FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
Departamento de Matemática

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Exame de Época de Recurso – 10 de Janeiro de 2014

Duração: 2 horas e 30 minutos (+30 minutos de tolerância)

PREENCHA DE FORMA BEM LEGÍVEL

Nome (completo): ____

Número de aluno: | | | | | |

Atenção

O exame é constituído por 10 grupos:

- **Grupos 1 a 6 - Para indicar a resposta, no espaço respectivo do enunciado, não apresentando quaisquer cálculos ou justificações.**
- **Grupos 7 a 10 - Para responder no caderno de exame e justificando todas as afirmações.**

O enunciado da prova é composto por 2 folhas. Quando terminar a prova tem de entregar a folha do enunciado correspondente aos Grupos 1 a 6 e as folhas do caderno com as respostas aos Grupos 7 a 10.

[Cotação]

1. Considere as bases $\mathcal{B}_1 = \big((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\big)$ e $\mathcal{B}_2 = \big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ do espaço vectorial $\mathbb{R}^3$. Seja $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que

$$A = \mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tem-se:

[0,5] (a) $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$.

[0,5] (b) $f(1,2,3) = (\mathbf{2},\ \mathbf{7},\ \mathbf{8})$.

[0,5] (c) $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{bmatrix}$.

2. Considere a matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & 1 & 2k \\ 0 & k+1 & 0 \end{bmatrix}$, com $k \in \mathbb{R}$.

[0,5] (a) A matriz B é invertível se, e só se, $k \in$ $\underline{\mathbb{R}\setminus\{\mathbf{-1},\mathbf{0}\}}$.

[0,5] (b) Para $k=1$ a matriz B é invertível e $B^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \frac{1}{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \frac{1}{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

[0,5] (c) Para $k=0$ a característica da matriz B é igual a $\underline{\ \mathbf{2}\ }$.

Continua no verso desta folha

3. Seja $Q \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e considere as matrizes $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tais que

$$Q \xrightarrow[-2l_1]{} Q_1 \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} Q_2 \xrightarrow[l_1+5l_2]{} Q_3.$$

Tem-se:

[0,5] (a) $Q_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} Q.$

[0,5] (b) Se $\det Q = 5$ então $\det Q_3 =$ **10** .

[0,5] (c) Preencha com matrizes elementares de forma a que se tenha $Q_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} Q.$

[0,5] (d) Se $Q_3 = I_2$ então Q é invertível e Q^{-1} escreve-se como produto de matrizes elementares da seguinte forma $Q^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}.$

4. Em $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços

$$F = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : a + 2b + c = 0\} \quad \text{e} \quad G = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : 2a + 5b + 3c = 0\}.$$

Tem-se:

[0,5] (a) Uma base de F é $\mathbf{((-2,1,0),(-1,0,1))}$.

[0,5] (b) Uma base de $F \cap G$ é $\mathbf{((1,-1,1))}$.

[0,5] (c) $\dim(F+G) =$ **3** .

5. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^2 + A = -I_n$. Tem-se:

[0,5] (a) A matriz A é invertível e $A^{-1} = \boldsymbol{-(A+I_n)}$.

[0,5] (b) A matriz $A + I_n$ é invertível e $(A+I_n)^{-1} = \boldsymbol{-A}$.

[0,5] (c) Se n é par e $\det A = 2$ então $\det(A+I_n) =$ **1/2** .

6. Considere um sistema de equações lineares, sobre $\mathbb{R}$, cuja representação matricial $AX = B$ tem matriz ampliada equivalente por linhas à matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & \beta \\ 0 & \beta & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \alpha^2-1 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

(a) Preencha com Impossível, Possível determinado ou Possível indeterminado (indicando, neste caso, o **grau de indeterminação**) de forma a obter afirmações verdadeiras.

[0,5] i. Se $\alpha = 2$ e $\beta \neq 0$, o sistema é Possível Determinado .

[0,5] ii. Se $\alpha = 1$ e $\beta \in \mathbb{R}$, o sistema é Impossível .

[0,5] iii. Se $\alpha = -1$ e $\beta = 0$, o sistema é Possível Indeterminado com grau de indeterm. 2 .

[0,5] (b) Se $\alpha = -1$ e $\beta = 1$, o conjunto das soluções do sistema é

$\{(1+c, -1, c) : c \in \mathbb{R}\}$.

Continua na próxima folha

Nos Grupos 7, 8, 9 e 10 só serão consideradas as respostas devidamente justificadas.
Na sua resolução mude de folha sempre que mudar de grupo.

[Cotação]

7. Considere a aplicação linear $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$f(a,b,c) = \begin{bmatrix} 2a & a+b+c \\ 0 & -a \end{bmatrix},$$

para qualquer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Determine:

[1,0] (a) Uma base do núcleo de f.

[1,0] (b) A dimensão da imagem de f.

[0,5] (c) Se f é injectiva.

[1,0] (d) A matriz de f em relação às bases

$$\mathcal{B} = \Big((1,0,0),(0,-1,1),(0,0,-1)\Big) \quad \text{e} \quad \mathcal{B}' = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right),$$

isto é, a matriz $\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')$.

Mude de Folha

8. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & -6 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

[1,0] (a) Calcule os valores próprios de A e indique as respectivas multiplicidades algébricas.

[1,5] (b) Determine uma base de cada um dos subespaços próprios de A.

[1,0] (c) Justifique que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível $P \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tais que $P^{-1}AP = D$.

Mude de Folha

[1,5] **9.** Seja $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $\operatorname{adj} A = 2I_3$. Demonstre que $\det A = -\sqrt{8}$ ou $\det A = \sqrt{8}$.

Mude de Folha

[1,5] **10.** Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz diagonalizável tal que todo o valor próprio de A pertence ao conjunto $\{0,1\}$. Demonstre que $A^2 = A$.

Fim

7. (a) Tem-se

$$\begin{aligned}
\operatorname{Nuc} f &= \left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 :\ f(a,b,c) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \\
&= \left\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 :\ \begin{bmatrix} 2a & a+b+c \\ 0 & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \\
&= \Big\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 :\ 2a = 0 \ \wedge\ a+b+c = 0 \ \wedge\ -a = 0\Big\} \\
&= \Big\{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3 :\ a = 0 \ \wedge\ b = -c\Big\} \\
&= \Big\{(0,-c,c) :\ c\in\mathbb{R}\Big\} \\
&= \Big\{c(0,-1,1) :\ c\in\mathbb{R}\Big\} \\
&= \Big\langle (0,-1,1) \Big\rangle .
\end{aligned}$$

Mostrámos que a sequência $\big((0,-1,1)\big)$ gera $\operatorname{Nuc} f$ e, pelo Critério de Independência Linear, também é linearmente independente pois

$$\alpha(0,-1,1) = (0,0,0) \Rightarrow \alpha = 0.$$

Logo $\big((0,-1,1)\big)$ é uma base de $\operatorname{Nuc} f$.

(b) Dado que $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, pelo Teorema da Dimensão sabemos que

$$\dim \mathbb{R}^3 = \dim \operatorname{Nuc} f + \dim \operatorname{Im} f.$$

Como $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e, pela alínea anterior, $\dim \operatorname{Nuc} f = 1$ concluímos que $\dim \operatorname{Im} f = 2$.

(c) Uma aplicação linear é injectiva se, e só se, o subespaço $\operatorname{Nuc} f$ consiste no subespaço nulo do espaço de partida. Dado que, pela alínea anterior, $\operatorname{Nuc} f = \big\langle (0,-1,1)\big\rangle \neq \{(0,0,0)\}$ concluímos que f não é injectiva.

(d) Como

$$\begin{aligned}
f(1,0,0) &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (\mathbf{-1})\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (\mathbf{-1})\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathbf{0}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
f(0,-1,1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{0}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{0}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathbf{0}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\
f(0,0,-1) &= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{1}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{0}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathbf{0}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

de acordo com a definição de $\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}')$, temos $\mathcal{M}(f;\mathcal{B},\mathcal{B}') = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

8. (a) O polinómio característico de A é

$$\begin{aligned}
|A - xI_3| &= \begin{vmatrix} -2-x & -6 & -2 \\ 1 & 3-x & 1 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} \overset{\text{Lapl.}}{\underset{l_3}{=}} (-x)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} -2-x & -6 \\ 1 & 3-x \end{vmatrix} \\
&= -x\Big((-2-x)(3-x) - (-6)\Big) = -x\left(-x + x^2\right) = -x^2(-1+x).
\end{aligned}$$

Os valores próprios de A, sendo os zeros reais do polinómio característico, são: 0 e 1, com $\operatorname{ma}(0) = 2$ e $\operatorname{ma}(1) = 1$.

(b) Se α é um valor próprio de A sabemos que o subespaço próprio de A associado ao valor α, M_α, é:

$$M_\alpha = \{X \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) : \ AX = \alpha X\} = \{X \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) : \ (A - \alpha I_3)X = 0\}.$$

- Seja M_0 o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 0. Tem-se:

$$M_0 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) : \ (A - 0I_3)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Cálculo auxiliar:

$$(A - 0I_3|0) = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -6 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 + 2l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(f.e.r.)}$$

Logo,

$$M_0 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) : \ a = -3b - c \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -3b - c \\ b \\ c \end{bmatrix} : \ b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} -3b \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -c \\ 0 \\ c \end{bmatrix} : \ b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ b\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \ b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Concluímos então que a sequência $\left(\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_0 porque gera M_0 e é linearmente independente (pois $\alpha\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$).

- Seja M_1 o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 1. Tem-se:

$$M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) : \ (A - 1I_3)\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Cálculo auxiliar:

$$(A - 1I_3|0) = \left[\begin{array}{ccc|c} -3 & -6 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 \leftrightarrow l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 + 3l_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\xrightarrow[l_3 + l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_1 + (-1)l_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{(f.e.r.)}$$

Logo,

$$M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times1}(\mathbb{R}) : \ a = -2b \ \wedge \ c = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} -2b \\ b \\ 0 \end{bmatrix} : \ b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ b\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} : \ b \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Concluímos então que a sequência $\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ é uma base de M_1 pois gera M_1 e é linearmente independente (basta notar que $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$).

(c) Uma condição necessária e suficiente para que a matriz A seja diagonalizável, é que a soma das multiplicidades geométricas dos seus valores próprios iguale a ordem da matriz A. Como, pela alínea anterior, $\text{mg}(0) = \dim M_0 = 2$ e $\text{mg}(1) = \dim M_1 = 1$ tem-se

$$\text{mg}(2) + \text{mg}(3) = 3 = \text{ordem de } A$$

e, portanto, A é diagonalizável. Nestas condições, sabemos que A é semelhante a uma matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ com os elementos 0, 0 e 1 na diagonal. Se $D = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ então considerando, por exemplo, a matriz $P = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, onde a primeira e a segunda colunas são os vectores da base de M_0 e a terceira coluna é o vector da base de M_1, a matriz P é invertível e, além disso, tem-se $P^{-1}AP = D$.

9. [Para simplificar a exposição, consideramos a notação $|A|$ para representar $\det A$.]

Para qualquer matriz $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, com $n \geq 2$, tem-se

$$B \,\text{adj}\, B = |B| I_n.$$

Dado que $A \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{R})$ e $\text{adj}\, A = 2I_3$ podemos afirmar que $A(2I_3) = |A|I_3$, isto é, que $2A = |A|I_3$. Consequentemente

$$|2A| = \Big| |A|I_3 \Big| \Leftrightarrow 2^3|A| = |A|^3|I_3| \Leftrightarrow 8|A| = |A|^3 \Leftrightarrow |A|^3 - 8|A| = 0 \Leftrightarrow |A| \left(|A|^2 - 8\right) = 0$$

e, portanto,

$$|A| = 0 \quad \text{ou} \quad |A| = \sqrt{8} \quad \text{ou} \quad |A| = -\sqrt{8}.$$

Justifiquemos que, como $\text{adj}\, A = 2I_3$ é uma matriz invertível, se tem $|A| \neq 0$. De facto, se $|A| = 0$ tem-se $A \,\text{adj}\, A = |A|I_3 = 0$, isto é, $A \,\text{adj}\, A = 0$ e, como $\text{adj}\, A$ é invertível, multiplicando ambos os membros da igualdade anterior, à direita, por $(\text{adj}\, A)^{-1}$ obtemos $A = 0$ o que é uma contradição pois a matriz adjunta da matriz nula é a matriz nula.

Logo $|A| = \sqrt{8}$ ou $|A| = -\sqrt{8}$.

■Uma resolução alternativa: Como $A \,\text{adj}\, A = |A|I_3$ e, por hipótese, $\text{adj}\, A = 2I_3$ obtemos

$$A(2I_3) = |A|I_3 \Leftrightarrow 2A = |A|I_3 \Leftrightarrow A = \frac{1}{2}|A|I_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}|A| & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}|A| & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}|A| \end{bmatrix}.$$

Por definição $\text{adj}\, A = \widehat{A}^\top$. Dado que $\text{adj}\, A = 2I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ tem-se, em particular, $\widehat{a}_{11} = 2$, isto é,

$$(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} \frac{1}{2}|A| & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}|A| \end{vmatrix} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{4}|A|^2 = 2 \Leftrightarrow |A|^2 = 8,$$

o que permite concluir que $|A| = \sqrt{8}$ ou $|A| = -\sqrt{8}$.

■

10. Dado que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ é diagonalizável existe $P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertível tal que

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

em que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são os valores próprios de A. Da igualdade anterior resulta

$$A = PDP^{-1}$$

o que permite obter

$$A^2 = \left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right) = PD^2P^{-1}.$$

Como $D^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{bmatrix}$ e, por hipótese, todo o valor próprio de A pertence ao conjunto $\{0,1\}$ (isto é, $\lambda_i \in \{0,1\}$, $i = 1, \ldots, n$) tem-se $D^2 = D$. Logo $A^2 = PDP^{-1} = A$.