FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA
24 de Julho de 2015
Duração da prova: 3h.

Exame da Época Especial de Álgebra Linear e Geometria Analítica B, C, D, E

Nas questões de 1 a 6: cada resposta certa vale 1,5 valores, cada resposta errada desconta 0,5 valores e marcações múltiplas anulam a questão. É necessário fundamentar as respostas às questões 7, 8 e 9.

[Cotação]

[1,5] (1) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Indique qual das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**:

A $r(A) = 3$.

B As outras três opções são falsas.

C O sistema de equações $AX = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ é possível e determinado.

D A forma de escada reduzida de A não é a matriz identidade I_4.

[1,5] (2) Seja $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, com $\det A = k$ e $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Indique qual das seguintes afirmações é **FALSA**:

A $\det(kA^{-1}) = 1$.

B $\det -AA^\top = -k^2$.

C $\begin{vmatrix} a & b & kc \\ d+a & e+b & k(f+c) \\ g & h & ki \end{vmatrix} = k^2$.

D Se $A \xrightarrow[2l_1]{} B \xrightarrow[l_3+\frac{1}{4}l_2]{} C$, então $\det C = 2k$.

[1,5] (3) Considere as seguintes bases de $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B}_1 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$, $\mathcal{B}_2 = ((0,1,0),(1,-4,1),(1,-2,-1))$. Seja $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida do modo seguinte: $f(x,y,z) = (x+z, 5x+3y-z, x+z)$.

Indique qual das seguintes afirmações é **FALSA**:

A f não é um endomorfismo diagonalizável.

B $(1,0,1) \in \operatorname{Im} f$.

C $\mathcal{M}(f; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & -8 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

D $(1,-4,1)$ é um vector próprio de f.

[1,5] (4) Para $\alpha \in \mathbb{R}$, considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x, y, z sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x + y = \alpha \\ x + \alpha z = -1 \\ y + \alpha z = -1 \end{cases}.$$

Indique qual das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**:

$\boxed{\text{A}}$ O sistema é possível determinado se, e só se, $\alpha \neq 0$.

$\boxed{\text{B}}$ As outras três opções são falsas.

$\boxed{\text{C}}$ Se $\alpha = 0$ o sistema é indeterminado.

$\boxed{\text{D}}$ Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, o sistema é impossível.

[1,5] (5) Considere os subespaços de $\mathbb{R}^4$

$$F = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : -2x + 2y + w = 0 \wedge -x + y + w = 0\} \quad \text{e} \quad G = \langle (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle.$$

Indique qual das seguintes afirmações é **FALSA**:

$\boxed{\text{A}}$ $\langle (1, 1, 0, 0) \rangle \subseteq F$.

$\boxed{\text{B}}$ $\dim(F + G) = 3$.

$\boxed{\text{C}}$ $F \cap G = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = y = z\}$.

$\boxed{\text{D}}$ $((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ é uma base, do espaço vectorial $\mathbb{R}^4$, que inclui uma base de $F + G$.

[1,5] (6) Considere as rectas $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ definidas, respectivamente, pelos seguintes sistemas de equações

$$\mathcal{R}_1 : \begin{cases} z - y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \qquad \mathcal{R}_2 : \begin{cases} y + z = 0 \\ x = 0. \end{cases}$$

Indique qual das seguintes afirmações é **VERDADEIRA**:

$\boxed{\text{A}}$ $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \neq \emptyset$.

$\boxed{\text{B}}$ As outras três opções são falsas.

$\boxed{\text{C}}$ $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ são paralelas.

$\boxed{\text{D}}$ $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ são enviesadas.

24 de Julho de 2015
Duração da prova: 3h.

Exame da Época Especial de Álgebra Linear e Geometria Analítica B, C, D, E

(2014/2015)

Nas perguntas que se seguem justifique detalhadamente as suas respostas.

[6,0] (7) Considere as seguintes bases de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B}_1 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)), \quad \mathcal{B}_2 = ((1,0,0),(0,1,1),(0,0,1)).$$

Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ o endomorfismo tal que

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine $f(-1,-2,1)$ e conclua que o vector $(-1,-2,1)$ é vector próprio de f.

(b) Calcule os valores próprios de f indicando as respectivas multiplicidades geométricas e averigúe se f é diagonalizável.

(c) Determine $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1)$, utilizando matrizes de mudança de base.

(d) Determine $f(x,y,z)$.

(e) Obtenha uma base de $\operatorname{Im} f$.

[3,0] (8) Considere os pontos: $A = (2,1,-3)$, $B = (3,2,-2)$, $C = (2,-4,2)$ e $Q = (1,-1,-1)$. Seja $\mathcal{P}$ o único plano que passa pelos pontos A, B e C.

(a) Determine $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

(b) Obtenha uma equação cartesiana do plano $\mathcal{P}$.

(c) Calcule $d(Q,\mathcal{P})$.

[2,0] (9) Seja V um espaço vectorial real. Mostre que, para quaisquer subespaços vectoriais de V, F, G, H, se $G \subseteq F$ então $F \cap (G+H) = (F \cap G) + (F \cap H)$.

Uma Resolução do Exame da Época Especial de ALGA B, C, D e E

24 de Julho de 2015

(1) Resposta certa: C

(2) Resposta certa: A

(3) Resposta certa: A

(4) Resposta certa: A

(5) Resposta certa: C

(6) Resposta certa: D

(7) (a) No que se segue denotamos por A a matriz $\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1)$. Assim,

$$A = \mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja (a_1, a_2, a_3) a sequência das coordenadas do vector $(-1,-2,1)$ na base $\mathcal{B}_1$ (base canónica). De

$$(-1,-2,1) = a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1),$$

conclui-se que $a_1 = -1,\ a_2 = -2,\ a_3 = 1$.

Sendo (b_1, b_2, b_3) a sequência das coordenadas do vector $f(-1,-2,1)$ na base $\mathcal{B}_1$ então, de acordo com a matéria leccionada, temos que

$$A\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$

pelo que

$$\begin{aligned} f(-1,-2,1) &= b_1(1,0,0) + b_2(0,1,0) + b_3(0,0,1) \\ &= -2(1,0,0) - 4(0,1,0) + 2(0,0,1) \\ &= (-2,-4,2). \end{aligned}$$

Como, $f(-1,-2,1) = (-2,-4,2) = 2(-1,-2,1)$, resulta da definição de vector próprio e de valor próprio de um endomorfismo, que $(-1,-2,1)$ é um vector próprio de f, associado ao valor próprio 2.

(b) Por definição, o polinómio característico do endomorfismo f é o polinómio característico da matriz A:

$$|A-\lambda I_3| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda).$$

Assim se conclui que os valores próprios de f são: 0, 1 e 2. Cada um dos valores próprios tem multiplicidade algébrica 1. Como a multiplicidade geométrica de qualquer valor próprio λ (de A) é maior ou igual a 1 e menor ou igual à respectiva multiplicidade algébrica $(1 \leq \mathrm{mg}(\lambda) \leq \mathrm{ma}(\lambda))$, então

$$1 \leq \mathrm{mg}(0) \leq 1, \quad 1 \leq \mathrm{mg}(1) \leq 1, \quad 1 \leq \mathrm{mg}(2) \leq 1.$$

Donde se conclui que $\mathrm{mg}(0) = \mathrm{mg}(1) = \mathrm{mg}(2) = 1$.

Como a soma das multiplicidades geométricas de todos os valores próprios de A é

$$\mathrm{mg}(0) + \mathrm{mg}(1) + \mathrm{mg}(2) = 3$$

e 3 é a ordem da matriz A, então, de acordo com a matéria leccionada, temos que a matriz A é diagonalizável. Como $A = \mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1)$ então f é um endomorfismo diagonalizável.

(c) Tendo presente a matéria leccionada, sabemos que

$$\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1) = \mathcal{M}(f \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1) = \mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1)\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1),$$

onde $\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1)$ é a matriz mudança de base de $\mathcal{B}_2$ para $\mathcal{B}_1$. Por definição, a matriz mudança de base de $\mathcal{B}_2$ para $\mathcal{B}_1$ é a matriz cujas colunas são as coordenadas de cada um dos vectores da base $\mathcal{B}_2$ na base $\mathcal{B}_1$. Como $\mathcal{B}_1$ é a base canónica, então as sequências de coordenadas dos vectores da base $\mathcal{B}_2$ em relação à base $\mathcal{B}_1$ coincidem com os próprios vectores de $\mathcal{B}_2$, tendo-se

$$\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

Tem-se então que

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(f;\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1) &= \mathcal{M}(f;\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_1)\mathcal{M}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3};\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1)\\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(d) Seja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Como $\mathcal{B}_1$ é a base canónica, então a sequência de coordenadas do vector (x, y, z) na base $\mathcal{B}_1$ é (x, y, z). Assim, sendo (b_1, b_2, b_3) a sequência das coordenadas do vector $f(x, y, z)$ na base $\mathcal{B}_1$ então, de acordo com a matéria leccionada, temos que

$$A\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} y\\ 2y\\ x-y+z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix},$$

pelo que

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= b_1(1,0,0) + b_2(0,1,0) + b_3(0,0,1)\\ &= y(1,0,0) + 2y(0,1,0) + (x-y+z)(0,0,1)\\ &= (y, 2y, x-y+z).\end{aligned}$$

(e) Usando a alínea anterior,

$$\mathrm{Im} f = \{f(x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{R}\} = \{(y, 2y, x-y+z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

Procurando os geradores de $\mathrm{Im}\, f$, temos

$$(y, 2y, x-y+z) = y(1,2,-1) + x(0,0,1) + z(0,0,1), \quad x,y,z \in \mathbb{R},$$

donde

$$\mathrm{Im} f = \langle (1,2,-1), (0,0,1), (0,0,1)\rangle = \langle (1,2,-1), (0,0,1)\rangle.$$

Como a sequência de vectores $((1,2,-1),(0,0,1))$ é linearmente independente, pois

$$r\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2,$$

então a sequência $((1,2,-1),(0,0,1))$ constitui uma base de $\mathrm{Im}f$.

(8) (a) Consideremos os vectores: $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. Sabemos que a base (e_1, e_2, e_3) (base canónica de $\mathbb{R}^3$) é ortonormada e directa.

Nesta conformidade,

$$\overrightarrow{AB} = (1,1,1) = e_1 + e_2 + e_3,$$

$$\overrightarrow{AC} = (0,-5,5) = -5e_2 + 5e_3.$$

Consequentemente,

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \left(\text{mnemónica} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} e_3$$

$$= 10e_1 - 5e_2 - 5e_3 = (10,-5,-5).$$

(b) O plano $\mathcal{P}$ que passa pelos pontos A, B e C admite $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (10,-5,-5)$ como vector normal. Assim se conclui que

$$10(x-2) - 5(y-1) - 5(z+3) = 0$$

é uma equação cartesiana do plano $\mathcal{P}$ que passa pelos pontos A, B e C. A referida equação é equivalente à seguinte:

$$10x - 5y - 5z - 30 = 0.$$

(c) Considere-se o vector $u = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (10,-5,-5)$ perpendicular ao plano $\mathcal{P}$ e o ponto $A = (2,1,-3)$ pertencente a $\mathcal{P}$. Facilmente obtém-se $\overrightarrow{AQ} = -e_1 - 2e_2 + 2e_3 = (-1,-2,2)$, donde $\overrightarrow{AQ}|u = (-1) \times 10 + (-2) \times (-5) + 2 \times (-5) = -10$ e $\|u\| = \sqrt{150} = 5\sqrt{6}$.

Consequentemente $d(Q, \mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{AQ}|u|}{\|u\|} = \frac{10}{5\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$.

(9) Sejam F, G, H, subespaços vectoriais de V. Suponhamos que $G \subseteq F$.

Seja $x \in F \cap (G + H)$. Por definição de intersecção de conjuntos, temos que $x \in F$ e $x \in G + H$. Por outro lado, por definição de soma de subespaços vectoriais, existem $g \in G$ e $h \in H$ tais que

$$x = g + h.$$

Como, por hipótese, $G \subseteq F$ então $g \in F$, uma vez que $g \in G$. Logo, por definição de intersecção, temos $g \in F \cap G$. Por outro lado, tendo presente que $h = x - g$, $x \in F$, $g \in F$ e que F é um subespaço vectorial, conclui-se que $h \in F$. Portanto, por definição de intersecção, $h \in F \cap H$. Em suma, temos que:

$$x = g + h, \ \ g \in F \cap G \ \text{ e } \ h \in F \cap H.$$

Assim, por definição de soma de subespaços vectoriais, temos

$$x \in (F \cap G) + (F \cap H).$$

Da argumentação acima expendida resulta que

$$F \cap (G + H) \subseteq (F \cap G) + (F \cap H).$$

Seja $y \in (F \cap G) + (F \cap H)$. Por definição de soma de subespaços vectoriais, existem $u \in F \cap G$ e $v \in F \cap H$ tais que

$$y = u + v.$$

Por definição de intersecção, temos $u \in F$, $v \in F$, $u \in G$ e $v \in H$. Atendendo a que F é um subespaço vectorial então $y \in F$. De acordo com a definição de soma de subespaços vectoriais, temos que $y \in G + H$. Portanto temos que $y \in F$ e $y \in G + H$. Logo, por definição de intersecção, $y \in F \cap (G + H)$. Assim se conclui que

$$(F \cap G) + (F \cap H) \subseteq F \cap (G + H).$$

Do exposto resulta que

$$F \cap (G + H) = (F \cap G) + (F \cap H).$$