FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Exame de Época de Recurso – 9 de Janeiro de 2013

Duração: 2 horas e 30 minutos (+30 minutos de tolerância)

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome (completo): ______________________________

Número de aluno: | | | | | | **Número do caderno:** | | | | | |

Atenção

Esta prova consiste em 10 grupos:

- **Grupos 1 a 5 - Escolha múltipla.**
- **Grupos 6 e 7 - Para completar, no enunciado, sem apresentar justificações.**
- **Grupos 8 a 10 - Para responder justificando todas as afirmações.**

O enunciado da prova é composto por 2 folhas que não podem ser desagrafadas. Quando terminar a prova tem de entregar o enunciado completo.

Em cada um dos Grupos 1 a 5 apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas.

Para cada um destes grupos a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: +1,5 valores;**
- **Se responder erradamente: −0,5 valores.**

A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\boxed{\max\{0, M\}}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

1. Seja $Q \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e considere as matrizes $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que

$$Q \xrightarrow[-3l_1]{} Q_1 \xrightarrow[l_1+4l_2]{} Q_2 \xrightarrow[l_1\leftrightarrow l_2]{} Q_3.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

$\boxed{\text{A}}$ Se $\det Q = 2$ então $\det Q_3 = 6$.

$\boxed{\text{B}}$ Se $Q_3 = I_2$ então Q é invertível e $Q^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{C}}$ $Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}Q_3$.

$\boxed{\text{D}}$ $Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}Q$.

Continua no verso desta folha

2. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$, cuja matriz ampliada é equivalente por linhas à matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta-2 & \beta-1 & 2 \\ 0 & 0 & \beta-1 & \alpha+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $\beta = 1$ e $\alpha \neq -2$ então o sistema é impossível.

B Se $\beta = 1$ e $\alpha = -2$ então o conjunto solução do sistema é $\{(-1-z,\ -2,\ z) :\ z \in \mathbb{R}\}$.

C Se $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ então o sistema é possível indeterminado.

D Se $\beta = 2$ e $\alpha = 0$ então o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 1.

3. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $AB \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ e $(AB)_{12} = 3$.

B A matriz A não é invertível.

C A forma de escada reduzida de B é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

D $A^\top + 2I_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

4. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e seja $B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, com $\det B = \alpha \neq 0$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $\det\left(AB^\top\right) = -6\alpha$.

B $\det(2B) = 8\alpha$.

C B é invertível e $\det\left(B^{-1}B^\top\right) = 1$.

D Em A, o complemento algébrico da posição $(2, 3)$ é igual a -6.

5. Considere o referencial ortonormado e directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ e os pontos $A(2, 1, 0)$, $B(0, 1, 0)$ e $C(2, 3, -1)$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -2e_2 - 4e_3$.

B $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \mid \overrightarrow{BC} = 0$.

C A área do triângulo definido pelos pontos A, B e C é $\sqrt{20}$.

D Os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são perpendiculares.

Continua na próxima folha

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome (completo): ____________________

Número de aluno: | | | | | |

Nas alíneas dos Grupos 6 e 7 indique a resposta, no espaço respectivo, não apresentando quaisquer cálculos ou justificações. Nestas questões a cotação atribuída a cada alínea é a seguinte:

- **Se responder correctamente:** $0,5$ **valores.**
- **Se não responder ou responder erradamente:** 0 **valores.**

[Cotação]

6. Em $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços

$$F = \Big\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \ a = b - 2c\Big\} \quad \text{e} \quad G = \Big\langle (1,1,0), (2,2,2), (0,0,2) \Big\rangle .$$

[0,5] (a) $\dim F =$ ____ .

[0,5] (b) $\dim G =$ ____ .

[0,5] (c) $\dim(F+G) =$ ____ .

[0,5] (d) $\dim(F \cap G) =$ ____ .

7. Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ uma matriz que tem o valor próprio 2 e o valor próprio 0.

[0,5] (a) Se $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio 2 então $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$.

[0,5] (b) Se $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio 0 então $A \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$.

[0,5] (c) $\det A =$ ____ .

Continua no verso desta folha

Nos Grupos 8, 9 e 10 só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.
Na sua resolução mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

8. Considere a aplicação linear $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (2a, b-c),$$

para qualquer $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Determine:

[1,0] (a) Uma base do núcleo de f.

[1,0] (b) A dimensão da imagem de f.

[0,5] (c) Se f é sobrejectiva.

[1,0] (d) A matriz de f em relação às bases $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$ e $\mathcal{B}' = \big((0,1),(2,0)\big)$, isto é, a matriz $\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')$.

Mude de Folha

9. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

[1,0] (a) Calcule os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.

[1,5] (b) Determine uma base de cada um dos subespaços próprios de A.

[1,0] (c) Justifique que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tais que $P^{-1}AP = D$.

Mude de Folha

[2,0] **10.** Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A^2 + 2A = 0$. Demonstre que se α é valor próprio de A então $\alpha \in \{0, -2\}$.

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Exame de Época de Recurso – 9 de Janeiro de 2013

Duração: 2 horas e 30 minutos (+30 minutos de tolerância)

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome (completo): ______________________________

Número de aluno: | | | | | | **Número do caderno:** | | | | | |

Atenção

Esta prova consiste em 10 grupos:

- **Grupos 1 a 5 - Escolha múltipla.**
- **Grupos 6 e 7 - Para completar, no enunciado, sem apresentar justificações.**
- **Grupos 8 a 10 - Para responder justificando todas as afirmações.**

O enunciado da prova é composto por 2 folhas que não podem ser desagrafadas. Quando terminar a prova tem de entregar o enunciado completo.

Em cada um dos Grupos 1 a 5 apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas.

Para cada um destes grupos a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: +1,5 valores;**
- **Se responder erradamente: −0,5 valores.**

A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\boxed{\max\{0, \mathrm{M}\}}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

1. Seja $Q \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e considere as matrizes $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que

$$Q \xrightarrow[-3l_1]{} Q_1 \xrightarrow[l_1+4l_2]{} Q_2 \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} Q_3.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $Q_3 = I_2$ então Q é invertível e $Q^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

B Se $\det Q = 2$ então $\det Q_3 = 6$.

C $Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Q$.

D $Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} Q_3$.

Continua no verso desta folha

2. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A A matriz A não é invertível.

B $AB \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ e $(AB)_{12} = 3$.

C $A^\top + 2I_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

D A forma de escada reduzida de B é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Considere o referencial ortonormado e directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ e os pontos $A(2,1,0)$, $B(0,1,0)$ e $C(2,3,-1)$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \mid \overrightarrow{BC} = 0$.

B $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -2e_2 - 4e_3$.

C Os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são perpendiculares.

D A área do triângulo definido pelos pontos A, B e C é $\sqrt{20}$.

4. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$, cuja matriz ampliada é equivalente por linhas à matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta-2 & \beta-1 & 2 \\ 0 & 0 & \beta-1 & \alpha+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A Se $\beta = 1$ e $\alpha = -2$ então o conjunto solução do sistema é $\{(-1-z,\ -2,\ z) :\ z \in \mathbb{R}\}$.

B Se $\beta = 1$ e $\alpha \neq -2$ então o sistema é impossível.

C Se $\beta = 2$ e $\alpha = 0$ então o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 1.

D Se $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ então o sistema é possível indeterminado.

5. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e seja $B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, com $\det B = \alpha \neq 0$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $\det(2B) = 8\alpha$.

B $\det\left(AB^\top\right) = -6\alpha$.

C Em A, o complemento algébrico da posição $(2,3)$ é igual a -6.

D B é invertível e $\det\left(B^{-1}B^\top\right) = 1$.

Continua na próxima folha

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome (completo): ______________________________

Número de aluno: | | | | | |

Nas alíneas dos Grupos 6 e 7 indique a resposta, no espaço respectivo, não apresentando quaisquer cálculos ou justificações. Nestas questões a cotação atribuída a cada alínea é a seguinte:

- **Se responder correctamente:** $0,5$ **valores.**
- **Se não responder ou responder erradamente:** 0 **valores.**

[Cotação]

6. Em $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços

$$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \; a = b \;\wedge\; c = 2b\} \quad \text{e} \quad G = \Big\langle (-1,1,1), (-2,2,0), (0,0,1) \Big\rangle .$$

[0,5] (a) $\dim F =$ _____ .

[0,5] (b) $\dim G =$ _____ .

[0,5] (c) $\dim(F+G) =$ _____ .

[0,5] (d) $\dim(F \cap G) =$ _____ .

7. Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ uma matriz que tem o valor próprio 3 e o valor próprio 0.

[0,5] (a) Se $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio 3 então $A \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$.

[0,5] (b) Se $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio 0 então $A \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$.

[0,5] (c) $\det A =$ _____ .

Continua no verso desta folha

Nos Grupos 8, 9 e 10 só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.
Na sua resolução mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

8. Considere a aplicação linear $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (2a, b-c),$$

para qualquer $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Determine:

[1,0] (a) Uma base do núcleo de f.

[1,0] (b) A dimensão da imagem de f.

[0,5] (c) Se f é sobrejectiva.

[1,0] (d) A matriz de f em relação às bases $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$ e $\mathcal{B}' = \big((0,1),(2,0)\big)$, isto é, a matriz $\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')$.

Mude de Folha

9. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

[1,0] (a) Calcule os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.

[1,5] (b) Determine uma base de cada um dos subespaços próprios de A.

[1,0] (c) Justifique que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tais que $P^{-1}AP = D$.

Mude de Folha

[2,0] **10.** Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A^2 + 2A = 0$. Demonstre que se α é valor próprio de A então $\alpha \in \{0, -2\}$.

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Exame de Época de Recurso – 9 de Janeiro de 2013

Duração: 2 horas e 30 minutos (+30 minutos de tolerância)

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome (completo): ______________________________

Número de aluno: | | | | | | **Número do caderno:** | | | | | |

Atenção

Esta prova consiste em 10 grupos:

- **Grupos 1 a 5 - Escolha múltipla.**
- **Grupos 6 e 7 - Para completar, no enunciado, sem apresentar justificações.**
- **Grupos 8 a 10 - Para responder justificando todas as afirmações.**

O enunciado da prova é composto por 2 folhas que não podem ser desagrafadas. Quando terminar a prova tem de entregar o enunciado completo.

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

Em cada um dos Grupos 1 a 5 apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas.

Para cada um destes grupos a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: +1,5 valores;**
- **Se responder erradamente: −0,5 valores.**

A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\boxed{\max\{0, \mathrm{M}\}}$, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.

1. Seja $Q \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e considere as matrizes $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que

$$Q \xrightarrow[-3l_1]{} Q_1 \xrightarrow[l_1+4l_2]{} Q_2 \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} Q_3.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} Q_3.$

B $Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Q.$

C Se $Q_3 = I_2$ então Q é invertível e $Q^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$

D Se $\det Q = 2$ então $\det Q_3 = 6$.

Continua no verso desta folha

2. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e seja $B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, com $\det B = \alpha \neq 0$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- A B é invertível e $\det\left(B^{-1}B^{\top}\right) = 1$.
- B Em A, o complemento algébrico da posição $(2,3)$ é igual a -6.
- C $\det(2B) = 8\alpha$.
- D $\det\left(AB^{\top}\right) = -6\alpha$.

3. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$, cuja matriz ampliada é equivalente por linhas à matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta-2 & \beta-1 & 2 \\ 0 & 0 & \beta-1 & \alpha+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- A Se $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$ então o sistema é possível indeterminado.
- B Se $\beta = 2$ e $\alpha = 0$ então o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 1.
- C Se $\beta = 1$ e $\alpha = -2$ então o conjunto solução do sistema é $\{(-1-z,\, -2,\, z) : \ z \in \mathbb{R}\}$.
- D Se $\beta = 1$ e $\alpha \neq -2$ então o sistema é impossível.

4. Considere o referencial ortonormado e directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ e os pontos $A(2,1,0)$, $B(0,1,0)$ e $C(2,3,-1)$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- A A área do triângulo definido pelos pontos A, B e C é $\sqrt{20}$.
- B Os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são perpendiculares.
- C $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \mid \overrightarrow{BC} = 0$.
- D $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -2e_2 - 4e_3$.

5. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

- A A forma de escada reduzida de B é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
- B $A^{\top} + 2I_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.
- C A matriz A não é invertível.
- D $AB \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ e $(AB)_{12} = 3$.

Continua na próxima folha

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome (completo): ____________________

Número de aluno: | | | | | |

Nas alíneas dos Grupos 6 e 7 indique a resposta, no espaço respectivo, não apresentando quaisquer cálculos ou justificações. Nestas questões a cotação atribuída a cada alínea é a seguinte:

- **Se responder correctamente:** $0,5$ **valores.**
- **Se não responder ou responder erradamente:** 0 **valores.**

[Cotação]

6. Em $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços

$$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \ a = b - 2c\} \quad \text{e} \quad G = \left\langle (1,1,0), (-2,0,1), (-1,1,1) \right\rangle.$$

[0,5] (a) $\dim F =$ ____ .

[0,5] (b) $\dim G =$ ____ .

[0,5] (c) $\dim(F+G) =$ ____ .

[0,5] (d) $\dim(F \cap G) =$ ____ .

7. Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ uma matriz que tem o valor próprio 4 e o valor próprio 0.

[0,5] (a) Se $\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio 4 então $A \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{bmatrix}$.

[0,5] (b) Se $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio 0 então $A \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{bmatrix}$.

[0,5] (c) $\det A =$ ____ .

Continua no verso desta folha

Nos Grupos 8, 9 e 10 só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.
Na sua resolução mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

8. Considere a aplicação linear $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (2a, b-c),$$

para qualquer $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Determine:

[1,0] (a) Uma base do núcleo de f.

[1,0] (b) A dimensão da imagem de f.

[0,5] (c) Se f é sobrejectiva.

[1,0] (d) A matriz de f em relação às bases $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$ e $\mathcal{B}' = \big((0,1),(2,0)\big)$, isto é, a matriz $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Mude de Folha

9. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

[1,0] (a) Calcule os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.

[1,5] (b) Determine uma base de cada um dos subespaços próprios de A.

[1,0] (c) Justifique que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tais que $P^{-1}AP = D$.

Mude de Folha

[2,0] **10.** Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A^2 + 2A = 0$. Demonstre que se α é valor próprio de A então $\alpha \in \{0, -2\}$.

Fim

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Exame de Época de Recurso – 9 de Janeiro de 2013

Duração: 2 horas e 30 minutos (+30 minutos de tolerância)

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome (completo): ______________________________

Número de aluno: | | | | | | **Número do caderno:** | | | | | |

Atenção

Esta prova consiste em 10 grupos:

- **Grupos 1 a 5 - Escolha múltipla.**
- **Grupos 6 e 7 - Para completar, no enunciado, sem apresentar justificações.**
- **Grupos 8 a 10 - Para responder justificando todas as afirmações.**

O enunciado da prova é composto por 2 folhas que não podem ser desagrafadas. Quando terminar a prova tem de entregar o enunciado completo.

Em cada um dos Grupos 1 a 5 apenas uma das afirmações é falsa. Determine-a e assinale-a com um X na grelha de respostas.

Para cada um destes grupos a cotação atribuída é a seguinte:

- **Se não responder ou assinalar com um X mais do que uma opção: 0 valores;**
- **Se responder correctamente: +1,5 valores;**
- **Se responder erradamente: −0,5 valores.**

A classificação da parte de escolha múltipla (Grupos 1 a 5) é dada por $\boxed{\max\{0, \mathrm{M}\}}$**, onde M designa a soma das classificações obtidas nos 5 grupos de escolha múltipla.**

Grelha de Respostas

	A	B	C	D
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

1. Seja $Q \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e considere as matrizes $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que

$$Q \xrightarrow[-3l_1]{} Q_1 \xrightarrow[l_1+4l_2]{} Q_2 \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} Q_3.$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

A $Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} Q.$

B $Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} Q_3.$

C Se $\det Q = 2$ então $\det Q_3 = 6$.

D Se $Q_3 = I_2$ então Q é invertível e $Q^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$

Continua no verso desta folha

2. Considere o referencial ortonormado e directo $(O; e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ e os pontos $A(2,1,0)$, $B(0,1,0)$ e $C(2,3,-1)$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

[A] Os vectores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são perpendiculares.

[B] A área do triângulo definido pelos pontos A, B e C é $\sqrt{20}$.

[C] $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -2e_2 - 4e_3$.

[D] $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \mid \overrightarrow{BC} = 0$.

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e seja $B \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, com $\det B = \alpha \neq 0$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

[A] Em A, o complemento algébrico da posição $(2,3)$ é igual a -6.

[B] B é invertível e $\det\left(B^{-1}B^\top\right) = 1$.

[C] $\det\left(AB^\top\right) = -6\alpha$.

[D] $\det(2B) = 8\alpha$.

4. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$.

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

[A] $A^\top + 2I_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

[B] A forma de escada reduzida de B é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

[C] $AB \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ e $(AB)_{12} = 3$.

[D] A matriz A não é invertível.

5. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ e cada $\beta \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares, nas incógnitas x, y, z, sobre $\mathbb{R}$, cuja matriz ampliada é equivalente por linhas à matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \beta-2 & \beta-1 & 2 \\ 0 & 0 & \beta-1 & \alpha+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Apenas uma das seguintes afirmações é **FALSA**. Indique qual é.

[A] Se $\beta = 2$ e $\alpha = 0$ então o sistema é possível indeterminado com grau de indeterminação 1.

[B] Se $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{1,2\}$ então o sistema é possível indeterminado.

[C] Se $\beta = 1$ e $\alpha \neq -2$ então o sistema é impossível.

[D] Se $\beta = 1$ e $\alpha = -2$ então o conjunto solução do sistema é $\{(-1-z,\ -2,\ z) : \ z \in \mathbb{R}\}$.

Continua na próxima folha

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome (completo): ______________________________

Número de aluno: | | | | | |

Nas alíneas dos Grupos 6 e 7 indique a resposta, no espaço respectivo, não apresentando quaisquer cálculos ou justificações. Nestas questões a cotação atribuída a cada alínea é a seguinte:

- **Se responder correctamente:** $0,5$ **valores.**
- **Se não responder ou responder erradamente:** 0 **valores.**

[Cotação]

6. Em $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços

$$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : \ a = b - 2c\} \quad \text{e} \quad G = \langle (1,1,0),(0,2,1),(1,1,-1) \rangle .$$

[0,5] (a) $\dim F =$ _____ .

[0,5] (b) $\dim G =$ _____ .

[0,5] (c) $\dim(F+G) =$ _____ .

[0,5] (d) $\dim(F \cap G) =$ _____ .

7. Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ uma matriz que tem o valor próprio 5 e o valor próprio 0.

[0,5] (a) Se $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio 5 então $A\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{bmatrix}$.

[0,5] (b) Se $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio 0 então $A\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{bmatrix}$.

[0,5] (c) $\det A =$ _____ .

Continua no verso desta folha

Nos Grupos 8, 9 e 10 só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.
Na sua resolução mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

8. Considere a aplicação linear $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (2a, b-c),$$

para qualquer $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Determine:

[1,0] (a) Uma base do núcleo de f.

[1,0] (b) A dimensão da imagem de f.

[0,5] (c) Se f é sobrejectiva.

[1,0] (d) A matriz de f em relação às bases $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$ e $\mathcal{B}' = \big((0,1),(2,0)\big)$, isto é, a matriz $\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')$.

Mude de Folha

9. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

[1,0] (a) Calcule os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.

[1,5] (b) Determine uma base de cada um dos subespaços próprios de A.

[1,0] (c) Justifique que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tais que $P^{-1}AP = D$.

Mude de Folha

[2,0] **10.** Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A^2 + 2A = 0$. Demonstre que se α é valor próprio de A então $\alpha \in \{0, -2\}$.

Fim