   Quais os conjuntos que são bases de $\mathbb{R}^2$ e quais é que não o são?

   $\boxed{\text{A}}$ A, B são bases de $\mathbb{R}^2$ e C, D não são bases de $\mathbb{R}^2$.

   $\boxed{\text{B}}$ A é uma base de $\mathbb{R}^2$ e B, C, D não são bases de $\mathbb{R}^2$.

   $\boxed{\text{C}}$ A, C são bases de $\mathbb{R}^2$ e B, D não são bases de $\mathbb{R}^2$.

   $\boxed{\text{D}}$ A, B, C, D não são bases de $\mathbb{R}^2$.

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear cuja matriz relativamente à base $\mathcal{B} = \{(1,1), (-1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e à base canónica de $\mathbb{R}^2$ é

$$M(f; \mathcal{B}, b.c.\ de\ \mathbb{R}^2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Então, $f(1,1)$ é igual a:

   $\boxed{\text{A}}$ $(1,0)$.

   $\boxed{\text{B}}$ $(0,2)$.

   $\boxed{\text{C}}$ $(1,-1)$.

   $\boxed{\text{D}}$ $(1,1)$.

3. Sejam $\mathcal{B} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,1,1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(0,1,0), (0,1,1), (1,0,0)\}$ duas bases de $\mathbb{R}^3$. Então a matriz

$$M(id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$$

   é igual a:

   $\boxed{\text{A}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   $\boxed{\text{B}}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   $\boxed{\text{C}}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   $\boxed{\text{D}}$ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Continua no verso desta folha

4. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ uma aplicação linear. Apenas uma das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**. Indique qual é.

   $\boxed{\text{A}}$ $dim(Nuc(f)) + dim(Im(f)) = 5$.

   $\boxed{\text{B}}$ $dim(Nuc(f)) + dim(Im(f)) = 3$.

   $\boxed{\text{C}}$ $dim(Nuc(f)) - dim(Im(f)) = 2$.

   $\boxed{\text{D}}$ $dim(Im(f)) - dim(Nuc(f)) = 2$.

5. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Os valores próprios de A são:

   $\boxed{\text{A}}$ 3 e 5, sendo $mg(3) = 1$ e $mg(5) = 1$.

   $\boxed{\text{B}}$ 3 e 5, sendo $mg(3) = 2$ e $mg(5) = 1$.

   $\boxed{\text{C}}$ 3 e 5, sendo $mg(3) = 1$ e $mg(5) = 2$.

   $\boxed{\text{D}}$ 3 e 5, sendo $mg(3) = 2$ e $mg(5) = 2$.

6. $\boxed{\text{A}}$

   $\boxed{\text{B}}$

   $\boxed{\text{C}}$

   $\boxed{\text{D}}$

7. Considere os seguintes subconjuntos de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

   $T_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$,

   $T_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & a \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \ a \in \mathbb{R} \right\}$,

   $T_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$,

   $T_4 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \ a \in \mathbb{R} \right\}$.

   Quais os subconjuntos que são subespaços de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e quais é que não o são?

   $\boxed{\text{A}}$ T_1, T_2, T_3, T_4 não são subespaços de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   $\boxed{\text{B}}$ T_2 é subespaço de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e T_1, T_3, T_4 não são subespaços de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   $\boxed{\text{C}}$ T_2, T_4 são subespaços de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e T_1, T_3 não são subespaços de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   $\boxed{\text{D}}$ T_1, T_2, T_4 são subespaços de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e T_3 não é subespaço de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Continua na próxima folha

8. Em $\mathbb{R}_2[x]$ considere o conjunto

$$S = \{x^2 - 2,\ 3x - 1,\ x^2 - 6x\}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ O conjunto S gera $\mathbb{R}_2[x]$ mas não é linearmente independente.

$\boxed{\text{B}}$ O conjunto S não gera $\mathbb{R}_2[x]$ nem é linearmente independente.

$\boxed{\text{C}}$ O conjunto S gera $\mathbb{R}_2[x]$ e é linearmente independente.

$\boxed{\text{D}}$ O conjunto S não gera $\mathbb{R}_2[x]$ mas é linearmente independente.

Continua no verso desta folha

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

3^{o} TESTE – 23 de Janeiro de 2008

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de <u>folha</u> sempre que mudar de <u>grupo</u>.

[Cotação]

9. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(x,y,z) = (x+y, x+z, y-z)$$

para todo o $x, y, z \in \mathbb{R}$. Sejam $\mathcal{B} = \{(0,1,0),(1,0,0),(0,0,1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(0,0,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$ duas bases de $\mathbb{R}^3$.

[1.5] (a) Determine $M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')$.

[1.5] (b) Determine uma base de $Nuc(f)$.

[1.0] (c) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua os vectores $(-1,1,0),(-1,0,1)$.

Mude de Folha

[1.0] **10.** (a)

[1.0] (b)

[1.0] (c)

Mude de Folha

11. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem n, triangular superior tal que $a_{ii} = 2$, $i = 1, \ldots, n$.

[1.0] (a) Determine os valores próprios de A.

[2.0] (b) Mostre que A é diagonalizável se, e só se $A = 2I_n$.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

3º TESTE – 23 de Janeiro de 2008

Uma resolução

1. B

2. A

3. D

4. B

5. A

6.

7. C

8. B

9. (a) Porque a matriz $M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')$ tem nas suas colunas, as coordenadas, na base $\mathcal{B}'$, das imagens por f dos vectores da base $\mathcal{B}$, e porque
$f(0,1,0) = (1,0,1) = 1(0,0,1) + 1(1,0,0) + 0(0,1,0)$
$f(1,0,0) = (1,1,0) = 0(0,0,1) + 1(1,0,0) + 1(0,1,0)$
$f(0,0,1) = (0,1,-1) = -1(0,0,1) + 0(1,0,0) + 1(0,1,0)$,
então,

$$M_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Por definição,

$$\begin{aligned} \mathrm{Nuc} f &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+y, x+z, y-z) = (0,0,0)\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y = 0 \wedge x+z = 0 \wedge y-z = 0\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -y,\ z = y\} \\ &= \{(-y,y,y) : y \in \mathbb{R}\} \\ &= <(-1,1,1)> \end{aligned}$$

Porque $(-1,1,1) \neq (0,0,0)$ então $\{(-1,1,1)\}$ é linearmente independente. Consequentemente, $\{(-1,1,1)\}$ é uma base de $Nuc(f)$.

(c) Sabemos que $dim(\mathbb{R}^3) = 3$, portanto qualquer conjunto com 3 vectores de $\mathbb{R}^3$ que seja linearmente independente, é uma sua base. Como queremos uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua os vectores $(-1,1,0)$, $(-1,0,1)$, necessitamos de encontrar um vector de $\mathbb{R}^3$, (a,b,c), que com os dois anteriores forme um conjunto linearmente independente.

Ora, $S = \{(-1,1,0),\ (-1,0,1),\ (a,b,c)\}$ é linearmente independente se, e só se, a característica da matriz cujas colunas são os vectores de S é 3. Mas isto é equivalente a afirmar que a matriz cujas colunas são os vectores de S é invertível (ou seja, o seu determinante é diferente de zero). Porque o determinante de uma matriz é igual ao da sua transposta, então, podemos afirmar que S é linearmente independente se, e só se, a matriz cujas linhas são os vectores de S é invertível. Ou ainda que a característica da matriz cujas linhas são os vectores de S é 3.

Assim, vamos calcular a característica da matriz cujas linhas são os vectores de S

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_2 \to \ell_2 - \ell_1]{} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ a & b & c \end{bmatrix}.$$

Se $a = b = 0$ e $c = 1$, a matriz anterior tem característica 3, pelo que

$$\{(-1,1,0),\ (-1,0,1),\ (0,0,1)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$ nas condições do enunciado.

10. (a)

(b)

(c)

11. (a) Os valores próprios de A são as raízes do seu polinómio característico, $p_A(\lambda) = |\lambda I_n - A|$. Porque a matriz A é triangular superior, então $(\lambda I_n - A)$ também é triangular superior. Consequentemente, $|\lambda I_n - A|$ é igual ao produto dos elementos da diagonal principal. Portanto, $p_A(\lambda) = (\lambda - 2)^n$ e o único valor próprio de A é o 2 com multiplicidade algébrica n.

(b) Por definição, uma matriz quadrada, B é diagonalizável se existir uma matriz invertível, T, com a mesma ordem da B, tal que $T^{-1}BT$ é uma matriz diagonal. Mais, esta matriz diagonal tem na sua diagonal principal, os valores próprios da matriz B.

Pelo que foi dito anteriormente, se $A = 2I_n$, então A é uma matriz diagonal. Portanto, diagonalizável.

Reciprocamente, suponhamos que A é diagonalizável e seja P, uma matriz de ordem n, tal que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal. Atendendo à alínea anterior, $P^{-1}AP = 2I_n$. Então,

$$A = P(P^{-1}AP)P^{-1} = P(2I_n)P^{-1} = 2(PI_nP^{-1}) = 2I_n.$$

3.4 EXAME DE RECURSO DE ALGA 2007/08

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Recurso – 13 de Fevereiro de 2008

EXAME A

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:____

Número de caderno:

Respostas

	A	**B**	**C**	**D**
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X **a opção que considerar adequada.**

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X **a sua nova opção.**

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um** X **mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,33$ valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 8) é dada por

$$\max\{0, \text{cl}\},$$

onde cl designa a soma das classificações obtidas nos grupos de 1 a 8.

Continua no verso desta folha

1. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ tem característica

   $\boxed{\text{A}}$ 1.
   $\boxed{\text{B}}$ 2.
   $\boxed{\text{C}}$ 3.
   $\boxed{\text{D}}$ 4.

2. A matriz inversa da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz

   $\boxed{\text{A}}$ $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   $\boxed{\text{B}}$ $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   $\boxed{\text{C}}$ $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
   $\boxed{\text{D}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. A matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ tem determinante igual a

   $\boxed{\text{A}}$ 1.
   $\boxed{\text{B}}$ 3.
   $\boxed{\text{C}}$ 2.
   $\boxed{\text{D}}$ 0.

4. Considere os subconjuntos de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} T_1 &= \{(0,a,b) :\ a,b \in \mathbb{R}\} \\ T_2 &= \{(0,1,0)\} \\ T_3 &= \{(0,0,2a) :\ a \in \mathbb{R}\} \\ T_4 &= \{(a,a+12,0) :\ a \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

   Quais os subconjuntos que são subespaços de $\mathbb{R}^3$ e quais é que não o são?

   $\boxed{\text{A}}$ T_1, T_2, T_3, T_4 não são subespaços de $\mathbb{R}^3$.
   $\boxed{\text{B}}$ T_1, T_3 são subespaços de $\mathbb{R}^3$ e T_2, T_4 não são subespaços de $\mathbb{R}^3$.
   $\boxed{\text{C}}$ T_1, T_2, T_3 são subespaços de $\mathbb{R}^3$ e T_4 não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.
   $\boxed{\text{D}}$ T_1 é subespaço de $\mathbb{R}^3$ e T_2, T_3, T_4 não são subespaços de $\mathbb{R}^3$.

Continua na próxima folha

5. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   O elemento da posição (1,2) da matriz $(A+B)^T$ é:

   $\boxed{\text{A}}$ 0.

   $\boxed{\text{B}}$ 7.

   $\boxed{\text{C}}$ -1.

   $\boxed{\text{D}}$ 3.

6. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuja matriz canónica é $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

   Então $f(x,y,z)$, com $x,y,z \in \mathbb{R}$, é igual a:

   $\boxed{\text{A}}$ $(z, 2x-y-z, 3x+2y)$.

   $\boxed{\text{B}}$ $(x, 0, 5z)$.

   $\boxed{\text{C}}$ $(5x, y, 0)$.

   $\boxed{\text{D}}$ $(2y+3z, -y+2z, x-y)$.

7. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ uma aplicação linear tal que $Nuc(f) =< (1,0,0),(1,1,0) >$. Então a dimensão da $Im(f)$ é:

   $\boxed{\text{A}}$ 3.

   $\boxed{\text{B}}$ 2.

   $\boxed{\text{C}}$ 1.

   $\boxed{\text{D}}$ 4.

8. Qual dos seguintes conjuntos é uma base de $\mathbb{R}^3$?

   $\boxed{\text{A}}$ $\{(1,-1,0),(0,0,1)\}$.

   $\boxed{\text{B}}$ $\{(1,0,0),(0,3,1),(0,0,5),(0,1,2)\}$.

   $\boxed{\text{C}}$ $\{(1,2,0),(0,0,3),(0,1,1)\}$.

   $\boxed{\text{D}}$ $\{(1,1,1),(0,0,2),(0,0,0)\}$.

Continua no verso desta folha

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Recurso – 13 de Fevereiro de 2008

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

9. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares de coeficientes reais nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x + \alpha y + (\beta + 1)z = -4 \\ x - 3y + \beta z = \alpha + 1. \end{cases}$$

[2.0] (a) Discuta o sistema anterior em função dos parâmetros α e β.

[1.0] (b) Para $\alpha = -6$ e $\beta = -5$ determine o conjunto-solução do sistema.

Mude de Folha

10. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

[1.0] (a) Justifique que o polinómio característico da matriz A é

$$(\lambda - 1)^2(\lambda - 2).$$

[1.5] (b) Determine uma base do subespaço próprio, de A, associado ao valor próprio 1.

[1.5] (c) Verifique se A é diagonalizável.

Mude de Folha

11. Sejam $\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

[1.0] (a) Determine $f(2, 1)$.

[1.5] (b) Determine a matriz canónica de f, usando matrizes de mudança de base.

Mude de Folha

Continua na próxima folha

[Cotação]

12. Seja $\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ uma base do subespaço vectorial W de $\mathbb{R}^n$. Sabendo que o vector $v \in \mathbb{R}^n$ mas $v \notin W$, mostre que:

[1.5] (a) O conjunto $\{u_1, \ldots, u_{n-1}, v\}$ é linearmente independente.

[1.0] (b) O conjunto $\{u_1, \ldots, u_{n-1}, v\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Recurso – 13 de Fevereiro de 2008

Uma resolução

1. C

2. C

3. D

4. B

5. B

6. D

7. C

8. C

9. (a) Vamos fazer a discussão do sistema, usando a matriz ampliada do sistema, $[A|B]$.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & \alpha & \beta+1 & -4 \\ 1 & -3 & \beta & \alpha+1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3\to(l_3-l_1)]{l_2\to(l_2-2l_1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha+6 & \beta-1 & -6 \\ 0 & 0 & \beta-1 & \alpha \end{array}\right] \xrightarrow[l_2\to(l_2-l_3)]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha+6 & 0 & -\alpha-6 \\ 0 & 0 & \beta-1 & \alpha \end{array}\right]$$

i. Se $\beta = 1$ e $\alpha = 0$ então temos
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$
Assim, $r(A) = r([A|B]) = 2 < 3 =$ número de incógnitas, então o sistema é possível e indeterminado.

ii. Se $\beta = 1$ e $\alpha = -6$ então temos
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3\leftrightarrow l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$
Assim, $r(A) = 1 < 2 = r([A|B])$, então o sistema é impossível.

iii. Se $\beta = 1$ e $\alpha \neq -6$ e $\alpha \neq 0$ então temos
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha+6 & 0 & -\alpha-6 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{array}\right].$$
Assim, $r(A) = 2 < 3 = r([A|B])$, então o sistema é impossível.

iv. Se $\beta \neq 1$ e $\alpha \neq -6$ então $r(A) = r([A|B]) = 3 =$ número de incógnitas, então o sistema é possível e determinado.

v. Se $\beta \neq 1$ e $\alpha = -6$ então temos
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta-1 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3\leftrightarrow l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \beta-1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Assim, $r(A) = 2 = r([A|B]) < 3$ =número de incógnitas, então o sistema é possível e indeterminado.

(b) Se $\alpha = -6$ e $\beta = -5$, por (a) v), a matriz ampliada do sistema fica

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \to (-\frac{1}{6}l_2)]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \to (l_1 - l_2)]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esta última matriz corresponde ao sistema $\begin{cases} x = 3y \\ z = 1 \end{cases}$. Pelo que o conjunto-solução do sistema é

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 3y,\ z = 1\}.$$

10. (a) O polinómio característico da matriz A é, por definição, $p_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) =$

$$= \det\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 2 & -2 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & -3 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2).$$

(b) Vamos calcular o subespaço próprio associado ao valor próprio 1, M_1, ou seja, o subespaço solução do sistema homogéneo

$$(1I_3 - A)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como

$$I_3 - A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_2 \to (\ell_2 - \frac{1}{3}\ell_3)]{} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\ell_1 \to (\ell_1 - 2\ell_2) \\ \ell_3 \to (\ell_3 + 3\ell_2)}]{} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, $x = -2z$ e $y = 0$, donde

$$M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x = -2z,\ y = 0\} = \{(-2z, 0, z) :\ z \in \mathbb{R}\} = < (-2, 0, 1) > .$$

Porque $(-2, 0, 1) \neq (0, 0, 0)$, então $\{(-2, 0, 1)\}$ é uma base de M_1.

(c) Pela alínea anterior, $mg(1) = dim(M_1) = 1$. Porque $1 \leq mg(2) \leq ma(2)$ e pela alínea (a), $ma(2) = 1$, então $mg(2) = 1$. Assim,

$$mg(1) + mg(2) = 1 + 1 = 2 \neq 3 = \text{ ordem de } A.$$

Portanto, A não é diagonalizável.

11. (a) Porque $(2, 1) = 1(1, 0) + 1(1, 1)$, então $(1, 1)$ são as coordenadas de $(2, 1)$ na base $\mathcal{B}$. Se efectuarmos o produto $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, obtemos as coordenadas de $f(2, 1)$ na base $\mathcal{B}'$.

Ora, $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Donde, $f(2, 1) = 3(1, 1, 1) - 6(0, 1, 1) + 0(0, 0, 1) = (3, -3, -3)$.

(b) Façamos o esquema

$$\begin{tikzcd}
\substack{\mathbb{R}^2 \\ b.c._{\mathbb{R}^2}} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "id_{\mathbb{R}^2}"'] & \substack{\mathbb{R}^3 \\ b.c._{\mathbb{R}^3}} \\
\substack{\mathcal{B} \\ \mathbb{R}^2} \arrow[r, "f"'] & \substack{\mathcal{B}' \\ \mathbb{R}^3} \arrow[u, "id_{\mathbb{R}^3}"']
\end{tikzcd}$$

Então,

$$M_f = M(id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}', b.c._{\mathbb{R}^3}) M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') M(id_{\mathbb{R}^2}; b.c._{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

12. (a) Se $\{u_1, \ldots, u_{n-1}, v\}$ fosse linearmente dependente, existiam escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{n-1} u_{n-1} + \alpha_n v = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Se $\alpha_n \neq 0$, então,

$$v = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} u_1 - \ldots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} u_{n-1},$$

e $v \in W$, o que é impossível. Logo $\alpha_n = 0$. Mas então,

$$\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{n-1} u_{n-1} = 0_{\mathbb{R}^n},$$

o que significava que $\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ era linearmente dependente. Contradição. Portanto, $\{u_1, \ldots, u_{n-1}, v\}$ é linearmente independente.

(b) Seja $T = < u_1, \ldots, u_{n-1}, v >$ (subespaço vectorial de $\mathbb{R}^n$). Por a), $\{u_1, \ldots, u_{n-1}, v\}$ é linearmente independente, então $dim(T) = n$. Como $T \subseteq \mathbb{R}^n$ e $dim(T) = dim(\mathbb{R}^n) = n$ então, $T = \mathbb{R}^n$ e $\{u_1, \ldots, u_{n-1}, v\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$.

3.5 EXAME DE ÉPOCA ESPECIAL DE ALGA 2007/08

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Época Especial – 8 de Setembro de 2008

EXAME A

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:____________________________________

Número de caderno: | | | | | | | | | |

Respostas

	A	**B**	**C**	**D**
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				

1 - Relativamente às questões que queira responder, assinale com um X a opção que considerar adequada.

2 - Caso assinale uma opção e depois queira alterá-la, risque-a e assinale com um X a sua nova opção.

3 - Para cada um dos grupos de escolha múltipla, a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: $+1$ valores;**
- **Se responder erradamente: $-0,33$ valores.**

4 - A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 8) é dada por

$$\max\{0, \mathrm{cl}\},$$

onde cl designa a soma das classificações obtidas nos grupos de 1 a 8.

Continua no verso desta folha

1. Considere o seguinte sistema linear de 3 equações nas incógnitas x, y e z.

$$\begin{cases} x + \frac{5}{2}y - z = 0 \\ y - z = 0 \\ 2x + 3z = 0. \end{cases}$$

<u>Apenas</u> uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $(6, -4, 4)$ é uma solução do sistema.

$\boxed{\text{B}}$ $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -\frac{3}{2}z,\ \ y = z\}$ é o conjunto-solução do sistema.

$\boxed{\text{C}}$ $< (3, -2, -2), (0, 0, 0) >$ é o subespaço solução do sistema.

$\boxed{\text{D}}$ O sistema é um sistema homogéneo.

2. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Quais são as matrizes que estão em forma de escada reduzida e quais é que não estão?

$\boxed{\text{A}}$ A, B e C estão em forma de escada reduzida.

$\boxed{\text{B}}$ B e C estão em forma de escada reduzida e A não está em forma de escada reduzida.

$\boxed{\text{C}}$ C está em forma de escada reduzida e A e B não estão em forma de escada reduzida.

$\boxed{\text{D}}$ B está em forma de escada reduzida e A e C não estão em forma de escada reduzida.

3. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

O elemento da posição (1,2) da matriz $(2A - B^T)$ é:

$\boxed{\text{A}}$ 3.

$\boxed{\text{B}}$ 2.

$\boxed{\text{C}}$ 4.

$\boxed{\text{D}}$ 9.

4. Sejam A e B duas matrizes quaisquer de ordem 3. <u>Apenas</u> uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ $|-AB| = -|AB|$.

$\boxed{\text{B}}$ $|A + B| = |A| + |B|$.

$\boxed{\text{C}}$ $|2A| = 8|A|$.

$\boxed{\text{D}}$ $|B^T| = |B|$.

Continua na próxima folha

5. Considere as aplicações

$f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f_1(x, y) = (x + 1, y - 1)$

$f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $f_2(x, y) = (x + y, -y, 0)$

$f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f_3(x, y, z) = (5x + z, y - z^2)$

para todo o $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Quais destas aplicações são aplicações lineares e quais é que não o são?

- $\boxed{\text{A}}$ f_1, f_2 e f_3 são aplicações lineares.
- $\boxed{\text{B}}$ f_2, f_3 são aplicações lineares e f_1 não é aplicação linear.
- $\boxed{\text{C}}$ f_3 é aplicação linear e f_1, f_2 não são aplicações lineares.
- $\boxed{\text{D}}$ f_2 é aplicação linear e f_1, f_3 não são aplicações lineares.

6. Sejam $\mathcal{B} = \{(1, 0, 2), (-1, 1, 1), (3, 0, 0)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. A matriz

$$M(id_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}, b.c._{\mathbb{R}^3})$$

(matriz de mudança de base) em que $b.c._{\mathbb{R}^3}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^3$ é igual à matriz

- $\boxed{\text{A}}$ A.
- $\boxed{\text{B}}$ A^T.
- $\boxed{\text{C}}$ A^{-1}.
- $\boxed{\text{D}}$ $(A^T)^{-1}$.

7. Qual dos seguintes conjuntos é uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclue os vectores $(1, 1, 1)$ e $(0, 1, 1)$?

- $\boxed{\text{A}}$ $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 0)\}$.
- $\boxed{\text{B}}$ $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1), (2, 2, 1)\}$.
- $\boxed{\text{C}}$ $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 0)\}$.
- $\boxed{\text{D}}$ $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 4)\}$.

8. $\boxed{\text{A}}$
   $\boxed{\text{B}}$
   $\boxed{\text{C}}$
   $\boxed{\text{D}}$

Continua no verso desta folha

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Época Especial – 8 de Setembro de 2008

Só serão consideradas certas as respostas devidamente justificadas. Mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

9. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f(x, y, z) = (x + 2z, y - 4z)$$

para todo o $x, y, z \in \mathbb{R}$. Sejam $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (1, 0)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$. Determine:

[1.5] (a) uma base de $Nuc(f)$.

[1.5] (b) a matriz $M(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

[1.0] (c) a dimensão de $Im(f)$.

Mude de Folha

10. Considere a matriz

$$B = \begin{bmatrix} b-4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & b \\ 0 & b-1 & 3 \end{bmatrix}$$

[0.5] (a) Para que valores de b, a matriz B é invertível.

[1.0] (b) Para $b = 1$, determine a matriz inversa de B.

Mude de Folha

11. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

[1.0] (a) Determine os valores próprios de A.

[1.5] (b) Determine uma base para cada um dos subespaços próprios de A.

[1.5] (c) Determine uma matriz P, invertível, tal que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Mude de Folha

12. Sejam $\{u_1, u_2, u_3\}$ uma base de $\mathbb{R}^3$ e $v = 5u_1 - 10u_3 \in \mathbb{R}^3$.

[1.5] (a) Mostre que o conjunto $\{v, u_2, u_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

[1.0] (b) Determine as coordenadas do vector $w = -u_1 + 3u_2 + 2u_3 \in \mathbb{R}^3$ na base $\{v, u_2, u_3\}$.

Fim

Álgebra Linear e Geometria Analítica B

Departamento de Matemática FCT–UNL

Exame de Época Especial – 8 de Setembro de 2008

Uma resolução

1. A

2. D

3. B

4. B

5. D

6. B

7. D

8.

9. (a) Por definição,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Nuc} f &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : f(x,y,z)=(0,0)\}\\
&= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x+2z, y-4z)=(0,0)\}\\
&= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+2z=0 \wedge y-4z=0\}\\
&= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=-2z,\ y=4z\}\\
&= \{(-2z,4z,z) : z\in\mathbb{R}\}\\
&= <(-2,4,1)>
\end{aligned}$$

Porque $(-2,4,1)\neq(0,0,0)$ então $\{(-2,4,1)\}$ é linearmente independente. Consequentemente, $\{(-2,4,1)\}$ é uma base de $Nuc(f)$.

(b) Porque a matriz $M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')$ tem nas suas colunas, as coordenadas, na base $\mathcal{B}'$, das imagens por f dos vectores da base $\mathcal{B}$, e porque

$f(1,1,0)=(1,1)=1(1,1)+0(1,0)$

$f(1,0,1)=(3,-4)=-4(1,1)+7(1,0)$

$f(0,1,1)=(2,-3)=-3(1,1)+5(1,0)$,

então,

$$M(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')=\begin{bmatrix}1&-4&-3\\0&7&5\end{bmatrix}.$$

(c) Pelo Teorema das dimensões temos

$$3 = dim\ \mathbb{R}^3 = dim\ Nuc\ f + dim\ Im\ f = 1 + dim\ Im\ f.$$

Consequentemente, $dim\ Im\ f = 2$.

10. (a) Sabemos que a matriz B é invertível se, e só se, $|B| \neq 0$.

Ora usando o Teorema de Laplace,

$$|B| = (b-4)\det\begin{bmatrix} 2 & b \\ b-1 & 3 \end{bmatrix} = (b-4)(6-b(b-1)) = (b-4)(-b^2+b+6) = (b-4)(b-3)(b+2).$$

Portanto, B é invertível se, e só se, b for um número real distinto de $-2,\ 3,\ 4$.

(b) Calculemos a inversa de $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\ell_1 \to -\frac{1}{3}\ell_1 \\ \ell_2 \to \frac{1}{2}\ell_2 \\ \ell_3 \to \frac{1}{3}\ell_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_2 \to (\ell_2 - \frac{1}{2}\ell_3)]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right],$$

pelo que a inversa da matriz dada é

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

11. (a) O polinómio característico da matriz A é, por definição, $p_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) =$

$$= \det\left(\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ -1 & \lambda-2 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{bmatrix} = (\lambda-5)(\lambda-1)(\lambda-2).$$

Donde, os valores próprios da matriz A são os reais

$$1,\ 2,\ 5.$$

(b) Vamos calcular o subespaço próprio associado ao valor próprio 1, M_1, ou seja, o subespaço solução do sistema homogéneo

$$(1I_3 - A)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como

$$I_3 - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\ell_1 \to -\frac{1}{2}\ell_1 \\ \ell_2 \to -\ell_2}]{} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\ell_2 \to (\ell_2 - 4\ell_1) \\ \ell_3 \to (\ell_3 + 4\ell_1)}]{} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, $x = -y$ e $z = 0$, donde

$$M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x = -y,\ z = 0\} = \{(-y, y, 0) :\ y \in \mathbb{R}\} = < (-1, 1, 0) > .$$

Porque $(-1, 1, 0) \neq (0, 0, 0)$, então $\{(-1, 1, 0)\}$ é uma base de M_1.

Vamos calcular o subespaço próprio associado ao valor próprio 2, M_2, ou seja, o subespaço solução do sistema homogéneo

$$(2I_3 - A)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como

$$2I_3 - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 \to -\frac{1}{3}\ell_3]{\ell_2 \to (\ell_2 + \ell_1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_2 \to (\ell_2 + 6\ell_3)]{\ell_1 \to (\ell_1 + 2\ell_3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Então, $x = 0$ e $z = 0$, donde

$$M_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = 0, \ z = 0\} = \{(0, y, 0) : \ y \in \mathbb{R}\} =< (0, 1, 0) > .$$

Porque $(0, 1, 0) \neq (0, 0, 0)$, então $\{(0, 1, 0)\}$ é uma base de M_2.

Vamos calcular o subespaço próprio associado ao valor próprio 5, M_5, ou seja, o subespaço solução do sistema homogéneo

$$(5I_3 - A)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Como

$$5I_3 - A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_2 \to -\frac{1}{3}\ell_2]{\ell_1 \to -\frac{1}{4}\ell_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_2 \to (\ell_2 + \frac{1}{3}\ell_1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, $x = \frac{1}{2}z$ e $y = \frac{3}{2}z$, donde

$$M_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = \frac{1}{2}z, \ y = \frac{3}{2}z\} = \{(\frac{1}{2}z, \frac{3}{2}z, z) : \ z \in \mathbb{R}\} =< (1, 3, 2) > .$$

Porque $(1, 3, 2) \neq (0, 0, 0)$, então $\{(1, 3, 2)\}$ é uma base de M_5.

(c) A matriz P tem nas suas colunas os vectores de uma base de cada um dos subespaços próprios associados aos seus valores próprios. Mais, se como queremos que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

na primeira coluna de P será um vector da base de M_5, na segunda coluna de P, um vector da base de M_2 e na terceira coluna de P, um vector da base de M_1. Assim, pela alínea anterior,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

12. (a) Se $\{v, u_2, u_3\}$ fosse linearmente dependente, existiam escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, não todos nulos, tais que

$$\alpha_1 v + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Porque $v = 5u_1 - 10u_3$ então,

$$\alpha_1(5u_1 - 10u_3) + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Donde,

$$5\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + (-10\alpha_1 + \alpha_3)u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

Como $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, então

$$5\alpha_1 = 0,\ \ \alpha_2 = 0,\ \ -10\alpha_1 + \alpha_3 = 0,$$

e

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Consequentemente, $\{v, u_2, u_3\}$é um conjunto de vectores linearmente independente. Como são 3 vectores de $\mathbb{R}^3$ (espaço vectorial de dimensão 3) formam uma sua base.

(b) Porque $w = -u_1 + 3u_2 + 2u_3$ e $u_1 = \frac{1}{5}v + 2u_3$ temos que

$$w = -u_1 + 3u_2 + 2u_3 = -(\frac{1}{5}v + 2u_3) + 3u_2 + 2u_3 = -\frac{1}{5}v + 3u_2 + 0u_3.$$

Ou seja, o terno de coordenadas de w na base $\{v, u_2, u_3\}$ é

$$(-\frac{1}{5}, 3, 0).$$