FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica *E*

Exame de Época de Recurso – 15 de Fevereiro de 2012

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome:____________________________________

Número de caderno: | | | | | | |

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Atenção

Os primeiros 5 grupos desta prova são de escolha múltipla. Em cada um destes 5 grupos apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas. A grelha de respostas da escolha múltipla será recolhida ao fim de uma hora e cinquenta minutos de prova.

- **Cotação: A cotação total desta prova é de 20 valores. Para cada um dos grupos de escolha múltipla a cotação atribuída é a seguinte:**
  - **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
  - **Se responder correctamente: +1,5 valores;**
  - **Se responder erradamente: −0,5 valores.**

  A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\boxed{\max\{0, M\}}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.
- **Duração do Exame: 2 horas e 30 minutos (+ 30 minutos de tolerância).**

---

1. Considere a base $\mathcal{B} = \big((1,1),(1,0)\big)$ do espaço vectorial $\mathbb{R}^2$. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação linear tal que

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ O vector $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tem sequência de coordenadas $(b, a-b)$ na base $\mathcal{B}$.

$\boxed{\text{B}}$ $\operatorname{Nuc} f = \{(0,0)\}$.

$\boxed{\text{C}}$ Para qualquer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tem-se $f(a,b) = (a-4b, a)$.

$\boxed{\text{D}}$ $f(1,0) = (1,1)$.

Continua no verso desta folha

2. Considere as matrizes

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $H \in \mathcal{M}_{3\times 7}(\mathbb{R})$ então as matrizes H e $PQRH$ têm a mesma característica.

B $QR = RQ$.

C P, Q e R são matrizes elementares.

D $|PQR| = -4$.

3. Um sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$, tem uma matriz ampliada equivalente por linhas à matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha+1 & 0 & \beta-1 \\ 0 & 0 & \beta-1 & \alpha+1 \end{array}\right], \quad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $\alpha = -1$ e $\beta \neq 1$ então o sistema é impossível.

B Se $\alpha = -1$ e $\beta = 1$ então o conjunto das soluções do sistema é $\{(y - z,\ y,\ z) :\ y, z \in \mathbb{R}\}$.

C Existem $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ para os quais o sistema é indeterminado com grau de indeterminação 1.

D Se $\alpha = 0$ e $\beta = 2$ então o sistema é possível determinado.

4. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$f(a, b) = (a + b,\ 2a + b,\ 3a + b),$$

para qualquer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $\operatorname{Im} f = \big\langle (1, 2, 3), (1, 1, 1) \big\rangle$.

B f não é sobrejectiva.

C $(2, 3, 4) \in \operatorname{Im} f$.

D f não é injectiva.

5. Considere o espaço vectorial $\mathbb{R}^3$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Para qualquer $\beta \in \mathbb{R}$ a sequência $\big((1, 0, 0), (0, 1, 0), (\beta, \beta, 1)\big)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

B $\mathbb{R}^3 = \big\langle (1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 3, 3) \big\rangle$.

C A sequência $\big((1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 3, 3)\big)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

D $(1, 3, 3) \in \big\langle (1, 1, 1), (0, 1, 1) \big\rangle$.

FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica *E*

Exame de Época de Recurso – 15 de Fevereiro de 2012

Só serão consideradas as respostas devidamente justificadas. Na resolução, mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

[2.0] **6.** Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Determine matrizes elementares E_1, E_2 tais que

$$E_2 E_1 \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a+c \\ c \end{bmatrix}.$$

Mude de Folha

7. Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

[1.0] (a) Calcule $|M|$ aplicando o Teorema de Laplace à linha 1 de M. Justifique que M é invertível.

[2.0] (b) Determine M^{-1}. **Verifique** que apresenta, efectivamente, a matriz M^{-1}.

Mude de Folha

[1.0] **8.** Mostre que o conjunto $F = \left\{ H \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : \ H^\top = H \right\}$ é subespaço do espaço vectorial real $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Mude de Folha

9. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

[1.5] (a) Calcule os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.

[2.0] (b) Determine uma base de cada um dos subespaços próprios de A.

[1.5] (c) Justifique que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tais que $P^{-1}AP = D$.

Mude de Folha

[1.5] **10.** Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Mostre que a matriz A é diagonalizável se, e só se, tem n vectores próprios linearmente independentes.

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica *E*

Exame de Época de Recurso – 1 de Fevereiro de 2012

Uma resolução com notas explicativas

1. C

2. B

3. C

4. D

5. C

6. Como sabemos, se $A \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R})$ e $A \xrightarrow[T]{} B$, sendo T uma transformação elementar sobre as linhas de A, então $B = EA$, em que $E \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é a matriz elementar, sobre linhas, associada à transformação elementar T, isto é, $I_3 \xrightarrow[T]{} E$.

Dado que

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1+l_3]{} \begin{bmatrix} a+c \\ b \\ c \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} \begin{bmatrix} b \\ a+c \\ c \end{bmatrix}$$

tem-se

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_1} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a+c \\ c \end{bmatrix},$$

em que E_1 e E_2 são as matrizes elementares de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ associadas, respectivamente, às transformações elementares $l_1 + l_3$ e $l_1 \leftrightarrow l_2$, isto é,

$$I_3 \xrightarrow[l_1+l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_1 \qquad \text{e} \qquad I_3 \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2.$$

■Alternativamente, se considerarmos a sequência de transformações elementares

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} \begin{bmatrix} b \\ a \\ c \end{bmatrix} \xrightarrow[l_2+l_3]{} \begin{bmatrix} b \\ a+c \\ c \end{bmatrix}$$

então

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_2} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_1} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ a+c \\ c \end{bmatrix},$$

em que E_1 e E_2 são as matrizes elementares de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ associadas, respectivamente, às transformações elementares $l_1 \leftrightarrow l_2$ e $l_2 + l_3$, isto é,

$$I_3 \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_1 \qquad \text{e} \qquad I_3 \xrightarrow[l_1+l_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2.$$

■

7. (a) Aplicando o Teorema de Laplace, à linha 1 de M, para calcular $|M|$, tem-se

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 6 \end{vmatrix} \underset{l_1}{\overset{\text{Lapl.}}{=}} 1 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 2 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (24 - 35) - 2 \times (12 - 15) + 2 \times (14 - 12) = -1.$$

Como $|M| = -1 \neq 0$ concluímos que A é invertível.

(b) Abreviadamente, vamos determinar M^{-1} fazendo $[M \mid I_3] \xrightarrow[(linhas)]{} [I_3 \mid M^{-1}]$.

$$[M \mid I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3+(-3)l_1]{l_2+(-2)l_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow[l_1+(-2)l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1+(-2)l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 11 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] = [I_3 \mid M^{-1}].$$

Logo

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 11 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

■<u>Alternativamente</u>, podíamos determinar M^{-1} utilizando adj M, a matriz adjunta de M. Tem-se

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}\operatorname{adj} M = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^\top$$

$$= \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -11 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 11 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

■

8. Utilizemos o Critério de Subespaço Vectorial para verificar que $F = \{H \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : H^\top = H\}$ é subespaço do espaço vectorial real $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

- Atendendo à definição de F conclui-se que $F \subseteq \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.
- $0_{n\times n} \in F$ porque $(0_{n\times n})^\top = 0_{n\times n}$.
- Sejam $X, Y \in F$. Vejamos que $X + Y \in F$.
  Como $X, Y \in F$ tem-se $X^\top = X$ e $Y^\top = Y$. Assim tem-se
  $$(X+Y)^\top = X^\top + Y^\top = X + Y.$$
  Logo $X + Y \in F$.
- Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $Y \in F$. Vejamos que $\alpha Y \in F$.
  Como $Y \in F$ tem-se $Y^\top = Y$. Assim tem-se
  $$(\alpha Y)^\top = \alpha Y^\top = \alpha Y.$$
  Logo $\alpha Y \in F$.

Concluímos, portanto, que F é subespaço do espaço vectorial real $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

9. (a) O polinómio característico de A é

$$|A - xI_3| = \begin{vmatrix} 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 4-x & 1 \\ 0 & 1 & 4-x \end{vmatrix} \underset{l_1}{\overset{\text{Lapl.}}{=}} (3-x)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4-x & 1 \\ 1 & 4-x \end{vmatrix}$$
$$= (3-x)\left[(4-x)^2 - 1^2\right] = (3-x)(3-x)(5-x).$$

Os valores próprios de A, sendo os zeros reais do polinómio característico, são: 3 e 5, com $\mathrm{ma}(3) = 2$ e $\mathrm{ma}(5) = 1$.

(b) Se α é um valor próprio de A sabemos que o subespaço próprio de A associado ao valor α, M_α, é:

$$M_\alpha = \{X \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : AX = \alpha X\} = \{X \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : (A - \alpha I_3)X = 0\}.$$

- Seja M_3 o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 3. Tem-se:

$$M_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \ (A - 3I_3)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

<u>Cálculo auxiliar</u>:

$$(A - 3I_3|0) = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 + (-1)l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(f.e.r.)}$$

Logo,

$$M_3 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \ b = -c \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ -c \\ c \end{bmatrix} : \ a, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -c \\ c \end{bmatrix} : \ a, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} : \ a, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Concluímos então que a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_3 porque gera M_3 e é linearmente independente (pois $\alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$). Tem-se, então, que $\text{mg}(3) = \dim M_3 = 2$.

- Seja M_5 o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 5. Tem-se:

$$M_5 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \ (A - 5I_3)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

<u>Cálculo auxiliar</u>:

$$(A - 5I_3|0) = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_3 + l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-\frac{1}{2}l_1 \\ -l_2}]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(f.e.r.)}$$

Logo,

$$M_5 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 1}(\mathbb{R}) : \ a = 0 \ \wedge \ b = c \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ c \end{bmatrix} : \ c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ c\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} : \ c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Concluímos então que a sequência $\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_5 pois gera M_5 e é linearmente independente (basta notar que $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$). Tem-se, então, que $\text{mg}(5) = \dim M_5 = 1$.

(c) Uma condição necessária e suficiente para que a matriz A seja diagonalizável, é que a soma das multiplicidades geométricas dos seus valores próprios iguale a ordem da matriz A. Pela alínea anterior, temos

$$\text{mg}(3) + \text{mg}(5) = 3 = \text{ordem de } A,$$

logo A é diagonalizável. Nestas condições, sabemos que A é semelhante a uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ com os elementos 3, 3 e 5 na diagonal. Se $D = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{3} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{5} \end{bmatrix}$ então considerando, por exemplo, a matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, onde a primeira e a segunda colunas são os vectores da base de M_3 e a terceira coluna é o vector da base de M_5, a matriz P é invertível e, além disso, tem-se $P^{-1}AP = D$.

10. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Para demonstrar o resultado pretendido basta notar que as seguintes afirmações são equivalentes:

- A matriz A é diagonalizável.
- Existe $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, invertível, tal que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$.
- Existe $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, invertível, tal que $AP = P\begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$.
- Existe $P = \begin{bmatrix} X_1 \mid \cdots \mid X_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, invertível, tal que
$$A\begin{bmatrix} X_1 \mid \cdots \mid X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \mid \cdots \mid X_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}.$$
($X_i \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, n$, representa a coluna i de P.)
- Existe $P = \begin{bmatrix} X_1 \mid \cdots \mid X_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, invertível, tal que
$$\begin{bmatrix} AX_1 \mid \cdots \mid AX_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 X_1 \mid \cdots \mid \alpha_n X_n \end{bmatrix}$$
($X_i \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, n$, representa a coluna i de P e, como sabemos, P é invertível se, e só se, as colunas de P são linearmente independentes.)
- Existem $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, linearmente independentes, tais que
$$AX_1 = \alpha_1 X_1, \ldots, AX_n = \alpha_n X_n.$$
- Existem $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$, linearmente independentes, que são vectores próprios de A associados, respectivamente, aos valores próprios $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de A.
- Existem n vectores próprios de A linearmente independentes.