

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome: _____

Número de caderno:

--	--	--	--	--	--

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

Os primeiros 5 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas. A grelha de respostas da escolha múltipla será recolhida ao fim de uma hora e cinquenta minutos de prova.

- Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:

- Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
- Se responder correctamente: +1,5 valores;
- Se responder erradamente: -0,5 valores.

A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\max\{0, M\}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.

- Duração do Exame (Sem intervalo): 2 horas e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerância).

1. Considere as bases $\mathcal{B}_1 = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ e $\mathcal{B}_2 = ((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ do espaço vectorial $\mathbb{R}^3$. Seja $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$\mathcal{M}(g; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A $g(1, 1, 1) = (1, 2, 3)$.

☐ B $\mathcal{M}(\text{id}_{\mathbb{R}^3}; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

☐ C $g(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$.

☐ D Para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tem-se $g(a, b, c) = (a, a + b, a + b + c)$.

2. Considere o espaço vectorial $\mathbb{R}^3$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ a sequência $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (\alpha, 0, 1))$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ B $\mathbb{R}^3 = \langle (1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 2, 3) \rangle$.
- ☐ C A sequência $((1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 2, 3))$ não é uma base de $\mathbb{R}^3$.
- ☐ D $(1, 1, 2) \in \langle (1, 1, 0), (0, -1, 1) \rangle$.

3. Um sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z , sobre $\mathbb{R}$, tem uma matriz ampliada equivalente por linhas à matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \alpha & 1 & \beta \\ 0 & 0 & \alpha + 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \quad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq -1$ então o sistema é possível determinado.
- ☐ B Se $\alpha = -1$ e $\beta = 0$ então o conjunto das soluções do sistema é $\{(2 - \gamma, \gamma, \gamma) : \gamma \in \mathbb{R}\}$.
- ☐ C Se $\alpha = 0$ então o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 2.
- ☐ D Se $\alpha = -1$ e $\beta \neq 0$ então o sistema é impossível.

4. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a, b, c) = (a, a + b, a + b + c),$$

para qualquer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $\text{Im } f = \langle (1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1) \rangle$.
- ☐ B f é sobrejectiva.
- ☐ C f não é injectiva.
- ☐ D $(0, 1, 0) \notin \text{Nuc } f$.

5. Seja $P \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ uma matriz invertível.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A O zero é valor próprio de P .
- ☐ B A forma de escada reduzida de P é a matriz I_n .
- ☐ C Se $X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$ e $PX = 0$ então $X = 0$.
- ☐ D Se λ é valor próprio de P então $|P - \lambda I_n| = 0$.

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

6. Seja $A \in \mathcal{M}_{3 \times 9}(\mathbb{R})$. Determine as matrizes elementares que, multiplicadas à esquerda de A , produzem em A cada uma das seguintes transformações:

- [1.0] (a) Troca da segunda linha com a terceira linha.
[1.0] (b) Multiplicação da terceira linha por 4.
[1.0] (c) Adição de $\frac{1}{2}$ da primeira linha à segunda linha.

Mude de Folha

7. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

- [1.0] (a) Calcule $|A|$ aplicando o Teorema de Laplace à linha 2 de A . Justifique que A é invertível.
[2.0] (b) Determine A^{-1} .

Mude de Folha

8. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

- [1.5] (a) Calcule os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.
[2.0] (b) Determine uma base de cada um dos subespaços próprios de A .
[1.0] (c) Determine a multiplicidade geométrica de cada valor próprio e indique, justificando, se A é diagonalizável.

Mude de Folha

- [2.0] 9. Sejam α e β , $\alpha \neq \beta$, valores próprios de uma matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$. Sabendo que X e Y são vectores próprios de A associados, respectivamente, aos valores próprios α e β , prove que

$$X^\top Y = 0.$$

Fim

1. C

2. D

3. C

4. C

5. A

6. Como sabemos, se $A \in \mathcal{M}_{3 \times 9}(\mathbb{R})$ e $A \xrightarrow{T} B$, sendo T uma transformação elementar sobre as linhas de A , então $B = EA$, onde $E \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ é a matriz elementar, sobre linhas, associada à transformação elementar T , isto é, $I_3 \xrightarrow{T} E$. Assim:

$$(a) \ E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ (pois } I_3 \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{)}.$$

$$(b) \ E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ (pois } I_3 \xrightarrow{4l_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{)}.$$

$$(c) \ E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ (pois } I_3 \xrightarrow{l_2 + \frac{1}{2}l_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{)}.$$

7. (a) Aplicando o Teorema de Laplace, à linha 2 de A , para calcular $|A|$, tem-se

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{\text{Lapl.}}{=} 1 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 4 \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -1 \times (6 - 9) - 4 \times (3 - 2) = 3 - 4 = -1. \end{aligned}$$

Como $|A| = -1 \neq 0$ concluímos que A é invertível.

(b) Abreviadamente, vamos determinar A^{-1} fazendo $[A \mid I_3] \xrightarrow{(\text{linhas})} [I_3 \mid A^{-1}]$.

$$\begin{aligned} [A \mid I_3] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{l_2 + (-1)l_1 \\ l_3 + (-1)l_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \\ &\xrightarrow{l_3 + 2l_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{l_1 + (-3)l_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 10 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \\ &\xrightarrow{l_1 + (-2)l_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 12 & -3 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 2 \end{array} \right] = [I_3 \mid A^{-1}]. \end{aligned}$$

Logo

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 12 & -3 & -8 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

■ Alternativamente, podíamos determinar A^{-1} utilizando $\text{adj } A$, a matriz adjunta de A . Tem-se

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{|A|} \text{adj } A = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -12 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 8 & -1 & -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 12 & -3 & -8 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

8. (a) O polinómio característico de A é

$$\begin{aligned} |A - xI_3| &= \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 0 & -1-x & 0 \\ 2 & 1 & -x \end{vmatrix} \stackrel{\text{Lapl.}}{=} (-1-x)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 2 & -x \end{vmatrix} \\ &= (-1-x)[(1-x)(-x) - (2 \times 1)] = (-1-x)(x^2 - x - 2) \\ &= (-1-x)(x-2)(x+1). \end{aligned}$$

Os valores próprios de A , sendo os zeros reais do polinómio característico, são: -1 e 2 , com $\text{ma}(-1) = 2$ e $\text{ma}(2) = 1$.

- (b) Se α é um valor próprio de A sabemos que o subespaço próprio de A associado ao valor α , M_α , é:

$$M_\alpha = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : AX = \alpha X\} = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - \alpha I_3)X = 0\}.$$

- Seja M_{-1} o subespaço próprio de A associado ao valor próprio -1 . Tem-se:

$$M_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - (-1)I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Cálculo auxiliar:

$$(A - (-1)I_3|0) = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_3 + (-1)l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{2}l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{f.e.r.}).$$

Logo,

$$\begin{aligned} M_{-1} &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : a = -\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \\ b \\ c \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}b \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}c \\ 0 \\ c \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Concluimos então que a sequência $\left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_{-1} pois gera M_{-1} e é

linearmente independente (basta notar que $\alpha \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$).

- Seja M_2 o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 2 . Tem-se:

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - 2I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{aligned} (A - 2I_3|0) &= \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_3 + 2l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_3 + l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow \\ &\xrightarrow{\frac{-1}{3}l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{3}l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_1 + l_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{f.e.r.}) \end{aligned}$$

Logo,

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : a = c \wedge b = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ c \end{bmatrix} : c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Concluimos então que a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ é uma base de M_2 pois gera M_2 e é linearmente independente (basta notar que $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$).

(c) Pela resolução da alínea anterior temos que $\text{mg}(-1) = \dim M_{-1} = 2$ e $\text{mg}(2) = \dim M_2 = 1$.

Uma condição necessária e suficiente para que a matriz A seja diagonalizável, é que a soma das multiplicidades geométricas dos seus valores próprios iguale a ordem da matriz A . Como

$$\text{mg}(-1) + \text{mg}(2) = 2 + 1 = 3 = \text{ordem de } A,$$

concluimos que A é diagonalizável.

9. Como X e Y são vectores próprios de $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ associados, respectivamente, aos valores próprios α e β , temos $X, Y \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R}) \setminus \{0_{n \times 1}\}$, $AX = \alpha X$ e $AY = \beta Y$. Vejamos que, como A é simétrica (isto é, $A^\top = A$) e $\alpha \neq \beta$, tem-se $X^\top Y = 0$.

Como $AX = \alpha X$ tem-se $(AX)^\top = (\alpha X)^\top$, ou equivalentemente, $X^\top A^\top = \alpha X^\top$. Dado que, por hipótese, A é simétrica, tem-se

$$X^\top A = \alpha X^\top.$$

Por outro lado, dado que $AY = \beta Y$, multiplicando ambos os membros desta igualdade, à esquerda, por $X^\top$, obtemos $X^\top (AY) = X^\top (\beta Y)$, isto é,

$$(X^\top A) Y = \beta X^\top Y.$$

Atendendo a que $X^\top A = \alpha X^\top$, da igualdade $(X^\top A) Y = \beta X^\top Y$ resulta

$$\alpha X^\top Y = \beta X^\top Y,$$

isto é,

$$(\alpha - \beta) X^\top Y = 0.$$

Como $\alpha \neq \beta$ concluimos, como pretendíamos, que $X^\top Y = 0$.