

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome (completo): _____

Número de aluno:

Número do caderno:

Atenção

Esta prova consiste em 10 grupos:

- Grupos 1 a 5 - Escolha múltipla.
- Grupos 6 e 7 - Para completar, no enunciado, sem apresentar justificações.
- Grupos 8 a 10 - Para responder justificando todas as afirmações.

O enunciado da prova é composto por 2 folhas que não podem ser desagradadas. Quando terminar a prova tem de entregar o enunciado completo.

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.		X		
2.			X	
3.			X	
4.				X
5.			X	

Em cada um dos Grupos 1 a 5 apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas.

Para cada um destes grupos a cotação atribuída é a seguinte:

- Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;
- Se responder correctamente: +1,5 valores;
- Se responder erradamente: -0,5 valores.

A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\max\{0, M\}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.

1. Seja $Q \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ e considere as matrizes $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tais que

$$Q \xrightarrow{-3I_1} Q_1 \xrightarrow{l_1+4l_2} Q_2 \xrightarrow{l_1 \leftrightarrow l_2} Q_3.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

☐ A Se $\det Q = 2$ então $\det Q_3 = 6$.

☐ B Se $Q_3 = I_2$ então Q é invertível e $Q^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

☐ C $Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} Q_3$.

☐ D $Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Q$.

2. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z , sobre $\mathbb{R}$, cuja matriz ampliada é equivalente por linhas à matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta - 2 & \beta - 1 & 2 \\ 0 & 0 & \beta - 1 & \alpha + 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A Se $\beta = 1$ e $\alpha \neq -2$ então o sistema é impossível.
- ☐ B Se $\beta = 1$ e $\alpha = -2$ então o conjunto solução do sistema é $\{(-1 - z, -2, z) : z \in \mathbb{R}\}$.
- ☐ C Se $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ então o sistema é possível indeterminado.
- ☐ D Se $\beta = 2$ e $\alpha = 0$ então o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 1.

3. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 4}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $AB \in \mathcal{M}_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ e $(AB)_{12} = 3$.
- ☐ B A matriz A não é invertível.
- ☐ C A forma de escada reduzida de B é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
- ☐ D $A^\top + 2I_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

4. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ e seja $B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$, com $\det B = \alpha \neq 0$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $\det(AB^\top) = -6\alpha$.
- ☐ B $\det(2B) = 8\alpha$.
- ☐ C B é invertível e $\det(B^{-1}B^\top) = 1$.
- ☐ D Em A , o complemento algébrico da posição $(2, 3)$ é igual a -6 .

5. Considere o referencial ortonormado e directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ e os pontos $A(2, 1, 0)$, $B(0, 1, 0)$ e $C(2, 3, -1)$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- ☐ A $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -2e_2 - 4e_3$.
- ☐ B $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.
- ☐ C A área do triângulo definido pelos pontos A , B e C é $\sqrt{20}$.
- ☐ D Os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são perpendiculares.

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome (completo): _____

Número de aluno:

--	--	--	--	--

Nas alíneas dos Grupos 6 e 7 indique a resposta, no espaço respectivo, não apresentando quaisquer cálculos ou justificações. Nestas questões a cotação atribuída a cada alínea é a seguinte:

- Se responder correctamente: 0,5 valores.
- Se não responder ou responder erradamente: 0 valores.

[Cotação]

6. Em $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços

$$F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a = b - 2c\} \quad \text{e} \quad G = \langle (1, 1, 0), (2, 2, 2), (0, 0, 2) \rangle.$$

[0,5] (a) $\dim F = 2$.

[0,5] (b) $\dim G = 2$.

[0,5] (c) $\dim(F + G) = 3$.

[0,5] (d) $\dim(F \cap G) = 1$.

7. Seja $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ uma matriz que tem o valor próprio 2 e o valor próprio 0.

[0,5] (a) Se $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio 2 então $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$.

[0,5] (b) Se $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio 0 então $A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

[0,5] (c) $\det A = 0$.

Nos Grupos 8, 9 e 10 só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.
Na sua resolução mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

8. Considere a aplicação linear $f : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (2a, b - c),$$

para qualquer $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Determine:

- [1,0] (a) Uma base do núcleo de f .
- [1,0] (b) A dimensão da imagem de f .
- [0,5] (c) Se f é sobrejectiva.
- [1,0] (d) A matriz de f em relação às bases $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$ e $\mathcal{B}' = ((0, 1), (2, 0))$, isto é, a matriz $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Mude de Folha

9. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

- [1,0] (a) Calcule os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.
- [1,5] (b) Determine uma base de cada um dos subespaços próprios de A .
- [1,0] (c) Justifique que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ e uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ tais que $P^{-1}AP = D$.

Mude de Folha

[2,0] 10. Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ tal que $A^2 + 2A = 0$. Demonstre que se α é valor próprio de A então $\alpha \in \{0, -2\}$.

Fim

8. (a) Tem-se

$$\begin{aligned}
 \text{Nuc } f &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : f \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = (0, 0) \right\} \\
 &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : (2a, b - c) = (0, 0) \right\} \\
 &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : 2a = 0 \wedge b - c = 0 \right\} \\
 &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : a = 0 \wedge b = c \right\} \\
 &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & c \\ c & d \end{bmatrix} : c, d \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} : c, d \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \left\{ c \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : c, d \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle.
 \end{aligned}$$

Mostrámos que a sequência $\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ gera $\text{Nuc } f$ e, pelo Critério de Independência Linear, também é linearmente independente pois

$$\alpha \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Logo $\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de $\text{Nuc } f$.

(b) Dado que $f : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, pelo Teorema da Dimensão sabemos que

$$\dim \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = \dim \text{Nuc } f + \dim \text{Im } f.$$

Como $\dim \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = 4$ e, pela alínea anterior, $\dim \text{Nuc } f = 2$ concluímos que $\dim \text{Im } f = 2$.

(c) Uma aplicação linear é sobrejectiva se, e só se, o subespaço $\text{Im } f$ coincide com o conjunto de chegada que, neste caso, é $\mathbb{R}^2$. Dado que $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ e, pela alínea anterior, $\dim \text{Im } f = 2 = \dim \mathbb{R}^2$, concluímos que

$$\text{Im } f = \mathbb{R}^2$$

pelo que f é sobrejectiva.

(d) Como

$$\begin{aligned}
 f \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) &= (2, 0) = \mathbf{0}(0, 1) + \mathbf{1}(2, 0) \\
 f \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) &= (2, 1) = \mathbf{1}(0, 1) + \mathbf{1}(2, 0) \\
 f \left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right) &= (0, 0) = \mathbf{0}(0, 1) + \mathbf{0}(2, 0) \\
 f \left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) &= (0, 2) = \mathbf{2}(0, 1) + \mathbf{0}(2, 0)
 \end{aligned},$$

de acordo com a definição de $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$, temos $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

9. (a) O polinómio característico de A é

$$\begin{aligned} |A - xI_3| &= \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 1 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix} \stackrel{\text{Lapl.}}{=} (2-x)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} \\ &= (2-x) [(1-x)^2 - 1^2] = (2-x)(-x)(2-x). \end{aligned}$$

Os valores próprios de A , sendo os zeros reais do polinómio característico, são: 2 e 0, com $\text{ma}(2) = 2$ e $\text{ma}(0) = 1$.

- (b) Se α é um valor próprio de A sabemos que o subespaço próprio de A associado ao valor α , M_α , é:

$$M_\alpha = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : AX = \alpha X\} = \{X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - \alpha I_3)X = 0\}.$$

- Seja M_2 o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 2. Tem-se:

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - 2I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Cálculo auxiliar:

$$(A - 2I_3|0) = \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_2 + l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{(-1)l_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{f.e.r.})$$

Logo,

$$\begin{aligned} M_2 &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : a = b \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} b \\ b \\ c \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} b \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Concluimos então que a sequência $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_2 porque gera M_2 e é linearmente independente (pois $\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$). Tem-se, então, que $\text{mg}(2) = \dim M_2 = 2$.

- Seja M_0 o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 0. Tem-se:

$$M_0 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : (A - 0I_3) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Cálculo auxiliar:

$$(A - 0I_3|0) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_2 + (-1)l_1, \frac{1}{2}l_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{l_2 \leftrightarrow l_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (\text{f.e.r.})$$

Logo,

$$\begin{aligned} M_0 &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 1}(\mathbb{R}) : a = -b \wedge c = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -b \\ b \\ 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ b \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Concluimos então que a sequência $\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ é uma base de M_0 pois gera M_0 e é linearmente independente (basta notar que $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$). Tem-se, então, que $\text{mg}(0) = \dim M_0 = 1$.

- (c) Uma condição necessária e suficiente para que a matriz A seja diagonalizável, é que a soma das multiplicidades geométricas dos seus valores próprios iguale a ordem da matriz A . Pela alínea anterior, temos

$$\text{mg}(2) + \text{mg}(3) = 3 = \text{ordem de } A,$$

logo A é diagonalizável. Nestas condições, sabemos que A é semelhante a uma matriz diagonal

$D \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ com os elementos 2, 2 e 0 na diagonal. Se $D = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ então considerando, por

exemplo, a matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, onde a primeira e a segunda colunas são os vectores da base de M_2 e a terceira coluna é o vector da base de M_0 , a matriz P é invertível e, além disso, tem-se $P^{-1}AP = D$.

- 10.** Suponhamos que α é valor próprio de A e seja X um vector próprio de A associado ao valor próprio α , isto é, $X \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$ é não nulo e tem-se $AX = \alpha X$.

Dado que, por hipótese, se tem $A^2 + 2A = 0$, multiplicando ambos os membros desta igualdade, à direita, por X obtemos $(A^2 + 2A)X = 0X$, isto é, $(A^2 + 2A)X = 0$. Atendendo, em particular, ao facto de X ser vector próprio de A associado ao valor próprio α tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= (A^2 + 2A)X = (A^2)X + (2A)X = A(AX) + 2(AX) = A(\alpha X) + 2(\alpha X) \\ &= \alpha(AX) + 2\alpha X = \alpha(\alpha X) + 2\alpha X = \alpha^2 X + 2\alpha X = (\alpha^2 + 2\alpha) X. \end{aligned}$$

Como $(\alpha^2 + 2\alpha)X = 0$ e $X \neq 0$ podemos afirmar que $\alpha^2 + 2\alpha = 0$, isto é, que $\alpha(\alpha + 2) = 0$ e, portanto, $\alpha = 0$ ou $\alpha = -2$. Logo, se α é valor próprio de A então $\alpha \in \{0, -2\}$.